SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

VI.
SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA POMOCÍ METODY VLASTNÍCH ČÍSEL

ZAČÍNÁME

AR(p) proces znehodnocený aditivním bílým šumem ≡ ARMA(p,p) proces;

ted' bude … periodický signál + bílý šum

$$x(nT) = 2.\cos(2\pi f_k T).x(nT-T) - x(nT-2T)$$

tento systém generuje signál

$$x(nT) = 2.\cos(2\pi f_k nT) \text{ pro } n \geq 0$$

ZAČÍNÁME

obecně, signál skládající se z p harmonických složek splňuje diferenční rovnici

$$x(nT) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(nT - mT), \qquad (☯)$$

což odpovídá systému s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}}$$

(Polynom $A(z)=1+\sum a_m z^{-m}$ má 2p kořenů na jednotkovém kruhu v místech, která odpovídají frekvencím harmonického signálu.)

PRINCIP

- ☑ přepokládejme periodický signál + bílý šum w(nT) $\{E(|w(nT)^2|)=\sigma_w^2\}$

$$y(nT) = x(nT) + w(nT)$$

po dosazení za x(nT) z tohoto vztahu do (☯) máme

$$y(nT) - w(nT) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m\left[y(nT - mT) - w(nT - mT)\right]$$

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(nT - mT) = \sum_{m=0}^{2p} a_m w(nT - mT), \quad a_0 \equiv 1$$

což představuje ARMA proces s identickými AR i MA parametry

$$\mathbf{y}^T.\mathbf{a} = \mathbf{w}^T.\mathbf{a} \qquad (🐈)$$

$\mathbf{y}^T = [y(nT), y(nT-T),\ldots,y(nT-2pT)]$,

$\mathbf{w}^T = [w(nT),w(nT-T),\ldots,w(nT-2pT)]$,

$\mathbf{a}^T = [1, a_1,\ldots, a_{2p-1},a_{2p}]$,

PRINCIPL

- vynásobením obou stran (🐕) vektorem **y** a určením střední hodnoty

$$E(\mathbf{y}.\mathbf{y}^T).\mathbf{a} = E(\mathbf{y}.\mathbf{w}^T).\mathbf{a} = E((\mathbf{x}+\mathbf{w}).\mathbf{w}^T).\mathbf{a}$$

$(\mathbf{\Gamma}_{yy} - \sigma_w^2.\mathbf{I}).\mathbf{a} = 0$ … vlastní (charakteristická) rovnice

σ_w^2 je vlastní číslo autokorelační matice $\mathbf{\Gamma}_{yy}$;

a je vlastní vektor $\mathbf{\Gamma}_{yy}$ spojený s vlastním číslem σ_w^2;

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

Mějme p náhodně fázově posunutých harmonických signálů s aditivním bílým šumem.

Hodnoty autokorelační funkce jsou

$$\gamma_{yy}(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^{p} P_i$$

$$\gamma_{yy}(k) = \sum_{i=1}^{p} P_i . \cos 2\pi f_i kT, \quad k \neq 0; \quad P_i = A_i^2 / 2 \text{ je}$$

průměrný výkon i-té sinusovky, A_i je její amplituda

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

- maticově

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 T & \cos 2\pi f_2 T & \dots & \cos 2\pi f_p T \\ \cos 2\pi f_1 2T & \cos 2\pi f_2 2T & \dots & \cos 2\pi f_p 2T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\pi f_1 pT & \cos 2\pi f_2 pT & \dots & \cos 2\pi f_p pT \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

- známe-li frekvence f_i, $1 \le i \le p$, můžeme spočítat výkon jednotlivých harmonických složek, místo hodnot $\gamma_{yy}(mT)$ použijeme odhady $r_{yy}(mT)$, známe-li výkony, určíme rozptyl šumu

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^{p} P_i$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE
PŘÍKLAD

Předpokládejme hodnoty AKF $\gamma_{yy}(0)=3$, $\gamma_{yy}(1)=1$ a $\gamma_{yy}(2)=0$. Proces obsahuje jeden harmonický signál v bílém šumu. Určete jeho frekvenci, výkon a rozptyl, tj. výkon šumu.

Řešení:

autokorelační matice je

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE
PŘÍKLAD

její minimální vlastní číslo je rovno nejmenšímu kořenu charakteristického polynomu

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3+\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3-\sqrt{2} \Rightarrow \sigma_w^2 = \lambda_{min} = 3-\sqrt{2}$

odpovídající charakteristický vektor má složky $a_0=1$, a_1, a_2, pro které platí

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

PŘÍKLAD

řešením získáme $a_1 = -\sqrt{2}$ a $a_2 = 1$

$$z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |z_1| = |z_2| = 1,$$

tj. leží na jednotkové kružnici

$$z_i = e^{j2\pi f_1 T} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad f_1.T = 1/8$$

výkon $P_1.\cos(2\pi f_1 T) = \gamma_{yy}(1) = 1 \Rightarrow P_1 = \sqrt{2}$,

protože

$$A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2.\sqrt{2}}$$

kontrola: $\sigma_w^2 = \gamma_{yy}(0) - P_1 = 3-\sqrt{2}$, což souhlasí s λ_{min}.

PRONYHO METODY

Gaspard Clair François Marie Riche, Baron de Prony

(22.7.1755 – 29.7.1839)

zákony (rozumějme funkce) popisující expanzi plynů lze vyjádřit součtem exponenciál

⇓

navrhnul metodu na interpolaci naměřených hodnot na základě exponenciálního modelu interpolační funkce

PRONYHO METODY

předpokládejme, že vzorky signálu neobsahují šum a skládají se z p exponenciálních signálů

$$x(nT) = \sum_{k=1}^{p} A_k . e^{s_k nT}, \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

problém je určit A_k a s_k z daných N vzorků.

Potřebujeme nejméně 2p hodnot x(nT) – problém je bohužel nelineární.

To co Prony vymyslel je, že výpočet A_k a s_k může být vzájemně oddělen a realizován řešením dvou soustav lineárních rovnic + řešení polynomiální rovnice.

PRONYHO METODY

z-transformace dané posloupnosti x(nT) je

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{p}A_k.e^{s_k nT}.z^{-n}$$

výměnou součtů a sečtením geometrické řady je

$$X(z)=\sum_{k=1}^{p}A_k.\frac{1-e^{s_k NT}.z^{-N}}{1-e^{s_k T}.z^{-1}}=$$

$$=\frac{\sum_{k=1}^{p}\left[A_k(1-e^{s_k NT}.z^{-N})\prod_{j=1,j\neq k}^{p}(1-e^{s_j T}.z^{-1})\right]}{\prod_{k=1}^{p}(1-e^{s_k T}.z^{-1})}$$

(ॐ1)

PRONYHO METODY

X(z) lze tedy vyjádřit pomocí poměru dvou polynomů

$$X(z) = \frac{C(z)}{B(z)} \qquad (ॐ2)$$

srovnáním obou (ॐ) vztahů lze říci, že B(z) je polynom p-tého řádu s kořeny $e^{s1.T}$, $e^{s2.T}$,..., $e^{sp.T}$;

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} b_k . z^{-k} = \prod_{k=1}^{p} (1 - e^{s_k T} . z^{-1})$$

po zjednodušení čitatele C(z) je polynom (N+p-1)-ho řádu definovaného

$$C(z) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k . z^{-k} + \sum_{k=0}^{p-1} c_{N+k} . z^{-(N+k)}$$

PRONYHO METODY

zatímco některé koefcienty polynomu C(z) (c_0, …, c_{p-1} a c_N, …, c_{N+p-1}) závisí na neznámých amplitudách a pólech (nebo frekvencích), jiné koeficienty c_p, …, $c_{N-1} \equiv 0$;

protože X(z).B(z) = C(z), je v časové oblasti

$$x(nT) \otimes b_n = c_n,$$

což znamená

$$x(nT) + \sum_{k=1}^{p} x(nT - kT).b_k = c_n, \quad n = 0,1,\ldots,N+p-1$$

PRONYHO METODY

protože dále jsou c_p, …, c_{N-1} nulové, středních N-p rovnic pro nulové pravé strany lze vyjádřit

$$\begin{bmatrix} x(pT) & x(pT-T) & \dots & x(0) \\ x(pT+T) & x(pT) & \dots & x(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(NT-T) & x(NT-2T) & \dots & x(NTpT-T) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_f . \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

kde i,j-tý prvek matice $\mathbf{X}_f$ je $x_{f\,i,j} = x(pT+iT-jT)$, $i=1,2,\dots, N-p$; $j = 1,2,\dots, p+1$ a $\mathbf{b}=[1,b_1,b_2,\dots, b_p]^T$

Je-li N=2p, pak máme právě dost rovnic k tomu určit $b_1,b_2,\dots, b_p$.

PRONYHO METODY

Jakmile určíme b_k, známe polynom

$$B(z)=1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\ldots+b_pz^{-p}$$

a řešením rovnice $B(z)=0$ dostaneme kořeny $e^{s1.T}$, $e^{s2.T}$,..., $e^{sp.T}$.

Koeficienty A_k jsou pak určeny řešením následujících p lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^{p} A_k.e^{s_k nT} = x(nT), \quad n = 0,1,\ldots,p-1 \qquad (\text{🍸})$$

A TO JE ZÁKLADNÍ MYŠLÉNKA BARONA PRONYHO

PRONYHO METODY

SUMARIZACE ALGORITMU

1. vypočítat koeficienty b_k z (🍽);
2. spočítat kořeny polynomu B(z) a tak určit $e^{s_1 T}, e^{s_2 T}, \ldots, e^{s_p T}$;
3. určit amplitudy $A_1, \ldots, A_p$ z rovnice (🍸);

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

předpokládáme signál + aditivní šum

Nechť diskrétní funkce

$$\hat{x}_n = \sum_{m=1}^{p} b_m z_m^n, \quad n = 0,1,\dots,N-1 \qquad (\Upsilon)$$

je modelem signálu, reprezentovaného naměřenými hodnotami $x_0,\dots, x_{N-1}$.

Hodnoty b_m, z_m jsou obecně komplexní

$$b_m = A_m . e^{j\Theta_m}$$

$$z_m = e^{(\alpha_m + j2\pi f_m)T}$$

A_m je amplituda, Θ_m počáteční fáze, α_m koeficient tlumení a f_m frekvence oscilací, T je vzorkovací perioda

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

cílem je nalézt $\{A_m, \Theta_m, \alpha_m, f_m\}$ a p takové, že je minimalizována chyba

$$e = \sum_{n=0}^{N-1} \left| x_n - \hat{x}_n \right|^2$$

je to těžce nelineární problém nejmenších čtverců, který lze řešit iteračně postupným zlepšováním počátečního odhadu.

Prony navrhnul postup, poskytující suboptimální řešení, které sice nezaručuje nalezení globálního minima, ale poskytuje dostatečně přijatelné řešení

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

ještě jednou a jinak:

vztah (🏋) představuje homogenní řešení lineární diferenční rovnice s konstantními parametry. Jakými? To určíme!

definujme polynom

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - z_n) = \sum_{i=0}^{p} a_i . z^{p-i}, \quad a_0 = 1$$

z (🏋) jeden způsob jak vyjádřit odhad $\widehat{x}_{n-m}$ je

$$\widehat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^{p} b_s . z_s^{n-m}, \quad \text{pro } 0 \le n - m \le N - 1$$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

vynásobením a_m a sečtením přes posledních p+1 součinů

$$\sum_{m=0}^{p} a_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^{p} b_s . \sum_{m=0}^{p} a_m z_s^{n-m}, \quad p \le n \le N-1$$

po substituci $z_s^{n-m} = z_s^{n-p} . z_s^{p-m}$ je

$$\sum_{m=0}^{p} a_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^{p} b_s z_s^{n-p} . \sum_{m=0}^{p} a_m z_s^{p-m} = 0$$

Ta nula plyne z toho, že poslední suma je právě hodnota polynomu $\Psi(z_s)$, tj. pro jeden jeho kořen.

$\Downarrow$

$$\hat{x}_n = -\sum_{m=1}^{p} a_m . \hat{x}_{n-m}$$

a co takhle Pisarenko?

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$x_n = \hat{x}_n + e_n \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

po dosazení za $\hat{x}_n$ je

$$x_n = -\sum_{m=1}^{p} a_m.\hat{x}_{n-m} + e_n =$$

$$= -\sum_{m=1}^{p} a_m.\hat{x}_{n-m} + \sum_{m=0}^{p} a_m.e_{n-m}, \qquad p \le n \le N-1$$

když $\hat{x}_{n-m} = x_{n-m} - e_{n-m}$

to nám poskytuje alternativní model (součet exponenciál + aditivní šum) pomocí ARMA systému AR a MA parametry

na rozdíl od Pisarenka nejsou koeficienty a_i omezeny tak, aby kořeny měly jen jednotkový modul

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

minimalizace $\sum_{n=p}^{N-1} |e_n|^2$ vede k soustavě nelineárních rovnic, proto alternativa:

když

$$\varepsilon_n = \sum_{m=0}^{p} a_m e_{n-m}, \quad p \le n \le N-1$$

pak

$$x_n = -\sum_{m=0}^{p} a_m x_{n-m} + \varepsilon_n$$

to pak vede k minimalizaci $\varepsilon_n \Rightarrow$ pouze AR model $\Rightarrow$ linearita (ε_n je určena MA procesem řízeným chybou aproximace e_n)

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

ε_n je rozdíl mezi x_n a jeho lineární predikcí p-tého řádu, zatímco

e_n je rozdíl mezi x_n a jeho exponenciální aproximací

řád p je určen nějakým způsobem pro určení řádu AR procesu (modelu)

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

určíme koeficienty a_m AR procesu $\Rightarrow$ najdeme kořeny AR polynomu a problém se redukuje na řešení soustavy lineárních rovnic s neznámými koeficienty b_m

$$\mathbf{\Phi}.\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$$

kde

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N-1} \end{bmatrix}$$

minimalizace nejmenšími □□ vede na řešení

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{\Phi}^H.\mathbf{\Phi}\right)^{-1}.\mathbf{\Phi}^H.\hat{\mathbf{x}} \qquad (\circledast)$$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

při řešení pomůže, když víme, že

$$\Phi^H.\Phi = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } \gamma_{ij} = \frac{\left(z_i^*.z_j\right)^N - 1}{z_i^*.z_j - 1}$$

parametry A_i, θ_i, α_i a f_i pak určíme

$$A_i = |b_i|$$

$$\theta_i = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im}b_i/\mathrm{Re}b_i)$$

$$\alpha_i = \ln|z_i|/T$$

$$f_i = \mathrm{arctg}(\mathrm{Im}z_i/\mathrm{Re}z_i)/2\pi T$$

PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Pronyho metoda užitečná při analýze přechodných dějů

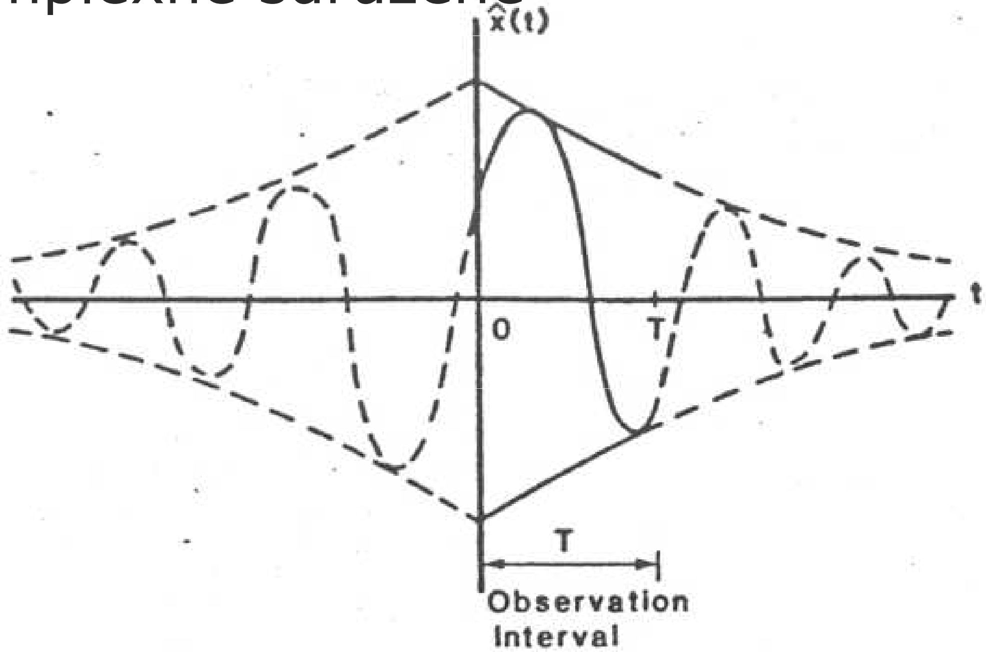
omezíme-li se na tlumené reálné sinusovky, pak

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=1}^{p} A_m e^{\alpha_m |t|} . e^{j(2\pi f_m t + \Theta_m)} \qquad (☎)$$

pro reálné x(t) požadujeme komplexně sdružené

$e^{j(2\pi f_m t + \Theta_m)}$ a $e^{-j(2\pi f_m t + \Theta_m)}$;

dále předpokládáme, že koeficienty tlumení jsou záporné, tj. exponenciály jsou tlumené (je-li α=0, jsou sinusovky tak jak mají být)



PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

protože vztah (☎) má v tom případě konečnou energii, jeho spektrální hustota je rovna FT tohoto vztahu

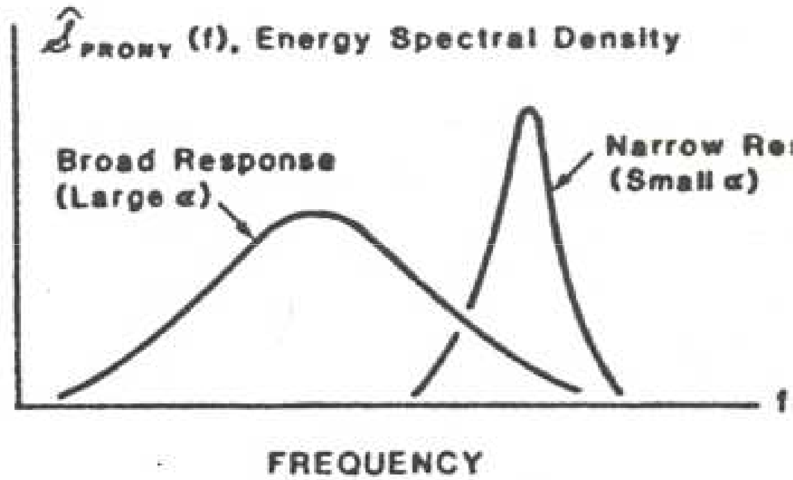
$$\hat{S}_{prony}(f) = \left|\hat{X}(f)\right|^2$$

kde

$$X(f) = \sum_{m=1}^{p} A_m \exp(j\Theta_m) \frac{2\alpha_m}{\left\{\alpha_m^2 + [2\pi(f - f_m)]^2\right\}}$$

spektrum je lineárně úměrné energii, nikoliv jako u AR modelů, kde je úměrné (nelineárně) výkonu

lze produkovat spektra s úzkými či širokými laloky – závisí na koeficientech tlumení (šířka pásma pro -3dB je α/π [Hz])



PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

PROBLÉMY

- ☑ počet exponenciál ~ řád AR systému – protože je třeba určit 2p parametrů, max. řád by měl být $p_{max} \leq N/2$, zatímco u AR modelů je možné $p > N/2$;
- ☑ přítomnost šumu ovlivňuje přesnost Pronyho odhadů;
- ☑ šum může způsobit, že koeficienty tlumení jsou moc velké;

A JE TO!