

## 2. Elektromagnetická teorie světla

- 2.1. Maxwellovy rovnice a materiálové vztahy
- 2.2. Komplexní permitivita, komplexní index lomu
- 2.3. Závislost Maxwellových rovnic
- 2.4. Maxwellovy rovnice pro rovinnou vlnu
- 2.5. Vztah mezi optickými konstantami a vlnovým vektorem  $k$
- 2.6. Vlnová rovnice
- 2.7. Hustota energie, tok energie, intenzita světla
- 2.8. Kramersovy – Kronigovy relace

## 2. Elektromagnetická teorie světla

### 2.1. Maxwellovy rovnice a materiálové vztahy

Završení vlnového modelu.

Maxwellovy rovnice dávají obecný vztah mezi vektory  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  a materiálové vztahy souvislost mezi  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{D}$ , respektive  $\mathbf{H}$  a  $\mathbf{B}$  pro konkrétní prostředí.

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  intenzita elektrického pole

$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$  elektrická indukce

$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$  intenzita magnetického pole

$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$  magnetická indukce

Diracovy symetrizované Maxwellovy rovnice  
(uvádíme pro krásný symetrický tvar)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{j}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

Kde

$\rho_e$  je elektrický náboj

$\rho_m$  je magnetický náboj

$\mathbf{j}_e$  je hustota elektrického proudu

$\mathbf{j}_m$  je hustota magnetického proudu.

Protože není potvrzena existence magnetického náboje ani magnetického proudu použijeme Maxwellovy rovnice ve tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (2.1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_e + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.8)$$

K těmto rovnicím v konkrétním případě je nutno přidat okrajové a počáteční podmínky. Závažným problémem je odezva prostředí na působení elektrického a magnetického pole. To jsou tzv. materiálové vztahy mezi  $\mathbf{D}$  a  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}_e$  a  $\mathbf{E}$ .

Konkrétní tvar materiálových vztahů je závislý na skutečném chování prostředí. Budeme předpokládat dosti obecný lineární tvar, který je dobře splněn ve slabých polích:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f_{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{H}(\mathbf{r}', t') \quad (2.1.10)$$

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r}' f_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (2.1.11)$$

Tato volba odezvoových funkcí znamená, že na odezvu má vliv nekonečné prostředí a celá historie i budoucnost prostředí. Ve skutečnosti odezva v bodě  $(\mathbf{r}, t)$  je dána pouze minulostí, tj.  $t' \in (-\infty, t)$  a oblastí prostoru omezeného podmínkou  $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2 \leq c^2 (t-t')^2$  tzv. časoprostorovým kuželem určeným konečnou rychlostí šíření signálu. Mimo dané intervaly předpokládáme nulovou odezvoovou funkci. Volba integračních mezí je především ovlivněna formálními matematickými důvody.

Tento typ odezvoových funkcí je někdy nazýván nelokální a nesynchronní.

Použijeme Fourierovu transformaci funkce více proměnných, respektive tzv. Laplaceovu transformaci (L.T.)(viz Appendix).

L.T. odezvoových funkcí:

$$\epsilon_{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega, \omega') = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \int dt \int dt' f_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{k}'\mathbf{r}' + i\omega t + i\omega' t'} \quad (2.1.12)$$

$$\mu_{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega, \omega') = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \int dt \int dt' f_{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{k}'\mathbf{r}' + i\omega t + i\omega' t'} \quad (2.1.13)$$

$$\sigma_{\omega}(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega, \omega') = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \int dt \int dt' f_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + \mathbf{k}'\mathbf{r}' + i\omega t + i\omega' t'} \quad (2.1.14)$$

Protože můžeme předpokládat, že odezvoové funkce  $f$  nezávisí na volbě prostorového a časového počátku platí:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = f(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad (2.1.15)$$

Pak lze dokázat (viz Appendix), (F značíme L.T. příslušných funkcí F):

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.1.16)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \mu_0 \mu'(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.1.17)$$

$$\tilde{\mathbf{j}}_e(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_0 \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.1.18)$$

Kde  $\epsilon_0$  je permitivita,  $\mu_0$  permeabilita,  $\sigma_0$  elektrická vodivost příslušného prostředí. Obecně jsou tyto funkce komplexní. Příslušné rovnice lze pokládat za materiálové vztahy v proměnných  $(\mathbf{k}, \omega)$ .

Výhodné je používat relativní permitivitu  $\epsilon_r$  a relativní permeabilitu  $\mu_r$ :

$$\epsilon_0 \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.1.19)$$

$$\mu_0 \mu'(\mathbf{k}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{k}, \omega)$$

Kde  $\epsilon_0$  a  $\mu_0$  je permitivita a permeabilita vakua,  $c$  je rychlost světla ve vakuu ( $c=2.99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ):

$$\epsilon_0 = \frac{10^{-7}}{4\pi} \text{ [m}^{-1} \text{ s}^2 \text{ A}^2 \text{]} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [m}^{-1} \text{ kg} \text{ s}^{-2} \text{ A}^{-2} \text{]} \quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (2.1.20)$$

L.T. vede k:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega), \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega), \quad \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \rightarrow -i\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (2.1.21)$$

Podobně pro Maxwellovy rovnice po L.T. dostaneme:

$$-\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = \rho_0 \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{M.r.1}) \quad (2.1.22)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad (\text{M.r.2}) \quad (2.1.23)$$

$$-\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{\mathbf{j}}_e(\mathbf{k}, \omega) - i\omega \epsilon_0 \epsilon'(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{M.r.3}) \quad (2.1.24)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) = -i\omega \mu_0 \mu'(\mathbf{k}, \omega) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) \quad (\text{M.r.4}) \quad (2.1.25)$$

Závislost na vektoru  $\mathbf{k}$  reprezentuje prostorovou disperzi, závislost na frekvenci  $\omega$  reprezentuje časovou disperzi. Jevy spojené s prostorovou disperzí jsou poměrně vzácné a méně výrazné a proto dále závislost na  $\mathbf{k}$  zanedbáme. Naopak jevy spojené s časovou disperzí, tj. se závislostí na frekvenci  $\omega$  jsou velmi výrazné a důležité.

## 2.2. Komplexní permitivita, komplexní index lomu

(V literatuře o elektrických vlastnostech látek se zpravidla používá permitivita  $\epsilon_0$  a elektrická vodivost  $\sigma_0$ , v optické literatuře spíše komplexní permitivita  $\epsilon_0$  nebo komplexní index lomu  $N$ .)

Z M.r.3 (2.1.24) po dosazení za  $\mathbf{j}_e$  z materiálových vztahů dostaneme:

$$-\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\omega) = \sigma_0 \omega \tilde{\mathbf{E}}(\omega) - \omega \epsilon_0 \omega \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \quad (2.2.1)$$

nebo

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}(\omega) = \omega [\epsilon_0 \omega + \sigma_0] \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \quad (2.2.2)$$

Výraz v závorce označíme jako komplexní permitivitu

$$\epsilon_\sigma(\omega) = \epsilon_0 \omega + \sigma_0 \quad (2.2.3)$$

spíše používáme relativní komplexní permitivitu

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\sigma(\omega) / \epsilon_0 = \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega) \quad (2.2.4)$$

Zavedeme komplexní index lomu  $N$

$$\epsilon_r(\omega) = N^2(\omega) = (n(\omega) + ik(\omega))^2 \quad (2.2.5)$$

Kde  $n$  je index lomu a  $k$  index absorpce a platí (dále budeme používat zjednodušený zápis):

$$\epsilon_1 = n^2 - k^2 \quad \epsilon_2 = 2nk \quad (2.2.6)$$

nebo

$$n = \left( \frac{1}{2} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \right)^{1/2} \quad k = \left( -\frac{1}{2} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \right)^{1/2} \quad (2.2.7)$$

nebo

$$\epsilon_1 = \epsilon_0^{-1} \epsilon_\omega \quad \epsilon_2 = \epsilon_0^{-1} \omega^{-1} \sigma_\omega \quad (2.2.8)$$

### 2.3 Závislost Maxwellových rovnic

Druhou Maxwellovu rovnici dostaneme úpravou M.r.3 (2.1.24) respektive (2.2.2), kterou vektorově vynásobíme  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}) = \omega \epsilon_\sigma (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) \quad (2.3.1)$$

Dosadíme ze M.r.4 (2.1.25) a po skalárním vynásobením vektorem  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{H}}) - k^2\tilde{\mathbf{H}} = -\omega^2 \epsilon_\sigma \mu_\omega \tilde{\mathbf{H}} \quad (2.3.2)$$

nebo

$$0 = -\omega^2 \epsilon_\sigma \mu_\omega (\mathbf{k}\tilde{\mathbf{H}}) \quad (2.3.3)$$

Odtud prakticky vždy platí

$$(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{H}}) = 0 \quad (2.3.4)$$

Což je M.r.2, která v tomto tvaru platí vždy.

Analogicky dostaneme upravenou první Maxwellovu rovnici z M.r.4 (2.1.25) jejím vektorovým vynásobením  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}) = -\omega \mu_\omega (\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}}) \quad (2.3.5)$$

Dosadíme z M.r.3 (2.1.24) a obdobnou úpravou, skalárním vynásobením vektorem  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{E}}) - k^2\tilde{\mathbf{E}} = -\omega^2 \epsilon_\sigma \mu_\omega \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.3.6)$$

nebo

$$0 = -\omega^2 \epsilon_\sigma \mu_\omega (\mathbf{k}\tilde{\mathbf{E}}) \quad (2.3.7)$$

Opět prakticky vždy platí ( $\epsilon_\sigma = 0$  je speciální případ plasmových kmitů zmíníme později)

$$(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{E}}) = 0 \quad (2.3.8)$$

Což je upravená M.r.1 a navíc  $\rho_0 = 0$ , což je důsledek volby odezvných vztahů.

Dále budeme používat tento tvar Maxwellových rovnic:

$$\mathbf{k}\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad (\text{M.r.1}) \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{k}\tilde{\mathbf{H}} = 0 \quad (\text{M.r.2}) \quad (2.3.10)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} = \omega \epsilon_0 \tilde{\mathbf{J}} \quad (\text{M.r.3}) \quad (2.3.11)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = -\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{H}} \quad (\text{M.r.4}) \quad (2.3.12)$$

Pozn.: obvykle oblast frekvencí  $0-10^{10}$  Hz patří do kapitoly elektřina a magnetismus, oblast frekvencí  $10^{11} - 10^{16}$  Hz do optiky, kde prakticky platí  $\mu_0 = \mu_0$ .

## 2.4. Maxwellovy rovnice pro rovinnou vlnu

Speciální, ale velmi užitečný je případ rovinných vln, např. ve tvaru:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.4.1)$$

Kde  $\mathbf{E}_0, \mathbf{k}$  jsou komplexní veličiny,  $\mathbf{k}$  vezmeme ve tvaru  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$  (obecně lze předpokládat  $i\omega = \omega' + i\omega''$ , ale to by znamenalo nereálné tlumení vlny v čase), pak:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} \quad (2.4.2)$$

$\mathbf{k}''$  určuje tlumení vlny v prostoru ( $\mathbf{k}'$  je kolmý k rovině konstantní amplitudy a  $\mathbf{k}'$  k rovině konstantní fáze).

Podobně platí:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega' t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} \quad (2.4.3)$$

Pro L.T. respektive F.T. (viz Appendix) rovinné vlny (2.4.1) platí:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega') = 2\pi \mathbf{E}_0 \delta(\omega' - \omega) \quad (2.4.4)$$

a podobně pro  $\tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{B}}$ . Pak materiálové vztahy mají tvar:

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}_0 \quad (2.4.5)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (2.4.6)$$

a po vynásobení faktorem  $e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.4.8)$$

Maxwellovy rovnice dostaneme v poměrně jednoduchém tvaru:

$$\mathbf{k}\mathbf{E}_0 = 0 \quad (\text{M.r.1}) \quad (2.4.9)$$

$$\mathbf{k}\mathbf{H}_0 = 0 \quad (\text{M.r.2}) \quad (2.4.10)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0 = \omega \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}_0 \quad (\text{M.r.3}) \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = -\omega \mu_0 \mathbf{H}_0 \quad (\text{M.r.4}) \quad (2.4.12)$$

Obdobný tvar Maxwellových rovnic platí pro vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$ .

Přímým důsledkem jsou tzv. podmínky transversality:

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0, \mathbf{k} \perp \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0 \quad (2.4.13)$$

Které v případě komplexního tvaru:

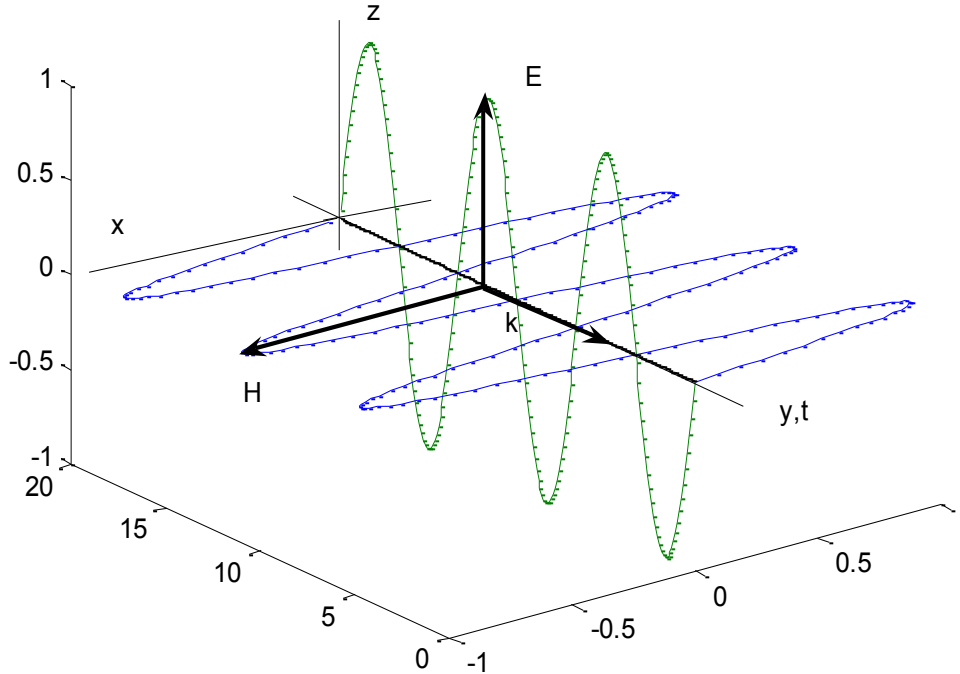
$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}'', \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}'_0 + i\mathbf{E}''_0, \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}'_0 + i\mathbf{H}''_0 \quad (2.4.14)$$

lze rozepsat:

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}'_0 - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{E}''_0 = 0, \quad \mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}''_0 - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{E}'_0 = 0 \quad (2.4.15)$$

$$\mathbf{k}'\mathbf{H}'_0 - \mathbf{k}'\mathbf{H}'_0 = 0, \quad \mathbf{k}'\mathbf{H}'_0 - \mathbf{k}'\mathbf{H}'_0 = 0 \quad (2.4.16)$$

$$\mathbf{E}'_0\mathbf{H}'_0 - \mathbf{E}'_0\mathbf{H}'_0 = 0, \quad \mathbf{E}'_0\mathbf{H}'_0 - \mathbf{E}'_0\mathbf{H}'_0 = 0 \quad (2.4.17)$$



Obr.2.1.1 Rovinná elektromagnetická vlna postupující ve směru y.

Pozn.: podmínky transversality potvrzují známou skutečnost, že elektromagnetická vlna je příčná a vektory  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{H}$  jsou na sebe kolmé. Určitou výjimkou je případ  $\varepsilon = 0$ , kdy vlnění pro intenzitu elektrického pole může být podélné. Jedná se o tzv. plazmové kmity, které budou popsány později).

## 2.5. Vztah mezi optickými konstantami a vlnovým vektorem $\mathbf{k}$

Vydeme z (M.r.4) (2.4.12), kterou násobíme vektorově  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) = -\omega^2 \mu_0 (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) \quad (2.5.1)$$

Nebo po úpravě:

$$\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_0) - k^2 \mathbf{E}_0 = -\omega^2 \mu_0 (\mathbf{k} \times \mathbf{H}_0) \quad (2.5.2)$$

Dosazením z (M.r.1) (2.4.9) a (M.r.3) (2.4.11) po úpravě dostaneme:

$$\mathbf{k}\mathbf{k} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon = \omega^2 c^{-2} \varepsilon \quad (2.5.3)$$

Svírají-li vektory  $\mathbf{k}'$  a  $\mathbf{k}$  úhel  $\Theta$ , pak

$$\mathbf{k}\mathbf{k} = k'^2 - k^2 + 2k'k \cos \Theta = \omega^2 c^{-2} (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) \quad (2.5.4)$$

Porovnáme reálné a imaginární části:

$$k' = \omega c^{-1/2} \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \cos^2 \Theta \right\}^{1/2} + \varepsilon_2^{1/2} \quad (2.5.5)$$

$$k' = \omega c^{-1/2} \left\{ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \cos^2 \Theta \right\}^{1/2} - \varepsilon_2^{1/2} \quad (2.5.6)$$

Pro častý případ homogenních vln je  $\Theta = 0$  a platí:

$$k' = \omega c^{-1/2} n \quad k' = \omega c^{-1/2} k \quad (2.5.7)$$

$$\varepsilon_1 = c^2 \omega^2 (k'^2 - k^2) \quad \varepsilon_2 = c^2 \omega^2 2k'k' \quad (2.5.8)$$

Pro neabsorbující prostředí ( $k=0$ ) a libovolné  $\Theta$  :

$$k' = \omega^{-1} n \quad k' = 0 \quad (2.5.9)$$

## 2.6. Vlnová rovnice

Někdy je obvyklé vycházet z vlnové rovnice. Pro rovinnou vlnu je možné přepsat Maxwellovy rovnice (2.1.5-8) s použitím (2.3.8), (2.4.7) a (2.4.8) pro nevodivé prostředí ( $\mathbf{j}_e=0$ ) ve tvaru:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{M.r.1}) \quad (2.6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{M.r.2}) \quad (2.6.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \dot{\mathbf{E}} \quad (\text{M.r.3}) \quad (2.6.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \dot{\mathbf{H}} \quad (\text{M.r.4}) \quad (2.6.4)$$

(M.r.3) (2.6.3) derivujeme podle času:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \ddot{\mathbf{E}} \quad (2.6.5)$$

Dosadíme ze (M.r.4) (2.6.4)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \varepsilon_r(\omega) \ddot{\mathbf{E}} \quad (2.6.6)$$

využitím (M.r.1) (2.6.1) a úpravou dostaneme vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r(\omega) \ddot{\mathbf{E}} \quad (2.6.7)$$

Nebo v obvyklém tvaru:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = v^{-2} \ddot{\mathbf{E}} \quad (2.6.8)$$

Kde  $v$  je fázová rychlost pro kterou platí

$$\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r v^2 = 1 \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (2.6.9)$$

Po dosazení rovinné vlny (2.4.1) do (2.6.7) nebo (2.6.8) dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 v^{-2} \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 c^{-2} \varepsilon_r(\omega) \mathbf{E} = 0 \quad (2.6.10)$$

což je tzv. Helmholtzova rovnice.

## 2.7. Hustota energie, tok energie, intenzita světla

Pro hustotu energie elmag. pole  $U$  v jednotkách  $\text{Jm}^{-3}$  platí:

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.7.1)$$

a pro tok energie v jednotkách  $\text{Wm}^{-2}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (2.7.2)$$

Kde  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  jsou reálné veličiny. Tyto vztahy umožňují výpočet  $U$  a  $\mathbf{S}$  v libovolném prostředí. Z praktických důvodů se dále omezíme na jejich využití pouze při detekci světla.

Vzhledem k fyzikálním vlastnostem optických detektorů můžeme měřit pouze střední časovou hodnotu toku energie, méně často střední časovou hodnotu hustoty energie elektromagnetického pole. To je dáno pomalou odezvou detektorů, ta je i u velmi rychlých detektorů asi  $10^{-9}$  s, zatím co světlo v optické oblasti má frekvenci  $10^{15}$  Hz, to je rozdíl nejméně 5 řádů. Tyto detektory reagují na tok energie nebo hustotu energie nikoliv na amplitudy elmag. pole. Intenzitou světla se většinou rozumí přímo střední hodnota toku energie nebo veličina jemu úměrná. Ve většině případů neměříme absolutní hodnotu toku energie, ale jen relativní hodnoty.

Detektor je zpravidla umístěn v neabsorbujícím prostředí ( $k=0$ ) a pak  $k' = \omega^{-1} n$  a  $k'' = 0$ .  
 Pak (M.r.4) (2.4.12) pro absolutní velikosti vektorů má tvar

$$k'E_0 = \omega\mu_0 H_0 \quad (2.7.3)$$

Dostali jsme jednoduchý vztah mezi velikostmi amplitud.

Bez újmy na obecnosti zvolíme směr šíření vlny ve směru y, elektrické pole ve směru z a magnetické pole ve směru x. Pak:

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - k'y) \quad H_x = H_0 \cos(\omega t - k'y) \quad (2.7.4)$$

a pro tok energie:

$$S_y = E_z H_x = c\varepsilon_0 n E_0^2 \cos^2(\omega t - k'y) \quad (2.7.5)$$

Dále budeme používat místo časové střední hodnoty toku energie pouze pojem intenzita světla I:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{T} \int_0^T E H dt \quad (2.7.6)$$

Případně

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dt \quad (2.7.7)$$

Kde T je integrační doba detektoru, v limitním případě odezva detektoru ( $T \gg \omega^{-1}$ ) a  $\mathbf{s}$  jednotkový vektor ve směru  $\mathbf{S}$ . Po integraci dostaneme:

$$I = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 n E_0^2 \approx n E_0^2 \quad (2.7.8)$$

V případě rovinné vlny v praxi využíváme rovnosti:

$$E_0^2 = EE^* \quad (2.7.9)$$

Pozn: v případě představy částicového modelu světla použijeme vztahy:

$$U = V^{-1} n_v h\nu \quad U = V^{-1} \int f(\nu) h\nu d\nu \quad (2.7.10)$$

$$\mathbf{S} = \frac{n_v h\nu}{At} \mathbf{s} = \frac{n_v \nu \mathbf{p}}{At} \quad \mathbf{S} = \frac{c}{At} \int f(\nu) \mathbf{p} d\nu \quad (2.7.11)$$

Kde V je objem,  $n_v$  počet fotonů,  $f(\nu)$  spektrální funkce, A plocha,  $\mathbf{p}$  impuls pro který platí:

$$\mathbf{p} = h\nu \nu^{-1} \mathbf{s} \quad (2.7.12)$$

## 2.8. Kramersovy – Kronigovy relace

V případě zanedbání prostorové disperse, nezávislosti volby časového počátku odezvy a především respektováním skutečnosti, že odezva souvisí pouze s přítomností a minulostí lze napsat odezvousou funkci pro elektrické pole ve tvaru:

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^t f_\varepsilon(t-t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (2.8.1)$$

Po substituci  $(t-t') = \tau$  dostaneme

$$\mathbf{D}(t) = \int_0^\infty f_\varepsilon(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) d\tau \quad (2.8.2)$$

Pro permitivitu platí



$$\varepsilon_{\omega}(\omega) = \int_0^{\infty} f_{\varepsilon}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.8.3)$$

Protože pro vysoké frekvence se permitivita blíží  $\varepsilon_{\omega}$  je výhodnější uvažovat funkci  $\varepsilon_{\omega} - 1$  respektive funkci  $\varepsilon_r - 1$ . Pak pro  $\omega = \omega' + i\omega''$

$$\varepsilon_r(\omega) - 1 = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{i\omega'\tau} e^{-\omega''\tau} d\tau \quad (2.8.4)$$

Odezvová funkce  $f$  musí být z fyzikálních důvodů vždy reálná a ohraničená, navíc se blíží nule pro dávnou minulost, tj. pro  $\tau \rightarrow \infty$ , člen  $e^{i\omega'\tau}$  je ohraničený vždy, člen  $e^{-\omega''\tau}$  je ohraničený pro  $\omega'' > 0$ , protože  $\tau \geq 0$ , můžeme tedy uvažovat pouze horní část komplexní roviny. Tím jsou splněny předpoklady (viz Appendix) kladené na funkci  $\varepsilon_r(\omega) - 1$  pro integrální závislost mezi její reálnou a imaginární částí ( $\varepsilon'(\omega) - 1$ ,  $\varepsilon''(\omega)$ ), a podobně pro nejčastěji užívané funkce:

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon_1(x) - 1}{x^2 - \omega^2} dx \quad (2.8.5)$$

$$\varepsilon_1(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \varepsilon_2(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (2.8.6)$$

kde  $P \int$  se bere ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty (viz Appendix). Vynikající vlastností těchto tzv. Kramersových – Kronigových (KK) relací je skutečnost, že znalost jedné optické funkce v celém intervalu frekvencí dovolí určit druhou pro každou hodnotu frekvence. Obdobně platí:

$$k(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{n(x) - 1}{x^2 - \omega^2} dx \quad (2.8.7)$$

$$n(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{xk(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (2.8.9)$$

Zvláště z praktického hlediska je užitečná možnost výpočtu optických konstant pro libovolnou frekvenci ze znalosti kolmé odrazivosti v celém intervalu frekvencí. Pro kolmou odrazivost (poměr odražené a dopadající intenzity elektrického pole) lze napsat:

$$r_n(\omega) = r_{n0} e^{i\tau(\omega)} \quad (2.8.10)$$

$$\ln[r_n(\omega)] = \ln[r_{n0}(\omega)] + i\tau(\omega) \quad (2.8.11)$$

a pro kolmou odraženou intenzitu:

$$R_n(\omega) = r_n(\omega) r_n^*(\omega) = r_{n0}^2(\omega) \quad (2.8.12)$$

Předpokládáme, že funkce  $\ln[r_n(\omega)]$  je analytická a splňuje požadované vlastnosti, pak KK vztahy mají tvar:

$$\ln[r_{n0}(\omega)] = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{x \tau(x)}{x^2 - \omega^2} dx \quad (2.8.13)$$

$$\tau(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln[r_{n0}(x)]}{x^2 - \omega^2} dx = \frac{\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\ln[R_n(\omega)]}{x^2 - \omega^2} dx \quad (2.8.14)$$

Z experimentálně zjištěné kolmé odražené intenzity určíme fázi  $\tau(\omega)$ , a ze vztahu

$$r_{n_0}(\omega) e^{i\tau(\omega)} = \frac{n(\omega) - 1 + k(\omega)}{n(\omega) + 1 + k(\omega)} \quad (2.8.15)$$

vypočítáme optické konstanty pro libovolnou frekvenci.

V praxi lze naměřit kolmou odrazivost vždy pouze v konečném intervalu  $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ , ve zbývajících částech spektra je nutné zvolit vhodnou, fyzikálně zdůvodněnou extrapolaci a spokojit se s určitou chybou v určení optických konstant. Je dobré si uvědomit, že průběh spekter obou optických konstant je vzájemně svázán integrálními KK vztahy a tak např. je správné tvrzení, že disperze je úzce spojena s absorpcí (i když v jiné části spektra), že nárůst absorpce je v blízkosti maxima disperze nebo, že disperze klesá v blízkosti maxima absorpce.

Př.: Si, Ge, GaAs atd.