

10. Koherence

10.1. Časová koherence

10.2. Souvislost časově proměnného signálu se spektrální závislostí

10.3. Interference nemonochromatického záření

10.4. Fourierova spektroskopie

10.5. Prostorová koherence

10. Koherence

Koherence znamená souvislost. V našem případě se rozumí souvislost mezi vlnami světla. Projeví se především při skládání vln. Základním principem zůstává princip superpozice, tzn. sečítání, případně integrace, intenzit elektrického a magnetického pole v prostoru a čase. Vzhledem k povaze detektorů světla měříme nejčastěji tok energie a z hlediska jejich setrvačnosti prakticky vždy měříme střední časové hodnoty a z hlediska prostorového rozložení střední prostorové hodnoty.

Koherence úzce souvisí s kvalitou interferenčního jevu, často se v této souvislosti používá termín viditelnost. Při sečítání koherentních vln postupujeme standardně, tak je popsáno v předcházejícím odstavci. Výsledkem je zpravidla jasný interferenční jev. V případě částečně koherentních vln bude interference zeslabena, viditelnost bude menší. V případě nekoherentních vln je možné přímo sečítat toky energie, respektive intenzity světla. Pokud jsou vlny nekoherentní nebo částečně koherentní vlivem závislosti fáze na čase mluvíme o časové koherenci. Protože existuje vzájemná souvislost tohoto typu závislosti a spektrálního složení světla, patří rovněž efekty spojené s touto skutečností do stejné kategorie koherence.

Pokud sečítáme vlny z různých míst plošného zdroje s omezenou souvislostí mluvíme o prostorové koherenci.

10.1. Časová koherence

Předpokládáme vlny, které jsou časově nestabilní z hlediska fáze. Jako model zvolíme vlnu kdy se fáze mění skokem, ale je konstantní během doby τ_0 , jejich průměrná hodnota je τ_0 .

Fourierovou transformací tomu odpovídají vlny s frekvenčním intervalem $\Delta \approx \tau_0$ (viz kap3.3). Zavedeme délku l , pak

$$l = c\tau_0 \approx c\Delta \approx \lambda \Delta \quad (10.1.1)$$

Pokud je dráhový rozdíl mezi vlnami tohoto typu menší než l , pak vlny interferují, protože vzájemné fáze jsou relativně stabilní, v opačném případě je interference slabá nebo žádná. Vztahy rovněž dobře vysvětlují souvislost mezi časovou stabilitou a spektrálním složením interferujících vln. Analogicky lze postupovat se stejnými závěry pokud jako model interferujících vln zvolíme pulsy.

K popisu interference a koherence se dobře hodí představa Youngova pokusu nebo Michelsonova interferometru. Předpokládejme, že časový rozdíl obou drah je τ ($\tau = \Delta l / c$), pak platí

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t - \tau), \quad (10.1.2)$$

a pro intenzitu světla

$$I(\tau) = \langle EE^* \rangle = \langle E_1 E_1^* \rangle + \langle E_2 E_2^* \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle E_1(t) E_2^*(t - \tau) \rangle \quad (10.1.3)$$

Zavedeme korelační funkci, která určuje vlastnosti interferenčního efektu

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E_1(t) E_2^*(t - \tau) \rangle \quad (10.1.4)$$

a relativní korelační funkci, respektive stupeň koherence (smysl tohoto názvu bude zřejmý později)

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} \quad (10.1.5)$$

Pak pro intenzitu lze psát

$$I = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau), \quad (10.1.6)$$

a v případě $I_1 = I_2 = I_0$

$$I = 2(I_0 + \operatorname{Re} \Gamma_{12}(\tau)) = 2I_0(1 + \operatorname{Re} \gamma_{12}(\tau)) \quad (10.1.7)$$

10.2. Souvislost časově proměnného signálu se spektrální závislostí

Uvažujme kumulovanou intenzitu světla I_d měřenou detektorem za velmi dlouhou dobu. V případě pulzů je to doba delší než doba jeho trvání, v případě kontinuálních zdrojů je to doba za kterou průměrná velikost intenzity se již nemění. Z formálních matematických důvodů budeme integrovat intenzitu v nekonečných mezích, ale jsme si vědomi fyzikálního smyslu takové integrace. Současně předpokládáme stejné amplitudy pro E_1 a E_2 , jinými slovy symetrické rozdělení amplitudy vlny v interferometru. Pak

$$I_{d\tau}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_d(t, \tau) E_d^*(t, \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} E(t - \tau) E^*(t - \tau) dt + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t - \tau) dt \quad (10.2.1)$$

nebo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_d(t, \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} I(t - \tau) dt + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t - \tau) dt \quad (10.2.2)$$

Podle Parsevalova teorému – viz Appendix

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega \quad (10.2.3)$$

Tento výsledek lze rovněž interpretovat tak, že celková kumulovaná energie měřená v dlouhém časovém intervalu nebo širokém intervalu frekvencí, je stejná. Protože F.T. a inverzní F.T. nezmění třetí integrál (10.2.2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t - \tau) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t - \tau) dt \right] \quad (10.2.4)$$

pak podle autokorelačního teorému, viz Appendix, platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) E^*(t - \tau) dt = \sqrt{2\pi} \delta(\omega) E^*(\omega) = \sqrt{2\pi} I(\omega), \quad (10.2.5)$$

a po dosazení do (10.2.2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_d(t, \tau) dt = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (10.2.6)$$

Zkráceně

$$I_{d\tau}(\tau) = 2I_\omega + 2 \operatorname{Re} \Gamma_\omega(\tau) \quad (10.2.7)$$

Definujeme stupeň koherence

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma_\omega}{I_\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega} \quad (10.2.8)$$

Nebo

$$I_{d\tau}(\tau) = 2I_\omega \left[1 + \operatorname{Re} \gamma(\tau) \right] \quad (10.2.9)$$

Což je vztah formálně stejný s (10.1.7), musíme však rozlišovat způsob měření intenzit.

V zásadě platí, že zajímavá informace o interferenci je uložena ve funkci $\gamma(\tau)$.

Poznámka: Je zřejmé, že integrace v čase v neomezených mezích je velmi výhodná pro matematickou formulaci problému, zejména v tomto případě pro využití Parsevalova teorému.

Ve skutečnosti vždy měříme v omezeném čase a to znamená i omezení frekvencí, ale to v praxi nemusí hrát vážnou roli. Integrály podle času v nekonečných mezích lze spolehlivě nahradit středními hodnotami za fyzikálně rozumnou dobu T.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt \cong \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} I(t) dt \quad (10.2.10)$$

10.3. Interference nemonochromatického záření

Pro intenzitu interferující jedné monochromatické vlny např. při Youngově pokusu platí

$$I_{di} = 2I_{oi} \left[1 + \cos(k\Delta) \right] = 2I_{oi} \left[1 + \cos(\omega\tau) \right] \quad (10.3.1)$$

Ukázali jsme, že vlny s různými frekvencemi prakticky neinterferují a tedy můžeme sečítat přímo intenzity světla

$$I_{d\tau}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_d(\omega, \tau) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} 2I(\omega) \left[1 + \cos(\omega\tau) \right] d\omega = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (10.3.2)$$

Ve shodě s definicí funkce Γ_ω lze psát

$$I_{d\tau}(\tau) = 2I_\omega + 2 \operatorname{Re} \Gamma_\omega(\tau) \quad (10.3.3)$$

Což je vztah totožný s (10.2.7). Podobně lze definovat stupeň koherence

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma_\omega}{I_\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega} \quad (10.3.4)$$

Respektive

$$\operatorname{Re} \gamma(\tau) = \frac{\operatorname{Re} \Gamma_\omega}{I_\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) d\omega} \quad (10.3.5)$$

Nebo

$$I_{d\tau}(\tau) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{Re} \gamma_{\nu}(\tau) \right] \quad (10.3.6)$$

Je zřejmé, že o kvalitě interference rozhoduje stupeň koherence $\gamma_{\nu}(\tau)$, případně $|\gamma_{\nu}(\tau)|$. Pro posouzení vlivu koherence definujeme koherentní dobu, která udává dobu zpoždění za kterou se významně zeslabí interference. Jedna z možností definic

$$\tau_c = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau = 2 \int_0^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau \quad (10.3.7)$$

Podobně definujeme koherentní délku

$$l_c = c\tau_c \quad (10.3.8)$$

Kvalitu interferenčního jevu posuzujeme podle viditelnosti proužků

$$V(\tau) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (10.3.9)$$

Kde současně platí

$$V(\tau) = |\gamma_{\nu}(\tau)| \quad (10.3.10)$$

V častém případě spektrálního rozložení světla ve tvaru Gaussovy křivky

$$I(\omega) = I(\omega_0) e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} \quad (10.3.11)$$

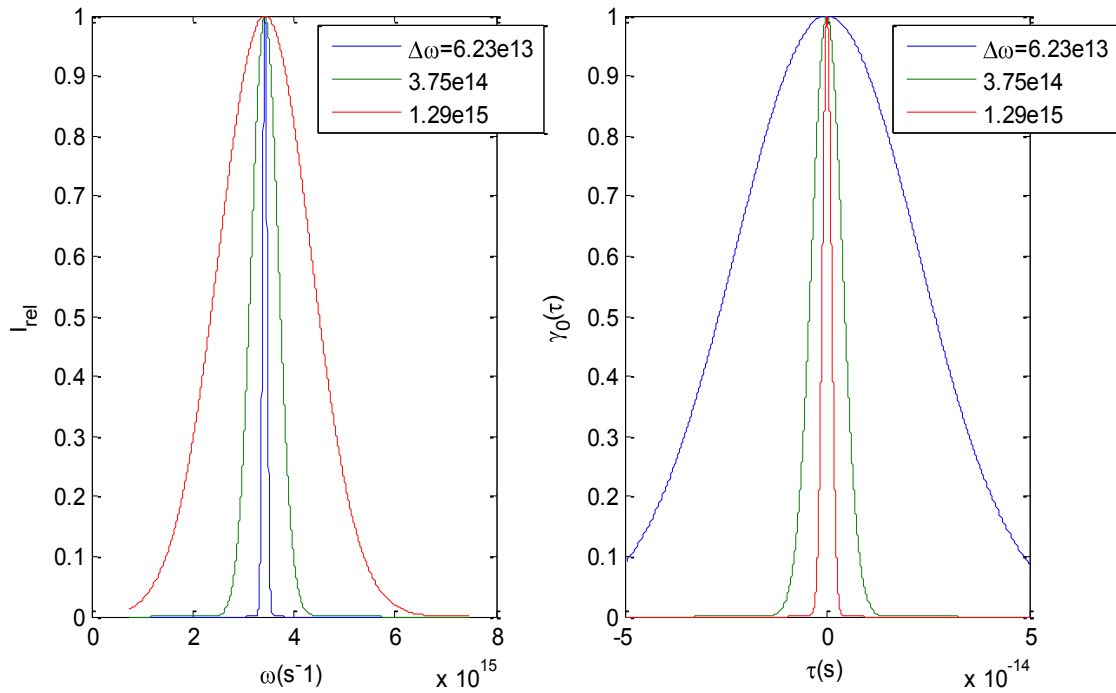
Dostaneme z (10.3.4) po integraci

$$\gamma_{\nu}(\tau) = e^{-\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)^2} e^{-i\omega_0\tau} \quad (10.3.12)$$

Respektive

$$\operatorname{Re} \gamma_{\nu}(\tau) = e^{-\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)^2} \cos(\tau\omega_0) = \gamma_{\nu}(\tau) \cos(\tau\omega_0) \quad (10.3.13)$$

kde $\gamma_{\nu}(\tau)$ je obálka oscilující funkce $\operatorname{Re} \gamma_{\nu}(\tau)$, viz obr.10.3.1.

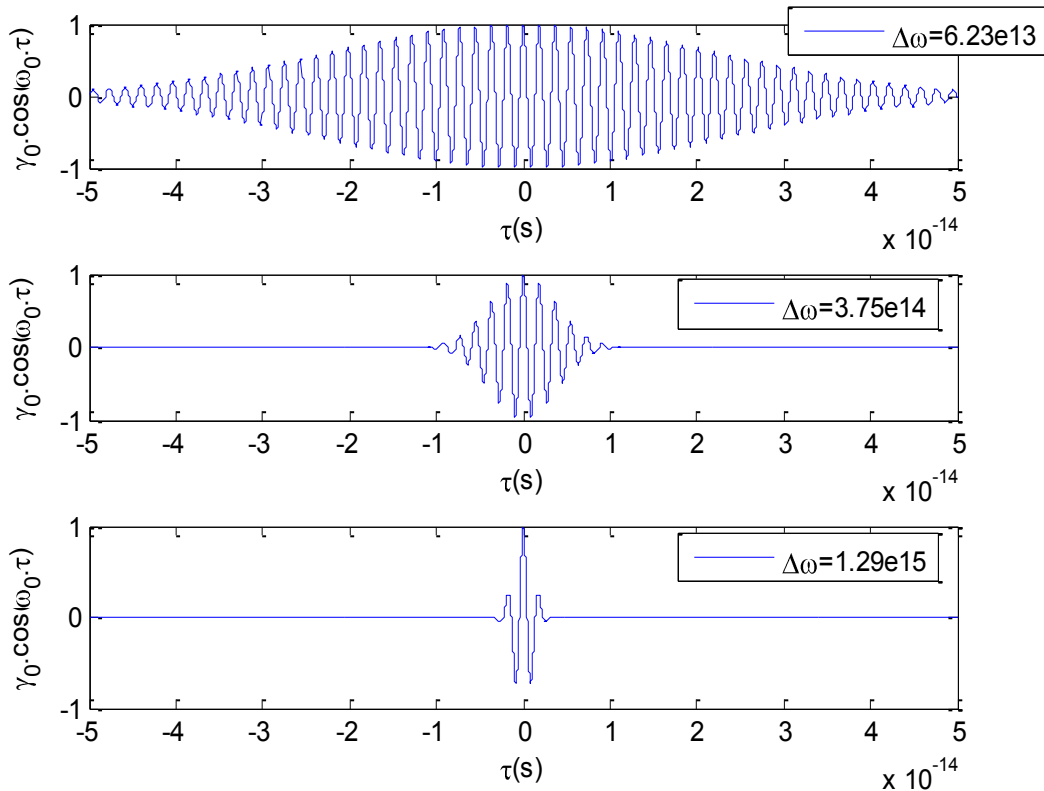


Obr. 10.3.1. Spektrální složení světla ve tvaru Gaussovy křivky (vztah 10.3.11 pro $\omega_\nu = 3.45 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$, $\lambda = 550 \text{ nm}$) a obálka stupně koherence $\gamma_\nu(\tau)$, (pro uvedené Δ , respektive pro $\Delta = 10 \text{ nm}, 60 \text{ nm}, 200 \text{ nm}$).

Je dobré si všimnout, že šířka spektra Δ je v intenzitě (10.3.11) ve jmenovateli exponentu a naopak v čitateli exponentu stupně koherence (10.3.13). Pak z (10.3.7) dostaneme

$$\tau_c = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} \quad l_c = c\tau_c = c \frac{\sqrt{2\pi}}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\lambda^2}{\Delta} \quad (10.3.14)$$

Pozn.: znovu si připomeneme, že koherentní délka pro sluneční záření je řádově μm , pro výbojku cm, pro lasery m a pro rádiovlny km.



Obr. 10.3.2. Stupeň coherence $Re\gamma_{\tau}$, pro podmínky jako v obr. 10.3.1.

10.4. Fourierova spektroskopie

Spektroskopie je metoda určování spektrálního složení světla. Má celou řadu aplikací a široce se používá prakticky ve všech přírodních vědách. Smyslem je najít závislost $I(\omega)$, nebo relativní spektrální funkci $P(\omega)$,

$$P(\omega) = \frac{I(\omega)}{\int_0^{\infty} I(\omega) d\omega} \quad (10.4.1)$$

Klasická nebo standardní spektroskopie využívá k rozkladu světla podle frekvencí disperzní prvek, např. hranol (index lomu závisí na frekvenci) nebo mřížku. Fourierova spektroskopie využívá možnosti najít $P(\omega)$ z analýzy světla procházejícího interferometrem v závislosti na dráhovém rozdílu respektive zpoždění τ .

Uvažujme např. Michelsonův interferometr. Intenzita světla měřená detektorem na výstupu interferometru je totožná se vztahem (10.3.2)

$$I_{d\tau}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} I_d(\omega, \tau) d\omega = 2 \int_0^{\infty} I(\omega) d\omega + 2 \int_0^{\infty} I(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = 2I_0 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{\omega}^{-1}(\tau) \quad (10.4.2)$$

Člen I_0 je konstantní a z hlediska spektrální závislosti neobsahuje žádnou zajímavou informaci. Vezmeme-li v úvahu pouze proměnnou část $I_{d\tau}(\tau)$, a skutečnost, že smysl mají pouze kladné frekvence

$$\text{Re } \Gamma_{\omega}(\tau) \approx \int_0^{\infty} I(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \quad (10.4.3)$$

Pak Fourierova transformace dává výsledek úměrný spektrálnímu složení světla

$$I(\omega) \approx \int_0^{\infty} \text{Re } \Gamma_{\omega}(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (10.4.4)$$

Praktické omezení přesnosti je především v konečném τ_{\max} , respektive v konečném posunutí zrcadla interferometru. Současné metody rychle F.T. dovolují získat vlastní spektrální funkci prakticky okamžitě. Konstanta úměrnosti není důležitá.

Poznámka: např. pro monochromatické světlo

$$I(\omega) \approx \delta(\omega - \omega_0) \quad \text{Re } \Gamma_{\omega} \approx \cos(\omega_0 \tau) \quad (10.4.5)$$

Pro Gaussovské spektrální složení

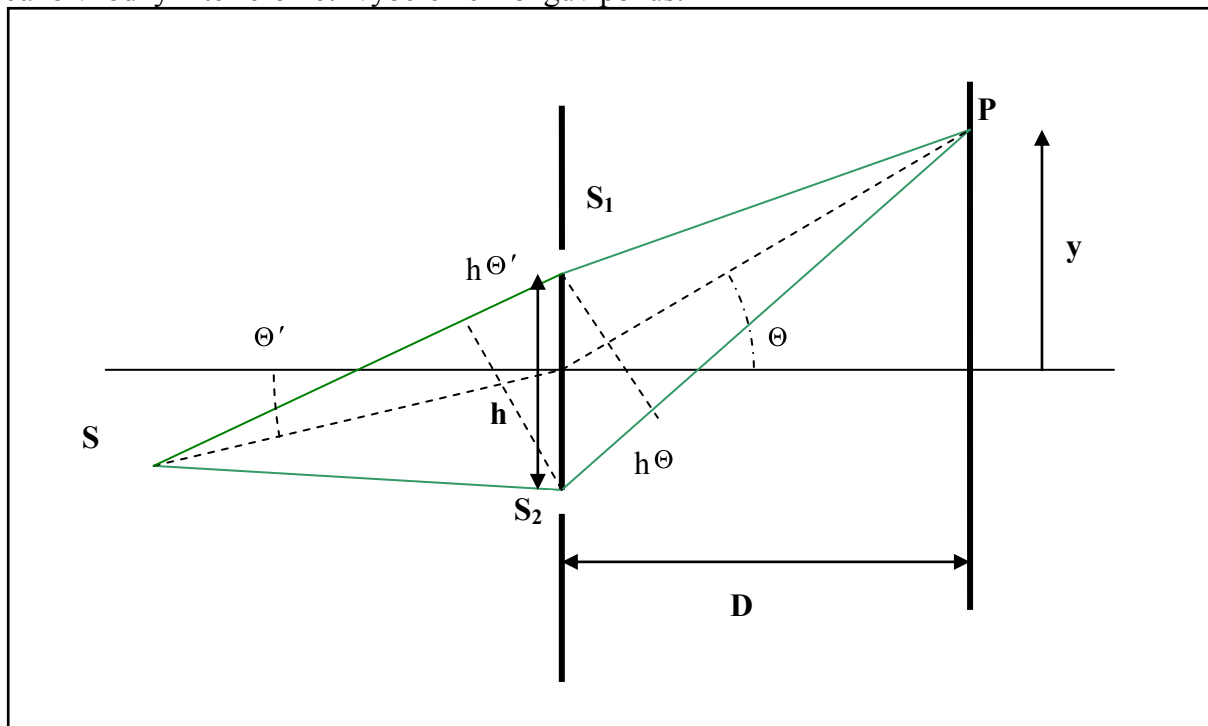
$$I(\omega) \approx e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2} \quad \text{Re } \Gamma_{\omega} \approx e^{-\left(\frac{\Delta\omega \tau}{2}\right)^2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (10.4.6)$$

Grafické znázornění těchto výsledků odpovídá obr. 10.3.1. a 10.3.2.

10.5. Prostorová koherence

Zpravidla používáme plošné zdroje světla. Vzájemná souvislost světla vyzařovaná z různých míst takového zdroje souvisí s prostorovou koherencí vyzařovaných vln. Analogicky k časové koherentní délce l_c , kterou nazveme podélnou a která udává vzdálenost na které jsou vlny ještě korelovány, zavedeme prostorovou, příčnou koherentní délku l_s , která udává vzdálenost mezi body zdroje, které ještě vyzařují korelované vlny.

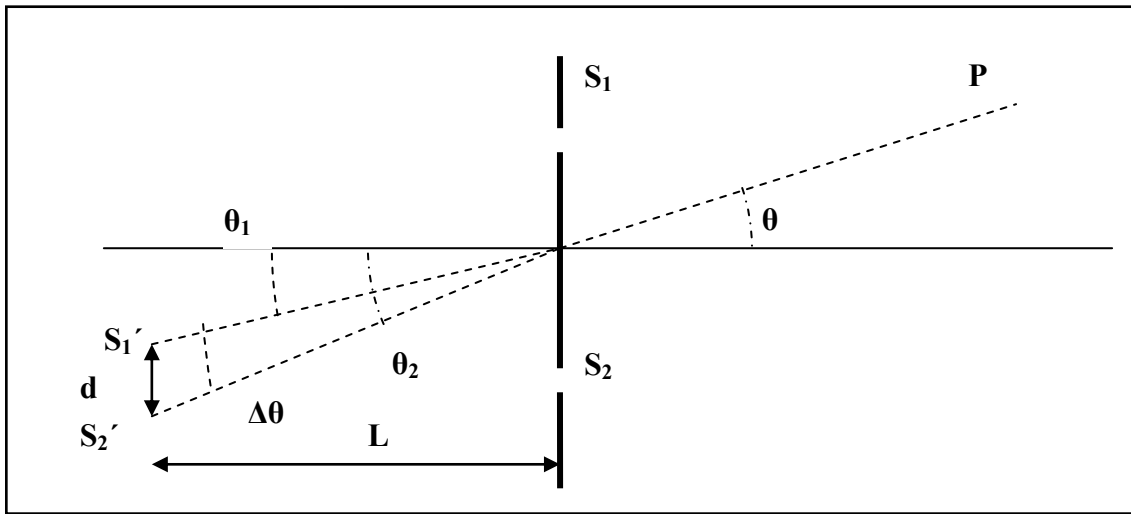
Jako vhodný interferometr vybereme Youngův pokus.



Obr. 10.5.1 Youngův pokus – bodový zdroj mimo optickou osu.

Pak pro bodový monochromatický zdroj světla – viz. obr.10.5.1.

$$I_i = I_{0i} \left[1 + \cos(k\Delta s_i) \right] = I_{0i} \left[1 + \cos(kh(\Theta - \vartheta_i)) \right] \quad (10.5.1)$$



Obr. 10.5.2. Youngův pokus – dva bodové zdroje vzdálené o délku d .

Pro dva nekoherentní stejně intenzivní zdroje (obr.10.5.2) můžeme sečítat intenzity světla

$$I = I_1 + I_2 = I_0 \left[1 + \cos(kh(\Theta - \vartheta_1)) \right] + I_0 \left[1 + \cos(kh(\Theta - \vartheta_2)) \right] = 2I_0 \left[1 + \cos(kh\Delta\Theta) \right] \cos kh(\Theta - \vartheta) \quad (10.5.2)$$

Kde

$$I_{01} = I_{02} = I_0 \quad \Delta\Theta = \vartheta_1 - \vartheta_2 \quad \Theta = (\vartheta_1 + \vartheta_2) / 2 \quad (10.5.3)$$

Dobrá viditelnost nastane pro podmínku

$$kh\Delta\Theta = 2 = \pi n \quad (10.5.4)$$

Podle obr.10.5.2. platí pro vzdálenost zdrojů

$$d = L\Delta\Theta \quad (10.5.5)$$

Pro podmínku dvou blízkých zdrojů ($m \approx 0$), kdy ještě bude dobrá viditelnost proužků, platí

$$h\Delta\Theta \ll \lambda \quad \text{nebo} \quad hd \ll L\lambda \quad (10.5.6)$$

Někdy se tato podmínka připomíná konstatováním, že součin příčných vzdáleností musí být mnohem menší než podélných.

Pro větší počet bodových nekoherentních zdrojů dostaneme snadno výslednou intenzitu

$$I = \sum_i I_i = \sum_i I_{0i} \left[1 + \cos(k\Delta s_i) \right] = \sum_i I_{0i} \left[1 + \cos(kh(\Theta - \vartheta_i)) \right] \quad (10.5.6)$$

Zajímavější je přejít ke spojitému lineárnímu zdroji, viz obr.10.5.3.

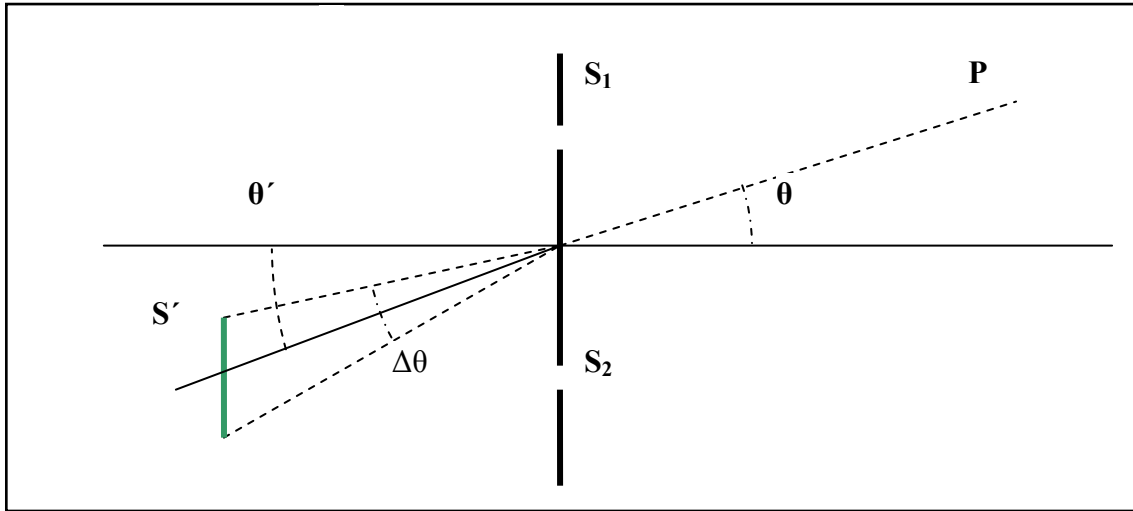
$$I(\Theta) = \int_{\vartheta_0 - \Theta/2}^{\vartheta_0 + \Theta/2} I(\Theta') \left[1 + \cos(kh(\Theta' - \vartheta)) \right] d\Theta' \quad (10.5.7)$$

Kde $\Delta\Theta$ je úhlová šířka zdroje, respektive skutečná šířka je $s = L\Delta\Theta$. Pro jednoduchost předpokládáme homogenní zdroj, pak

$$I(\Theta) = I_0 \Delta\Theta \left[1 + \frac{2}{kh\Delta\Theta} \sin \frac{kh\Delta\Theta}{2} \cos(kh(\Theta - \vartheta_0)) \right] = I_0 \Delta\Theta \left[1 + \sin c \frac{kh\Delta\Theta}{2} \cos(kh(\Theta - \vartheta_0)) \right] \quad (10.5.8)$$

Dostáváme velmi podobný vztah jako v případě časové koherence a proto

$$I(\Theta) = I_0 + \Gamma_{\Theta}(\Theta) = I_0 (1 + \gamma_{\Gamma}(\Theta)) \quad (10.5.9)$$



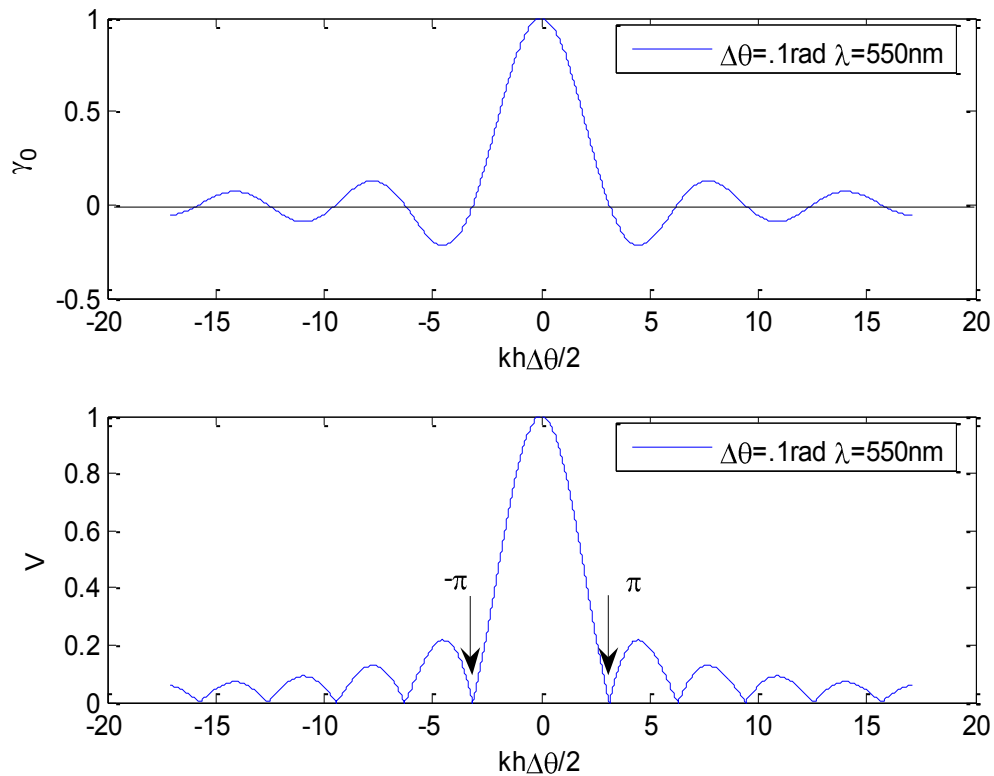
Obr.10.5.3. Youngův pokus – plošný zdroj světla.

Kde Γ_{Θ} je prostorová korelační funkce a $\gamma_{\Gamma}(\Theta)$ stupeň prostorové koherence

$$\gamma_{\Gamma}(\Theta) = \frac{\Gamma_{\Theta}(\Theta)}{I_0} = \sin c \frac{kh\Delta\Theta}{2} \cos(kh(\Theta - \Theta_0)) = \gamma_{\nu_0}(\Theta) \cos(kh(\Theta - \Theta_0)) \quad (10.5.10)$$

Funkce $\gamma_{\nu_0}(\Theta)$ je obálkou oscilující funkce a určuje charakter interference, viz obr.10.5.4.

V zásadě je možné upravit vztahy pro nekonečně velký zdroj, ale není to praktické.

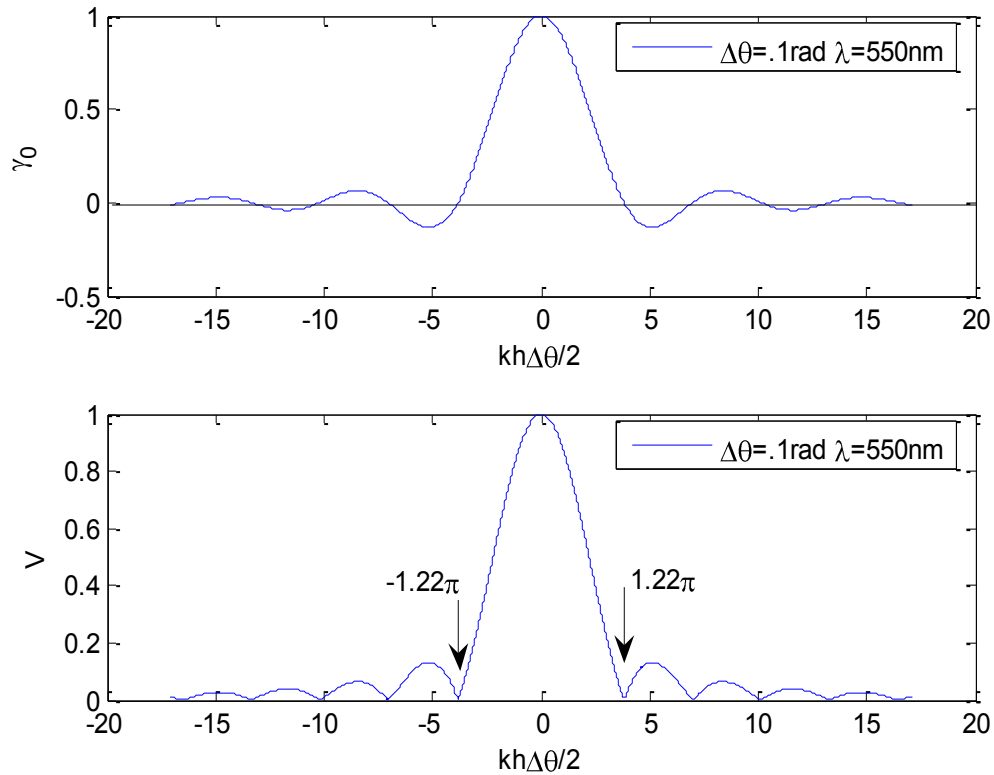


Obr. 10.5.4. Obálka stupně prostorové koherence a viditelnost V pro plošný zdroj.

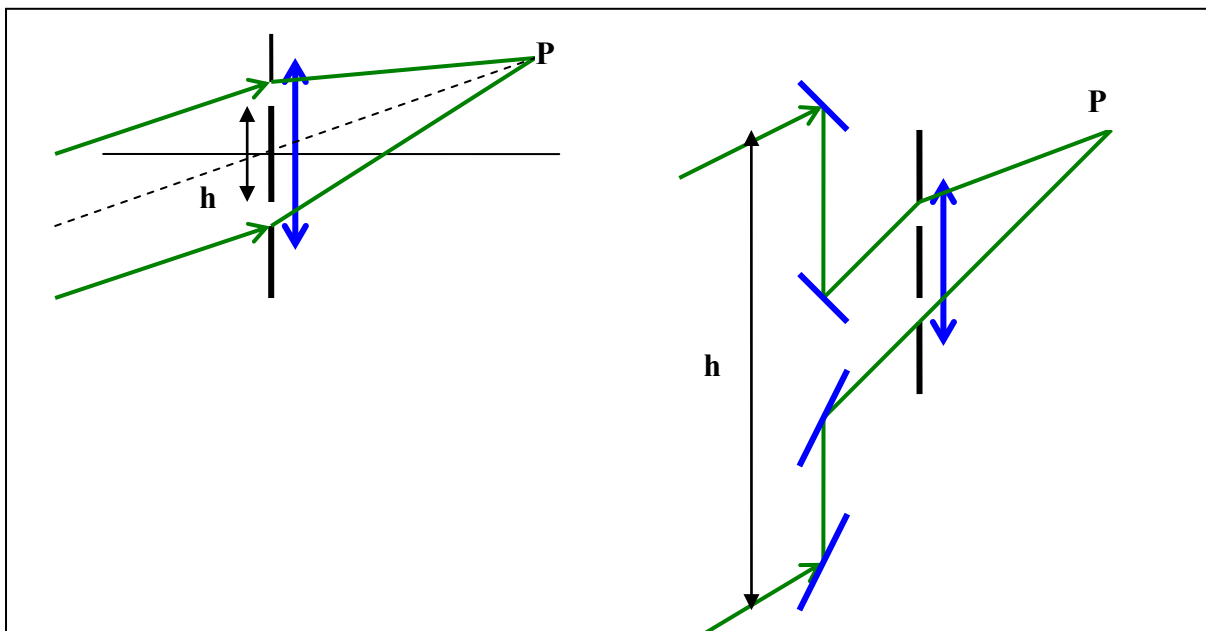
Analogicky lze postupovat pro obecnější plošné typy zdrojů. Např. pro zdroj ve tvaru disku je možné odvodit

$$\gamma_{10} = 2 \frac{J_1(kh\Delta\Theta, 2)}{(kh\Delta\Theta, 2)} \quad (10.5.11)$$

kde J_1 je Besselova funkce 1. řádu viz obr.10.5.5.



Obr.10.5.5. Obálka stupně prostorové koherence a viditelnost zdroje ve tvaru disku.



Obr.10.5.6. Dvě varianty Michelsonova hvězdářského interferometru.

Jedna ze známých aplikací je tzv. Michelsonův hvězdářský interferometr, viz obr.10.5.6. Měří se viditelnost interferenčního jevu jako funkce vzdálenosti štěrbin h , odtud se určí úhlový průměr diskového zdroje $\Delta\Theta$.

V praxi se vždy jedná o současné působení časové a prostorové koherence.