

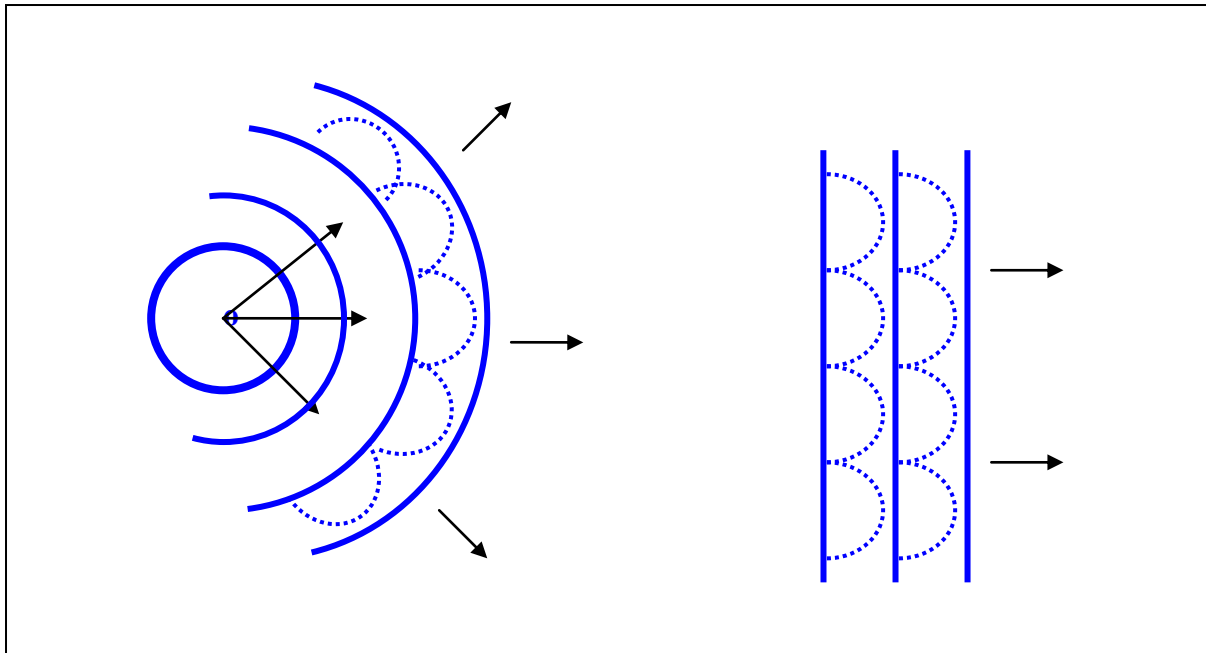
## **9. Difrakce světla**

- 9.1. Skládání kulových vln**
- 9.2. Difrakční integrál**
- 9.3. Výpočet difrakčních integrálů**
- 9.4. Fraunhoferova difrakce**
- 9.5. Pravoúhlý otvor**
- 9.6. Kruhový otvor**
- 9.7. Rozlišovací schopnost optických přístrojů**
- 9.8. Fraunhoferova difrakce na optických mřížkách**
- 9.9. Rozlišovací schopnost mřížky**
- 9.10. Fresnelova difrakce**
- 9.11. Fresnelova difrakce na pravoúhlém otvoru**
- 9.12. Štěrbina a drát**
- 9.13. Hrana**
- 9.14. Fresnelova difrakce na stínítku s kruhovou symetrií**
- 9.15. Kruhový otvor**
- 9.16. Kruhový disk**
- 9.17. Fresnelovy zóny**

## **9. Difrakce světla**

Difrakcí světla se rozumí popis šíření elektromagnetických vln přes obecné překážky. Přesné řešení dávají Maxwellovy rovnice, případně vlnové rovnice, spolu s okrajovými podmínkami (viz Apendix). Zpravidla je toto řešení velmi náročné a proto se využívají aproximační postupy nebo numerická řešení. V obecném případě je nutné respektovat vektorový charakter vln, v řadě případů však vystačíme pouze se skalární teorií.

Východiskem pro velmi úspěšné, ale přibližné postupy je Huygensův princip. Ten říká, že každý bod vlnoplochy je zdrojem kulové vlny a následující vlnoplocha ve směru šíření světla je jejich součtem, viz obr. 9.0.1. Tento postup se velmi osvědčil, ale má svá úskalí. Dále budeme vycházet z tohoto principu, budeme skládat harmonické, monochromatické, vzájemně koherentní vlny a omezíme se na skalární teorii.



Obr.9.0.1. Huygensův princip – mechanismus vzniku kulové a rovinné vlnoplochy.

### 9.1. Skládání kulových vln

Předpokládáme bodový zdroj a stínítko se dvěma malými otvory (viz obr.9.1.1.), protože vlny jsou monochromatické se stejnou frekvencí, vynecháváme časový člen  $\exp(i\omega t + \phi)$ , který v závěru řešení vždy můžeme přidat. Pak výsledné pole v bodě stínítka P je

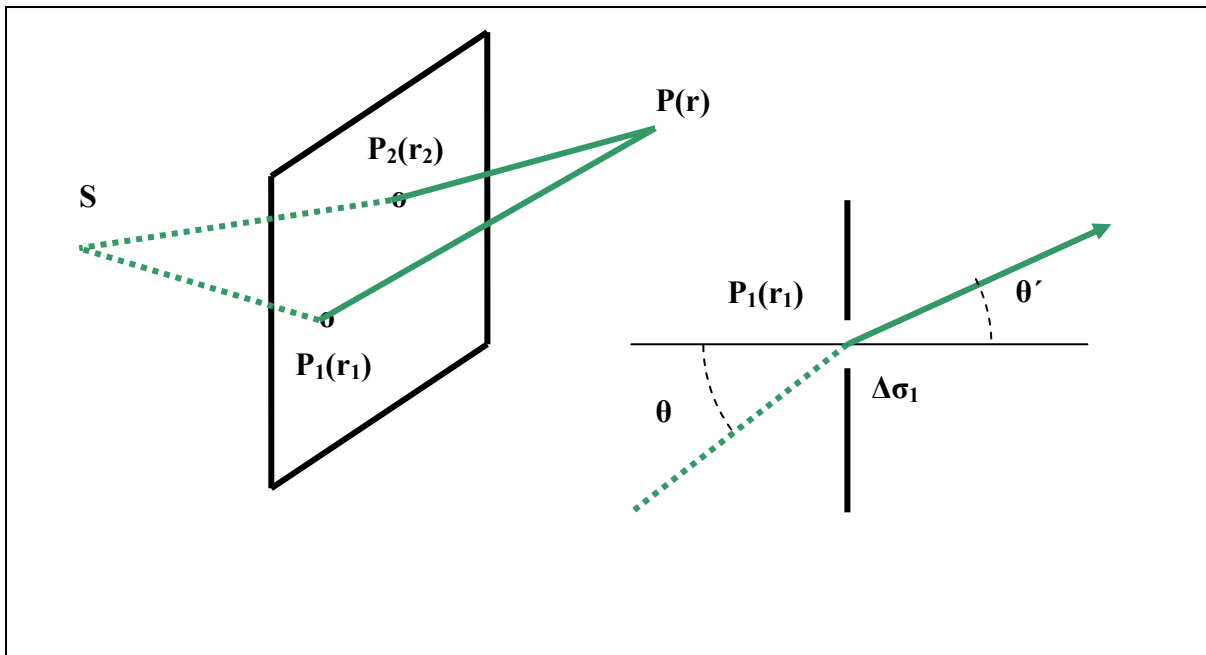
$$E(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{A_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \quad (9.1.1)$$

Velikost amplitudy  $A$  v místě otvoru závisí na intenzitě elektrického pole dopadající vlny  $E_{\text{dop}}$ , na ploše otvoru  $\Delta$  a na tzv. faktoru sklonu  $C$ , který souvisí s úhlem, který svírá sledovaný paprsek s osou, viz obr.9.1.1. Pak

$$A_1 = C_1 E_{\text{dop}} \Delta_1 \quad (9.1.2)$$

Pro  $N$  otvorů dostaneme

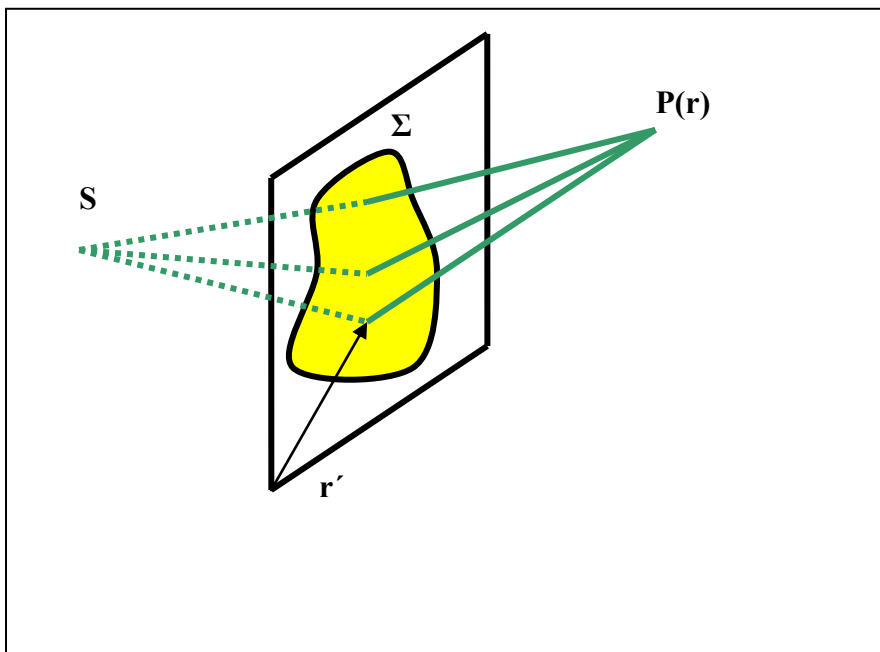
$$E(\mathbf{r}) = \sum_i^N \frac{C_i E_{\text{dop}} \Delta_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (9.1.3)$$



Obr. 9.1.1. Skládání dvou kulových vln a řez stínítkem v okolí bodu  $P_1$ .

## 9.2. Difrakční integrál

Od sečítání přes jednotlivé otvory přejdeme ke spojitému relativně velkému otvoru  $\Sigma$  v plošném stínítku – viz obr.9.2.1. (dále polohový vektor označujeme jako skalár)



Obr 9.2.1. Sečítání příspěvků jednotlivých kulových vln od elementů otvoru  $\Sigma$  (vyznačeno žlutě).

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} E_{\text{dop}}(r') \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} d\sigma' \quad (9.2.1)$$

Kde faktor sklonu

$$C = \frac{i}{\lambda} \quad (9.2.2)$$

je nutné zavést v tomto tvaru a důvodem je srovnání s přesným řešením. Tento integrál se nazývá Fresnelův a je dobrou aproximací pro malé úhly  $\theta, \theta'$ .

Obecnější je tzv. Kirchhoffův integrál

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} E_{\text{dop}}(r') \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} \frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2} d\sigma' \quad (9.2.3)$$

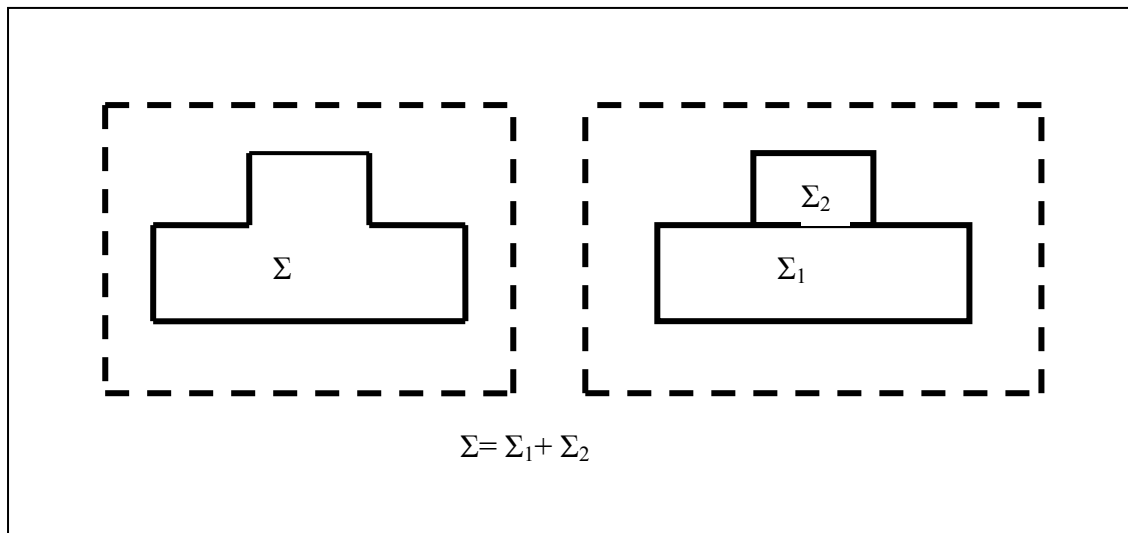
Který je užitečný i pro větší úhly  $\theta, \theta'$ , pro faktor sklonu byl odvozen výraz (viz Appendix)

$$C = \frac{i}{\lambda} \frac{\cos \theta + \cos \theta'}{2} \quad (9.2.4)$$

Použití obou integrálů dává překvapivě dobré výsledky především pro velké vzdálenosti mezi překážkou a stínítkem. Určité problémy však tato aproximace samozřejmě má, např. není jednoduché při větších otvorech v nerovinných překážkách navrhnout správnou plochu  $\Sigma$ . Případná výplň otvorů se dá nahradit transmisí funkcí  $t(r')$ , pak např. pro Fresnelův integrál dostaneme

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} t(r') E_{\text{dop}}(r') \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} d\sigma' \quad (9.2.5)$$

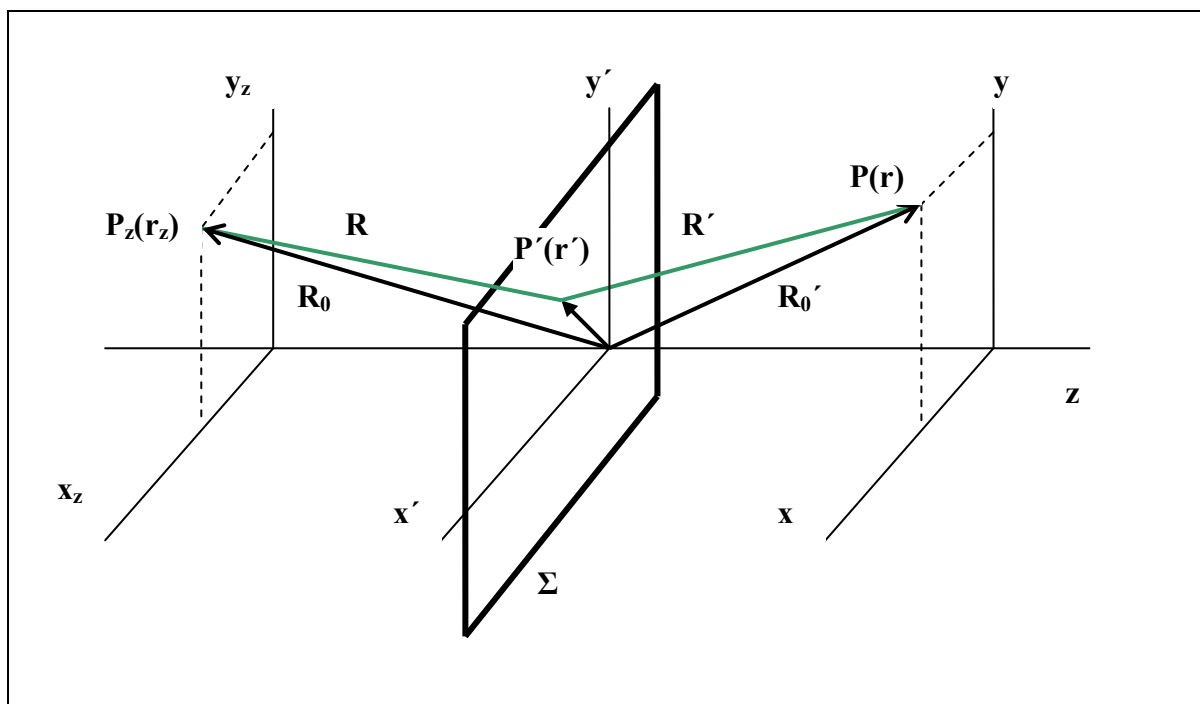
V řadě případů se dá využít, díky platnosti principu superpozice, možnost sečítání integrálů, respektive konstrukce složitějších stínítek z jednodušších obrazců, viz obr. 9.2.2.



Obr. 9.2.2. Zjednodušení výpočtu difrakčního integrálu.

### 9.3. Výpočet difrakčních integrálů

Přes velmi rychlé a dokonalé výpočetní možnosti je velmi užitečné a fyzikálně zajímavé se věnovat konkrétnímu výpočtu difrakčních integrálů. My se spokojíme s Fresnelovou formulací difrakce. Úprava (9.2.1) je relativně snadná, využíváme značení v obr. 9.3.1.



Obr. 9.3.1. Schéma difrakce.

$$E(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} E_0 \iint_{\Sigma} \frac{e^{-i\kappa(R+R')}}{RR'} dx' dy' \quad (9.3.1)$$

kde  $E_0$  je amplituda v bodě  $P_z$  a

$$E_{\text{dop}} = E_0 \frac{e^{ikR}}{R} \quad (9.3.2)$$

Podle obr. 9.3.1.

$$\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{r}_z(x_z, y_z, z_z) \equiv (R_0 \alpha, R_0 \beta, R_0 \gamma), \quad \mathbf{r}'(x', y', 0) \quad \mathbf{R}' \equiv \mathbf{r}(x, y, z) \equiv (R'_0 \alpha', R'_0 \beta', R'_0 \gamma') \quad (9.3.3)$$

Kde  $\alpha, \beta, \gamma$  a  $\alpha', \beta', \gamma'$  jsou směrové kosiny  $\mathbf{R}_0$  a  $\mathbf{R}'_0$ . Pak

$$R^2 = R_0^2 + 2R_0(\alpha \alpha' + \beta \beta') + r'^2 \quad (9.3.4)$$

A pro  $R$  přibližně

$$R \cong R_0 \left[ 1 + \frac{\alpha \alpha' + \beta \beta'}{R_0} + \frac{x'^2 + y'^2}{2R_0^2} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha \alpha' + \beta \beta')^2}{R_0^2} - \dots \right] \quad (9.3.5)$$

Nebo

$$R \cong (R_0 + \alpha \alpha' + \beta \beta') + \frac{1}{2R_0} \left[ x'^2 + y'^2 - (\alpha \alpha' + \beta \beta')^2 - \dots \right] \quad (9.3.6)$$

Podobně pro  $R'$

$$R' \cong (R'_0 - \alpha' \alpha' - \beta' \beta') + \frac{1}{2R'_0} \left[ x'^2 + y'^2 - (\alpha' \alpha' + \beta' \beta')^2 - \dots \right] \quad (9.3.7)$$

Členy s vyšším řádem než 2 zanedbáme, rovněž se spokojíme s aproximací ve jmenovateli (9.3.1)

$$RR' \cong R_0 R'_0 \quad (9.3.8)$$

## 9.4. Fraunhoferova difrakce

V tomto přiblížení se berou v úvahu pouze lineární členy

$$R \cong (R_0 + x' + z') \quad R' \cong (R_0 - x'x' - z'y') \quad (9.4.1)$$

Zanedbali jsme tedy členy 2.řádu a vyšší. Tzn. např. pro  $x'$

$$k \frac{x'^2}{2R_0} = \frac{\pi x'^2}{\lambda z_0} \rightarrow \quad (9.4.2)$$

nebo

$$x' \ll \sqrt{\lambda z_0} \quad y' \ll \sqrt{\lambda z_0} \quad (9.4.3)$$

Tedy Fraunhoferovo přiblížení je vhodné pro malé otvory a velké vzdálenosti, v praxi to znamená téměř rovnoběžné svazky světla.

Dosazením do (9.3.1) dostaneme

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} E_0 \frac{e^{-iR_0}}{R_0} \frac{e^{-iR'}}{R_0} \iint_{\Sigma} \exp - k((\alpha - x')x' + (\beta - z')y') \overline{dx' dy'} \quad (9.4.4)$$

nebo

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} E_0' \frac{e^{-iR'}}{R_0} \iint_{\Sigma} \exp - 2\pi i (ux' + vy') \overline{dx' dy'} \quad (9.4.5)$$

kde

$$u = \frac{\alpha - x'}{\lambda} \quad v = \frac{\beta - z'}{\lambda} \quad E_0' = E_0 \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \quad (9.4.6)$$

Poznámka:

Fraunhoferův integrál velmi připomíná tvar Fourierovy transformace. Zavedeme substituci

$$u' = 2\pi u \quad v' = 2\pi v \quad (9.4.7)$$

otvor může být vyplněn transmisní funkcí  $t(x', y')$  a pro pevný bod  $P_z$  lze jednoduše souřadnice  $r(x, y)$  nahradit lineárními vztahy s využitím (9.4.6) a (9.3.3) mezi  $x, y$  a  $u', v'$ .

Pak (9.4.5) má tvar

$$E(u', v') \approx \iint_{\Sigma} t(x', y') \exp - (u'x' + v'y') \overline{dx' dy'} \quad (9.4.8)$$

Což je tvar shodný s Fourierovou transformací.

Poznámka: Babinetův princip

Předpokládáme Fraunhoferovu difrakci na dvou komplementárních objektech.

Komplementárními objekty se rozumí pozitiv a negativ téhož objektu. Podle Babinetova principu jsou oba difrakční jevy stejné až na malou centrální oblast. Protože uvažujeme Fraunhoferovu difrakci je nutné uvažovat o relativně malých objektech.

Pro komplementární objekty popsané funkcemi  $t_1(x', y')$  a  $t_2(x', y')$  předpokládejme platnost vztahu

$$a_1 t_1(x', y') + a_2 t_2(x', y') = \text{konst} \quad (9.4.9)$$

kde  $a_1, a_2$  jsou konstanty. Po Fourierově transformaci dostaneme

$$a_1 E_1(u', v') + a_2 E_2(u', v') \approx \delta(u', v') \quad (9.4.10)$$

pro  $u' \neq 0$  a  $v' \neq 0$  platí

$$E_1(u', v') = - \frac{a_2}{a_1} E_2(u', v') \quad (9.4.11)$$

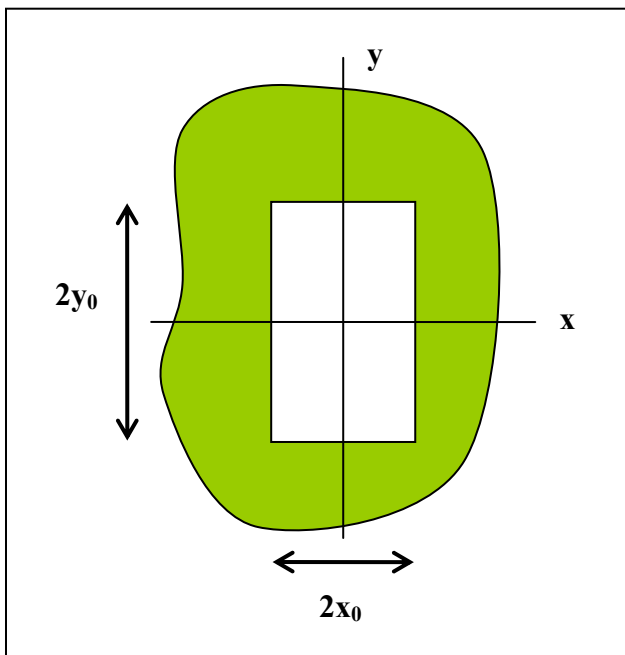
nebo

$$|E_1(u', v')|^2 = \left| \frac{a_2}{a_1} \right|^2 |E_2(u', v')|^2 \quad (9.4.12)$$

Tedy rozložení intenzit světla při difrakci na komplementárních objektech na stínítku je prakticky shodné.

### 9.5. Pravoúhlý otvor

Integrál (9.4.5) dovoluje poměrně rychle řešit Fraunhoferovu difrakci na obdélníkovém otvoru, viz obr. 9.5.1.



Obr. 9.5.1. Pravoúhlý otvor ve stínítku.

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} \int_{-x_0}^{x_0} \exp[-i2\pi u x'] dx' \int_{-y_0}^{y_0} \exp[-i2\pi v y'] dy' \quad (9.5.1)$$

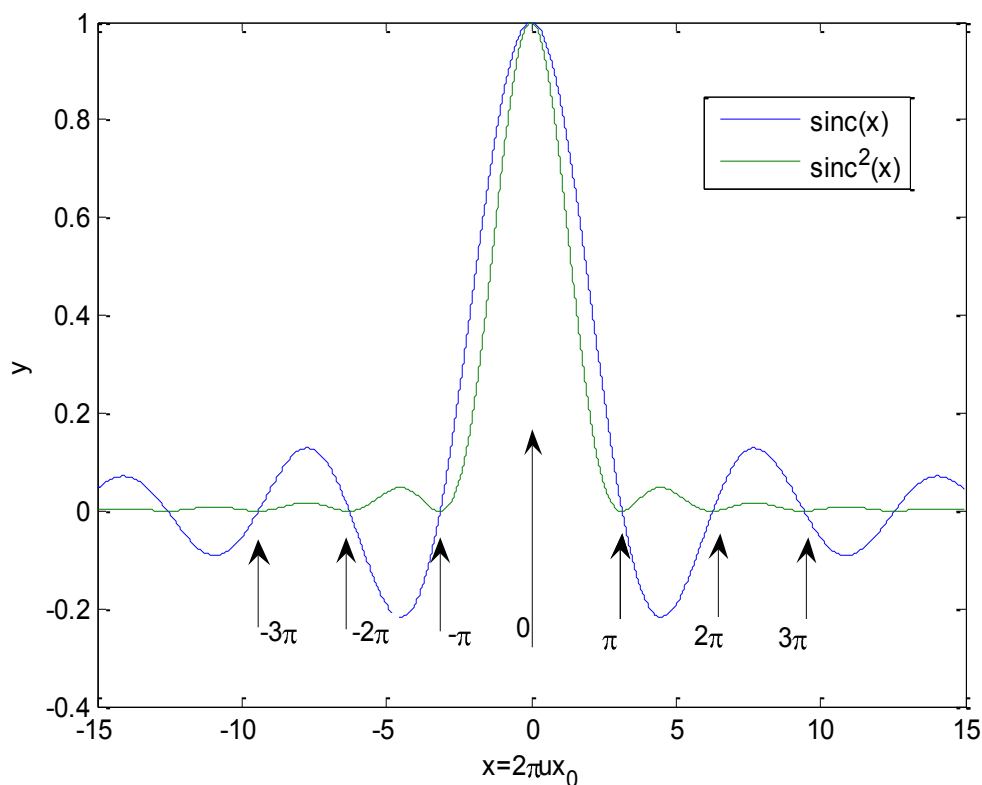
Výsledek dostaneme snadno

$$E(x, y) = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} 4x_0 y_0 \sin c \left[ \frac{\pi x_0}{\lambda R'_0} \right] \sin c \left[ \frac{\pi y_0}{\lambda R'_0} \right] \quad (9.5.2)$$

A pro intenzitu světla

$$I = EE^* = E_0'^2 \frac{16x_0^2 y_0^2}{\lambda^2 R_0'^2} \sin^2 c \left[ \frac{\pi x_0}{\lambda R_0'} \right] \sin^2 c \left[ \frac{\pi y_0}{\lambda R_0'} \right] \quad (9.5.3)$$

Grafické znázornění je na obr. 9.5.2.



Obr. 9.5.2. Průběh funkce sinc (intenzita elektrického pole) a  $\text{sinc}^2$  (intenzita světla) pro Fraunhoferovu difrakci na obdélníkovém otvoru.

Podmínka pro hlavní maximum na ose x je

$$2\pi ux_0 = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow \alpha = \alpha' \quad (9.5.4)$$

Podmínky pro minima intenzity světla na ose x

$$2\pi ux_0 = m\pi \rightarrow ux_0 = m/2 \rightarrow (\alpha - \alpha')x_0 = m\lambda/2 \quad (9.5.5)$$

Podobně pro osu y

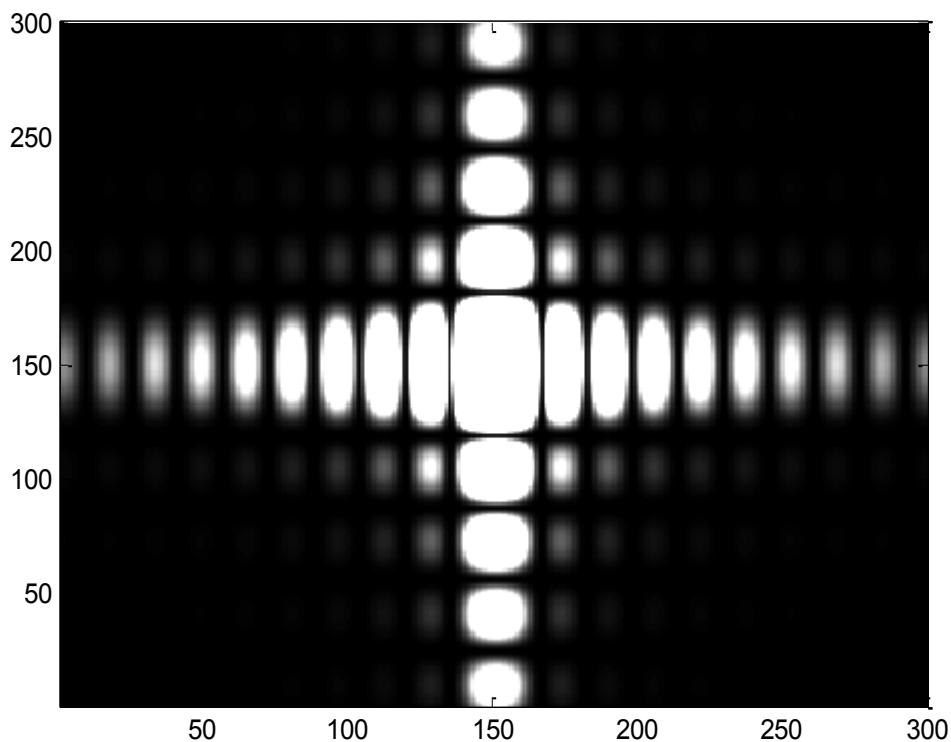
$$2\pi vy_0 = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow \beta = \beta' \quad (9.5.4)$$

a pro podmínky minim intenzity světla na ose y

$$2\pi vy_0 = m\pi \rightarrow vy_0 = m/2 \rightarrow (\beta - \beta')x_0 = m\lambda/2 \quad (9.5.6)$$

Je vhodné poznamenat, že ve směru x (y) je úhlová šířka hlavního maxima  $\Delta u$  ( $\Delta v$ ), respektive  $\Delta\alpha$  ( $\Delta\beta$ ), nepřímo úměrná rozměru stínítka  $x_0$  ( $y_0$ ).

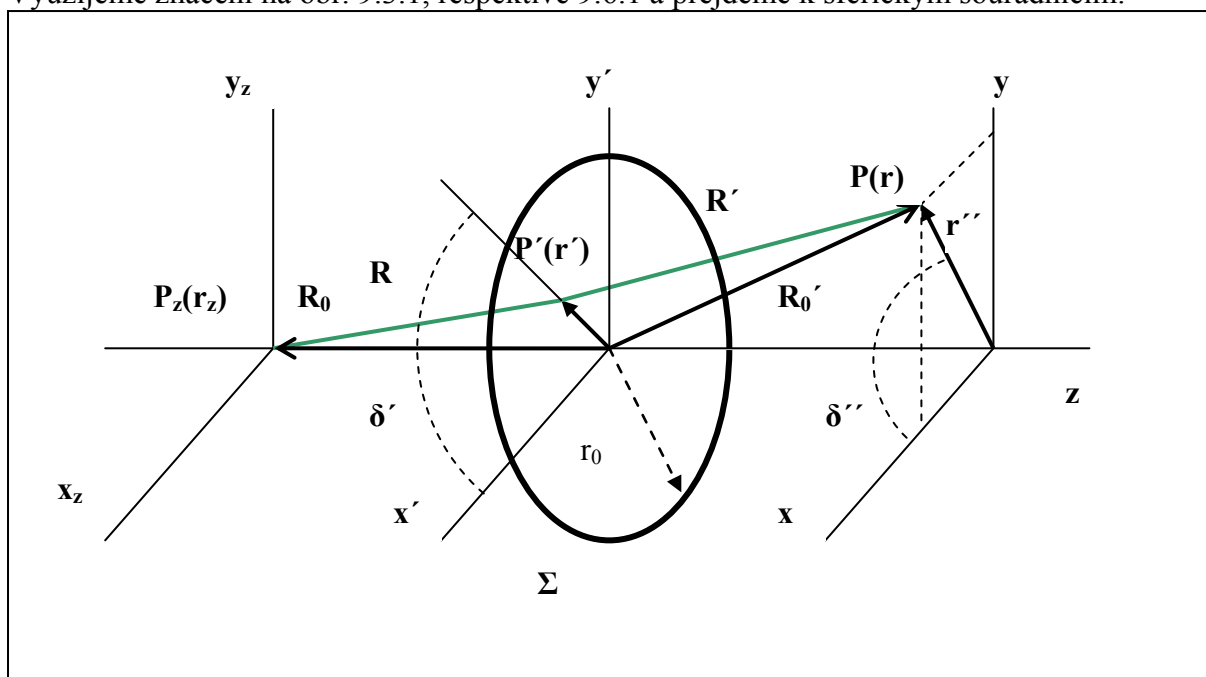




Obr. 9.5.3. Fraunhoferova difrakce na čtvercovém otvoru, poloha na stínítku v souřadnicích  $x$  a  $y$  je v relativních jednotkách. Intenzita světla je uměle zdůrazněna tak, že od hodnoty 0.002 je znázorněna jako bílá barva.

### 9.6. Kruhový otvor

Využijeme značení na obr. 9.3.1, respektive 9.6.1 a přejdeme k sférickým souřadnicím.



Obr.9.6.1. Schéma difrakce na kruhovém otvoru o poloměru  $r_0$ .

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že zdroj je na ose ( $\alpha = \beta = 0$ ). Pro souřadnice platí

$$(x, y) \equiv (r' \cos \delta', r' \sin \delta') \quad (x', y') \equiv (r' \cos \delta', r' \sin \delta') \quad (9.6.1)$$

Pak integrál (9.4.4) přejde na tvar

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} \iint_{\Sigma} \exp [ik(\alpha'x' + \beta'y')] dx' dy' \quad (9.6.2)$$

Protože

$$(\alpha'x' + \beta'y') = \frac{1}{R'_0} (xx' + yy') = \frac{1}{R'_0} r' r' \cos(\delta' - \delta) = r' \sin \Theta' \cos \delta \quad dx' dy' = r' dr' d\delta$$

$$(\delta' - \delta) = \delta \quad \frac{r'}{R'_0} = \sin \Theta' \quad (9.6.3)$$

Dostaneme po dosazení

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} \int_0^{r_0} dr' \int_0^{2\pi} d\delta r' \exp [ikr' \sin \Theta' \cos \delta] \quad (9.6.4)$$

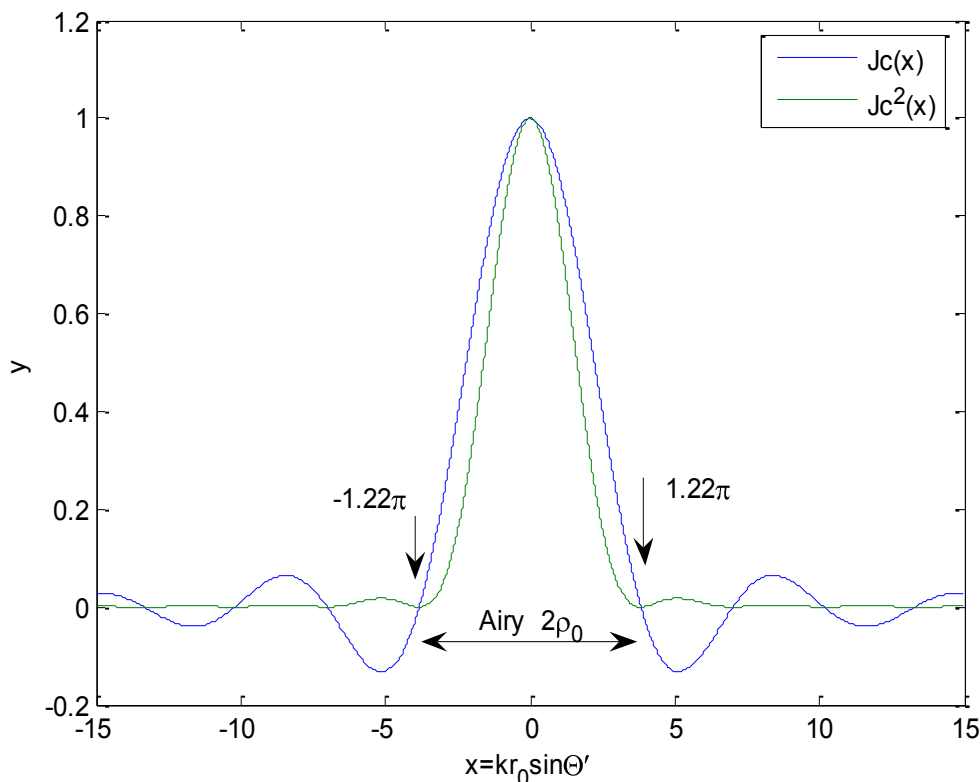
A po integraci dostaneme

$$E(r) = E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} ikr_0^2 \frac{J_1(kr_0 \sin \Theta')}{kr_0 \sin \Theta'} \quad (9.6.5)$$

Kde  $J_1$  je Besselova funkce 1. řádu. Pro intenzitu světla platí

$$I(r) = E(r)E^*(r) = E'_0{}^2 \frac{k^2 r_0^4}{R'_0{}^2} J_1^2(kr_0 \sin \Theta') \quad (9.6.6)$$

Kde  $J_1^2$  je analogie k sinc. Průběh funkcí  $J_1$  a  $J_1^2$  je na obr. 9.6.2.



Obr. 9.6.2. Průběh Besselovy funkce prvního řádu, respektive funkce  $J_1$  a  $J_1^2$  v relativních jednotkách.

Podmínka pro maximum intenzity světla je

$$kr_0 \sin \theta' = 0 \rightarrow \theta' = 0 \quad (9.6.7)$$

A pro první minimum

$$kr_0 \sin \theta' = 1.22 \pi \quad (9.6.8)$$

Toto je velmi důležitá podmínka pro poloměr  $\rho_0$  tzv. Airyho skvrny. Protože platí

$$\rho_0 = R'_0 \sin \theta'_0 \quad (9.6.9)$$

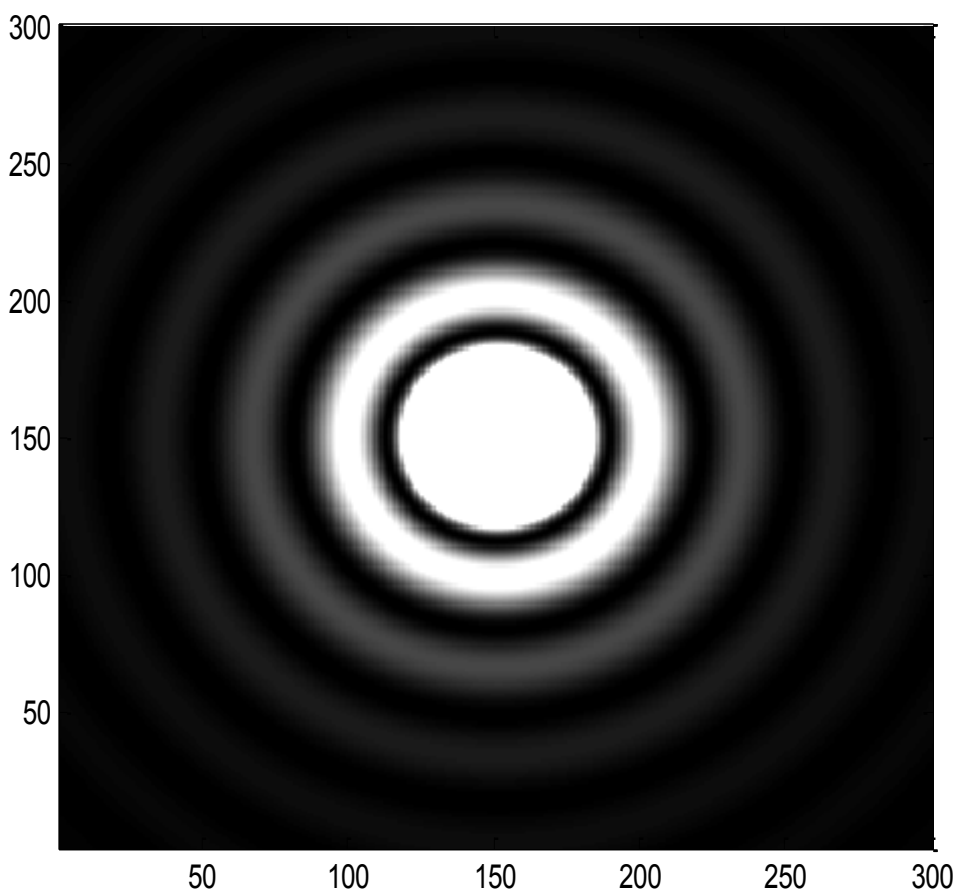
pak pro tento poloměr dostaneme

$$\rho_0 = \frac{0.61 \lambda z'_0}{r_0} \quad (9.6.10)$$

Respektive pro úhlový poloměr

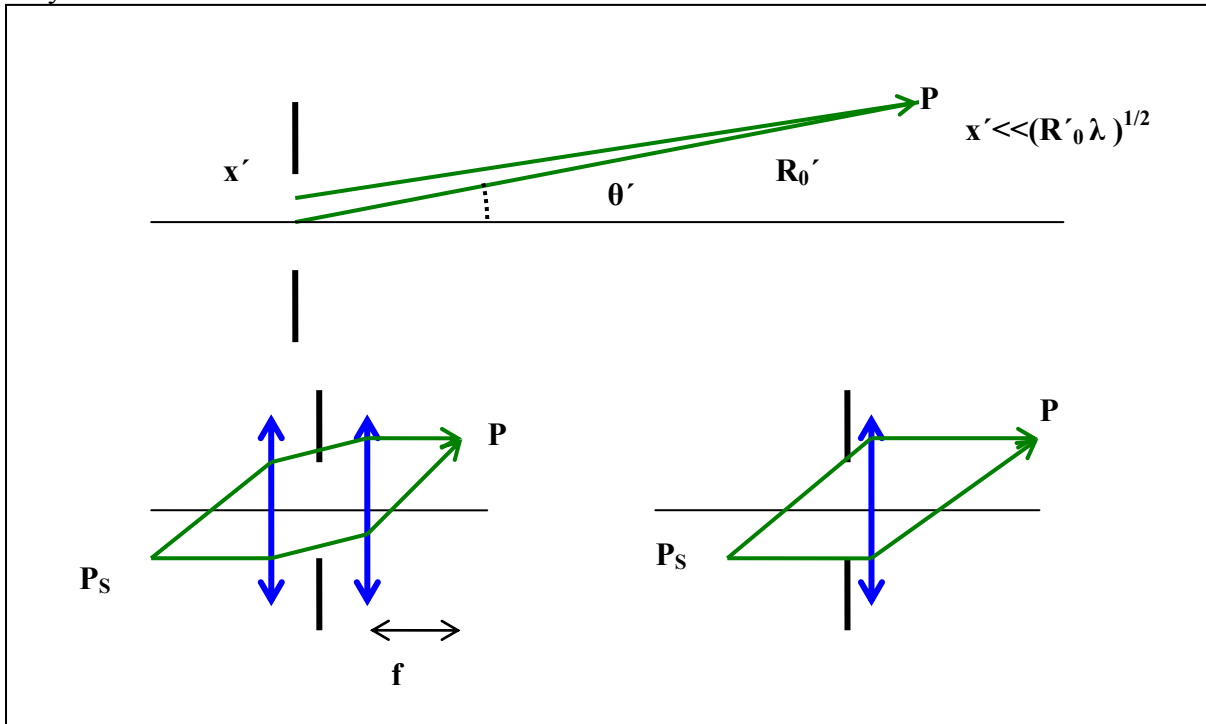
$$\sin \theta'_0 \cong \theta'_0 \cong \frac{0.61 \lambda}{r_0} \quad (9.6.11)$$

Tyto vztahy najdou významné uplatnění při hledání rozlišovací schopnosti optických přístrojů. Stojí za poznámku, že průměr Airyho skvrny je nepřímo úměrný průměru stínítka.



*Obr. 9.6.3. Fraunhoferova difrakce na kruhovém otvoru. Úprava intenzity světla je stejná jako na obr. 9.5.3. s tím rozdílem, že úroveň konstantní intenzity je 0.015.*

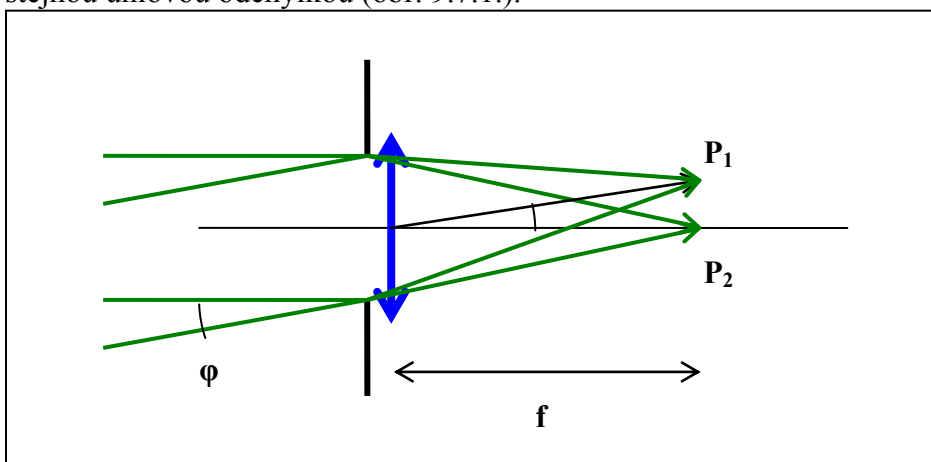
Pozn.: Abychom splnili předpoklad Fraunhoferovy difrakce musíme experimentálně používat téměř rovnoběžné svazky světla, což odpovídá velkým vzdálenostem, viz obr.9.6.4. Takový rovnoběžný svazek dostaneme umístěním zdroje světla do ohniska čočky a naopak obraz zdroje dostaneme v ohnisku další čočky. Obě čočky můžeme nahradit jednou. Tedy obrazem bodu zobrazeného čočkou je Fraunhoferova difrakce. Takový bod se v praxi zobrazí jako Airyho skvrna.



Obr. 9.6.4. Fraunhoferova difrakce, možnost využití čoček, bodový zdroj  $P_S$  se zobrazí jako Airyho skvrna v bodě  $P$ .

### 9.7. Rozlišovací schopnost optických přístrojů

V praxi přichází v úvahu jen přístroje s kruhovou aperturou. Obrazem nekonečně vzdáleného bodu v ohnisku čočky, ( viz obr.9.6.2, 9.6.3. a 9.6.4) je Fraunhoferova difrakce a její podstatná část je Airyho skvrna. Dva svazky světla svírající úhel  $\varphi$  zobrazí dva body se stejnou úhlovou odchylkou (obr. 9.7.1.).

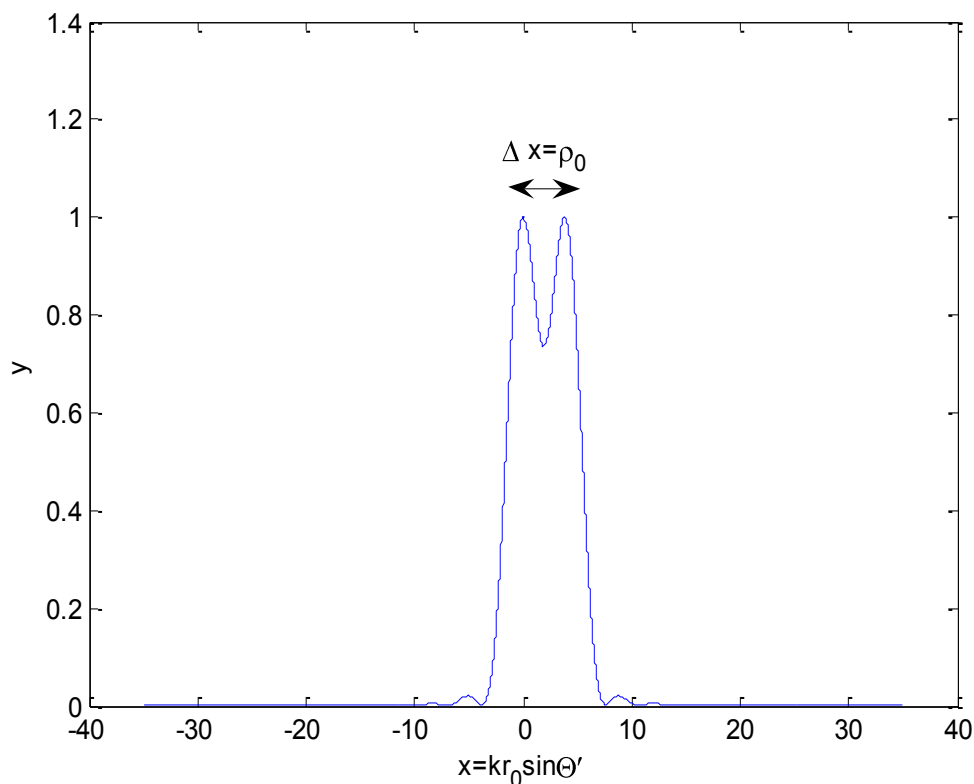


Obr. 9.7.1. Zobrazení dvou bodových zdrojů světla pomocí čočky s ohniskovou vzdáleností  $f$  – Fraunhoferova difrakce.

Dohodou stanovíme jako spodní mez rozlišení podmínku, když vzdálenost difrakčních maxim  $\Delta x$  (obr. 9.7.2) je rovna poloměru Airyho skvrny, pak ve shodě s (9.6.11)

$$\varphi_{\min} \cong \theta'_v \cong \frac{0.61 \lambda}{r_0} = \frac{1.22 \lambda}{D} \quad (9.7.1)$$

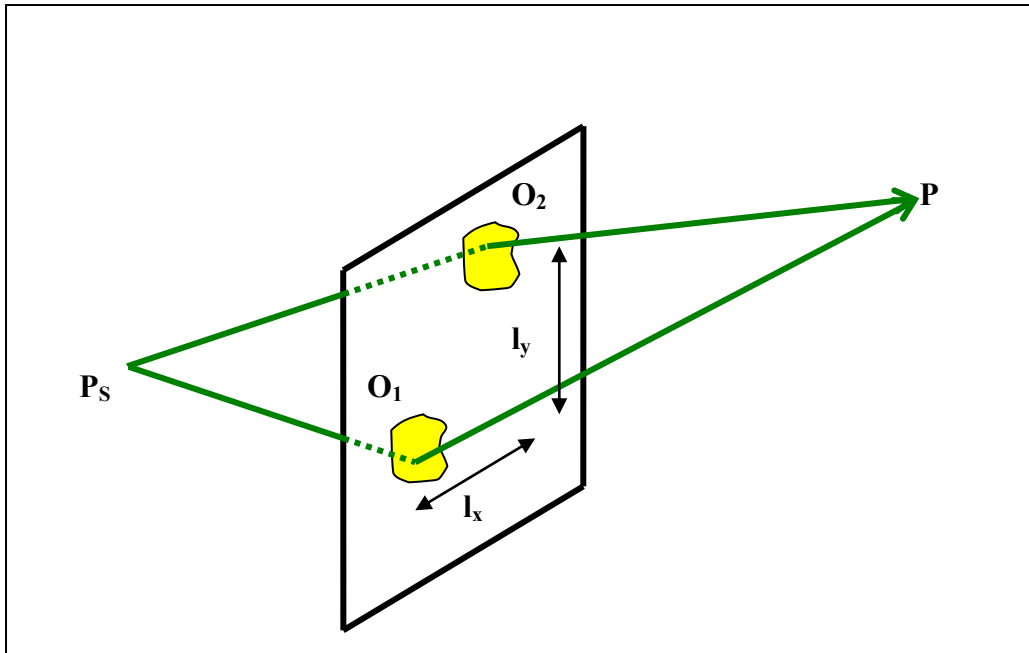
Kde  $D$  je průměr clony. Za normálních, běžných podmínek je to obecná omezující vlastnost všech optických přístrojů. Průběh intenzit světla za těchto okolností je na obr. 9.7.2.



Obr. 9.7.2. Součet intenzit světla od dvou blízkých bodů v případě zobrazování kruhovou clonou za podmínky definice mezní rozlišovací schopnosti.

## **9.8. Fraunhoferova difrakce na optických mřížkách**

Fraunhoferova difrakce na dvou stejných otvorech, viz obr.9.8.1. se prakticky od sebe liší pouze posunutím otvoru o souřadnice  $(l_x, l_y)$ .



Obr.9.8.1. Fraunhoferova difrakce na dvou stejných otvorech.

Difrakce na otvoru  $O_1$

$$E_1(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} \iint_{O_1} \exp - k((\alpha - \alpha')x' + (\beta - \beta')y') \overline{dx' dy'} \quad (9.8.1)$$

a na otvoru  $O_2$

$$E_2(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-ikR'_0}}{R'_0} \iint_{O_2} \exp - ik((\alpha - \alpha')(x' + l_x) + (\beta - \beta')(y' + l_y)) \overline{dx' dy'} = E_1(\mathbf{r})e^{i\Delta} \quad (9.8.2)$$

Kde pro fázový posuv  $\Delta$  platí

$$\Delta = -k((\alpha - \alpha')l_x + (\beta - \beta')l_y) \quad (9.8.3)$$

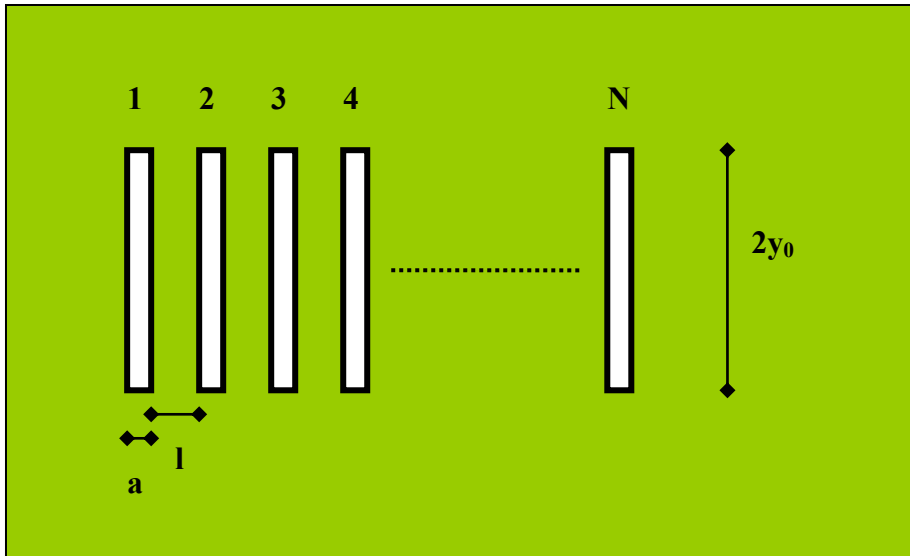
Výsledná intenzita elektrického pole

$$E(\mathbf{r}) = E_1(\mathbf{r}) + E_2(\mathbf{r}) = E_1(\mathbf{r})(1 + e^{i\Delta}) = E'_0 D(1 + e^{i\Delta}) = E'_0 DJ \quad (9.8.4)$$

Je tedy součinem dopadající vlny  $E'_0$ , difrakčního integrálu  $D$  jednoho otvoru a interferenčního členu  $J$ . Pro intenzitu platí

$$I = (E'_0 DJ)(E'_0 DJ)^* \quad (9.8.5)$$

Zobecníme tento výsledek na  $N$  stejných otvorů, viz obr. 9.8.2., což je vlastně tzv. optická mřížka a na 2dm plošnou mřížku, viz obr. .



Obr. 9.8.2. Optická mřížka na průchod.

Pak pro interferenční člen platí

$$J = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{N-1} = \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} \quad (9.8.6)$$

Nebo

$$J = 1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{N-1} = \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho} \quad \rho = e^{-i(\alpha - \alpha')} = e^{-i\pi ul} \quad (9.8.7)$$

Po dosazení

$$J = \frac{1 - e^{-i\pi ulN}}{1 - e^{-i\pi ul}} \quad JJ^* = \frac{\sin^2(\pi Nl)}{\sin^2(\pi l)} \quad (9.8.8)$$

Difrakční integrál pro obdélník kde  $a = 2x_0$

$$DD^* = \left( \frac{2y_0 a}{\lambda r'_0} \right)^2 \sin^2(\pi a) \sin^2(2\pi y_0) \quad (9.8.9)$$

a celková intenzita světla

$$I = E_0'^2 \left( \frac{2y_0 a}{\lambda r'_0} \right)^2 N^2 \sin^2(\pi a) \sin^2(2\pi y_0) \frac{\sin^2(\pi Nl)}{N^2 \sin^2(\pi l)} \quad (9.8.10)$$

Průběh  $J^2/N^2$  pro různá  $N$  je na obr. 9.8.3. Typické je zostření struktury pro vysoká  $N$ .

Podmínka pro polohu hlavních maxim funkce  $JJ^*$

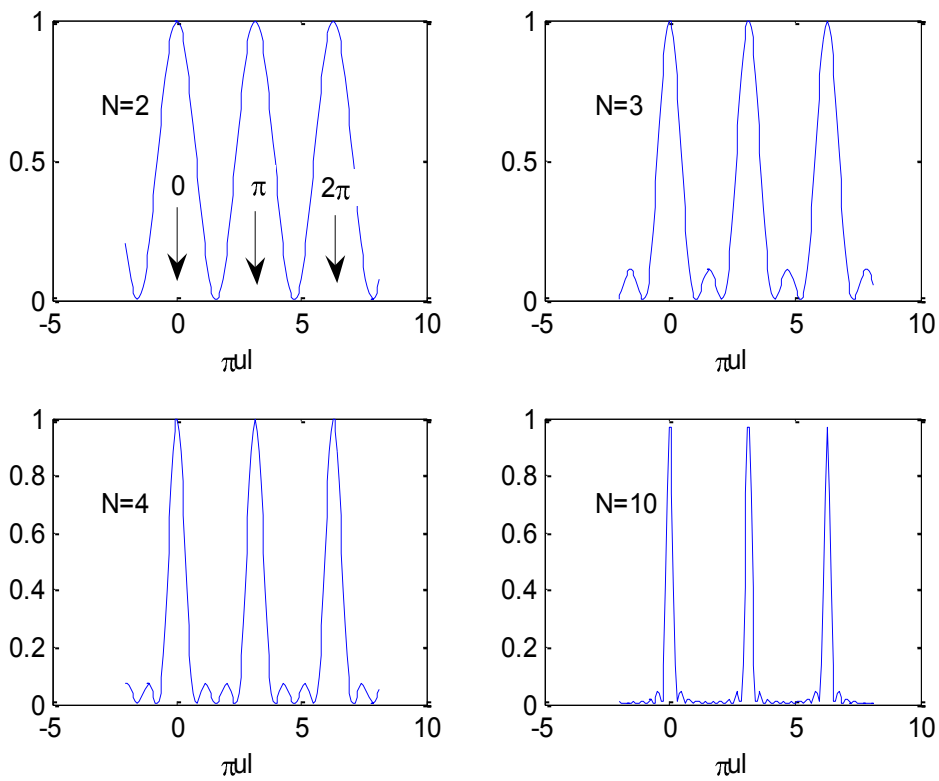
$$\pi ul = m\pi \rightarrow ul = m \rightarrow (\alpha - \alpha')l = m\lambda \quad (9.8.11)$$

kde  $m$  je celé číslo a má význam řádu difrakce. Ve shodě se označením úhlů na obr. 9.1.1. je možné napsat difrakční podmínku pro maxima ve tvaru

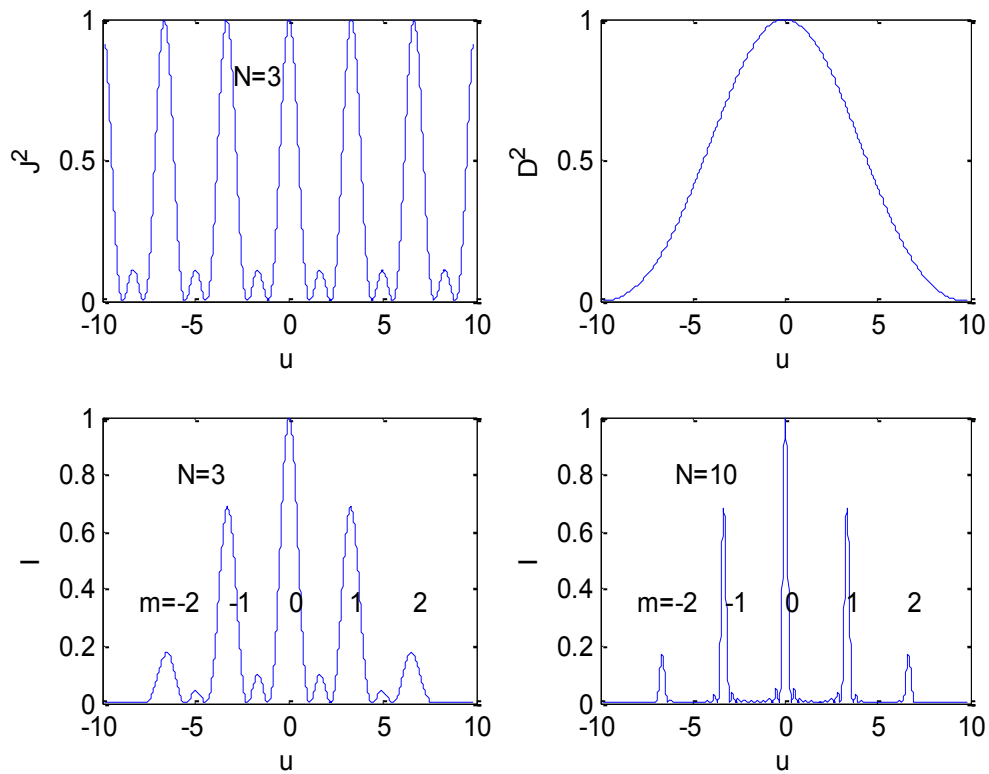
$$\sin(\Theta) - \sin(\Theta') \cdot l = m\lambda \quad (9.8.12)$$

Na obr.9.8.4. je ilustrace funkcí  $JJ^*$ ,  $DD^*$  a jejich součinu. Difrakční integrál významně ovlivňuje velikost interferenčních maxim. Připomeňme, že pro klasický Youngův pokus je  $N=2$ .

Podobně jako šířka hlavního difrakčního maxima je nepřímo úměrná rozměru stínítka, tak i vzdálenost jednotlivých difrakčních maxim je nepřímo úměrná jejich vzdálenosti na stínítku, viz (9.8.11).



Obr. 9.8.3. Interferenční člen intenzity světla ( $JJ^*/N^2$ ) lineární mřížky pro  $N=2,3,4$  a  $10$ .

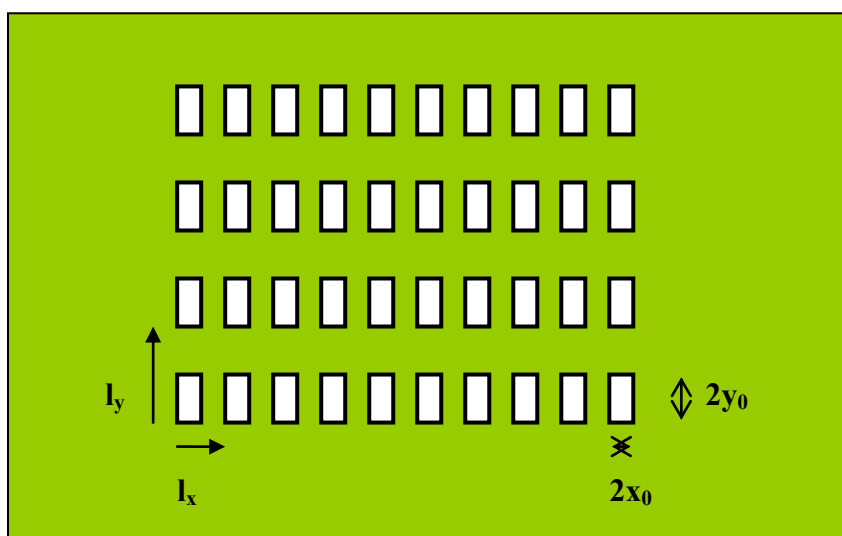


Obr.9.8.4. Interferenční intenzita, difrakční intenzita a jejich součin pro  $N=3$  a  $N=10$  s vyznačením difrakčních řádů ( $m$ ) a pro ( $a=.01$  a  $l=0.3$ ).



## Plošná mřížka

V tomto případě postupujeme analogicky.



Obr. 9.8.5. Plošná optická mřížka na průchod.

Předpokládáme difrakci na obdélníkových otvorech s rozměry  $(2x_0, 2y_0)$  a umístěné v bodech  $(n_x l_x, n_y l_y)$ , kde  $n_x=0, 1, 2, \dots, N_x$  a  $n_y=0, 1, 2, \dots, N_y$ , viz obr. 9.8.5. Pak celková intenzita el.pole (9.8.4) má tvar

$$E(\mathbf{r}) = E'_0 D J \quad (9.8.13)$$

Kde interferenční člen

$$J = \sum_{n_x=0}^{N_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} e^{-i l_x (\alpha - \alpha') n_x} e^{-i l_y (\beta - \beta') n_y} = \sum_{n_x=0}^{N_x} e^{-i l_x (\alpha - \alpha') n_x} \sum_{n_y=0}^{N_y} e^{-i l_y (\beta - \beta') n_y} = \frac{1 - e^{i 2\pi l_x N_x (\alpha - \alpha')}}{1 - e^{i 2\pi l_x (\alpha - \alpha')}} \frac{1 - e^{i 2\pi l_y N_y (\beta - \beta')}}{1 - e^{i 2\pi l_y (\beta - \beta')}} = J_x J_y \quad (9.8.14)$$

A výsledná intenzita světla podobně jako v předcházejícím případě (9.8.10)

$$I = E'_0{}^2 \left( \frac{4x_0 y_0}{\lambda l_x l_y} \right)^2 N_x^2 N_y^2 \sin^2 c^2(2\pi x_0) \sin^2 c^2(2\pi y_0) \frac{\sin^2(\pi N_x l_x (\alpha - \alpha'))}{N_x^2 \sin^2(\pi l_x (\alpha - \alpha'))} \frac{\sin^2(\pi N_y l_y (\beta - \beta'))}{N_y^2 \sin^2(\pi l_y (\beta - \beta'))} \quad (9.8.15)$$

Podmínka pro polohu hlavních maxim funkce  $J J^*$  platí

$$\pi u l_x = m_x \pi \rightarrow u l_x = m_x \rightarrow (\alpha - \alpha') l_x = m_x \lambda \quad (9.8.16)$$

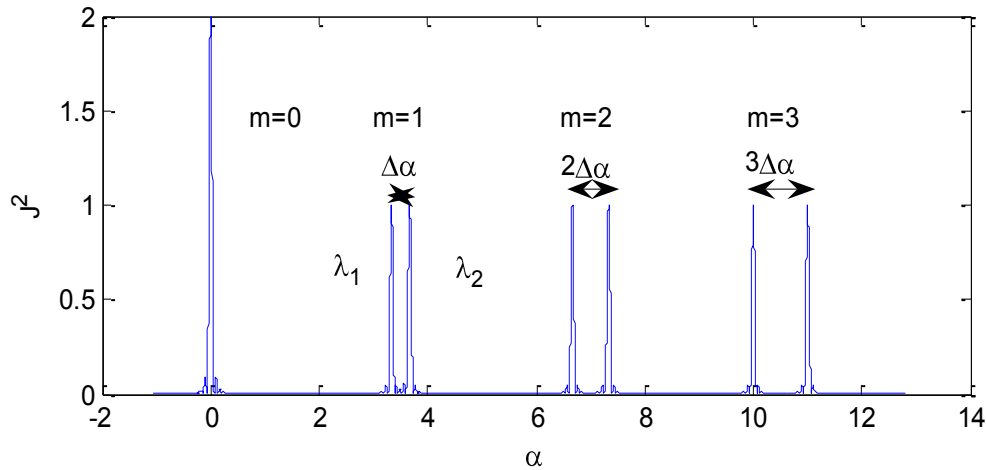
$$\pi v l_y = m_y \pi \rightarrow v l_y = m_y \rightarrow (\beta - \beta') l_y = m_y \lambda \quad (9.8.17)$$

Poznámka o nepřímé úměrnosti mezi šířkou difrakčních maxim a rozměrech stínítka, stejně jako o nepřímé úměrnosti mezi vzdálenostmi difrakčních maxim a jejich vzdálenostmi na stínítku platí i v tomto případě a je typickou vlastností Fraunhoferovy difrakce.

Další rozšíření na 3d struktury je podobné, ale pro optiku neobvyklé. Naopak v oblasti rtg. záření je to základní aplikace.

## 9.9. Rozlišovací schopnost mřížky

Průběh funkce  $(J/N)^2$  pro dvě blízké monochromatické vlny je na obr. 9.9.1.



Obr. 9.9.1 Interferenční intenzita pro dvě vlnové délky (v poměru 1.1,  $N=50$ ).

Podmínky pro maxima (9.8.11)

$$\alpha - \alpha'_1 = m \frac{\lambda_1}{l} \quad \alpha - \alpha'_2 = m \frac{\lambda_2}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta \alpha = \alpha'_2 - \alpha'_1 = m \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l} = m \frac{\Delta \lambda}{l} \quad (9.9.1)$$

Pro malé rozdíly

$$\delta \alpha' = m \frac{\delta \lambda}{l} \quad (9.9.2)$$

Pro rozlišovací mez zvolíme podmínku kdy maximum pro  $\lambda_2$  padne do prvního minima  $\lambda_1$ , tedy vzdálenost mezi maximum a prvním minimum. Podmínka pro maximum je  $ul=m$ .

Nejbližší minimum je pro podmínku

$$J^* = 0 \rightarrow \sin^2 \left( \pi \left( u + \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} \right) N \right) = \sin^2 \left( \pi \left( nN + \pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} N \right) \right) = 0 \quad (9.9.3)$$

Tato podmínka je pro nejbližší minimum splněna pro

$$\Delta \lambda N = l \rightarrow \Delta \lambda = \frac{l}{N} \rightarrow \Delta \alpha' \cong \delta \alpha' \cong \frac{\lambda}{Nl} \quad (9.9.4)$$

Pro rozlišovací schopnost platí

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} \quad (9.9.5)$$

Srovnáním vztahů (9.9.2) a (9.9.4)

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN \quad (9.9.6)$$

Rozlišovací schopnost závisí na řádu difrakce a na celkovém počtu otvorů (vrypů).

Např. pro  $\lambda = 500 \text{ nm}$  a mřížku s  $1200 \text{ čar/mm}$ , při rozměru  $10 \text{ cm}$  je

$$\delta \lambda = \frac{1}{m} \frac{1}{200} \text{ nm} \quad (9.9.7)$$

Obvykle se využívá první nebo druhý řád, ale existují speciální úpravy pro využití mnohem vyšších řádů.

## 9.10. Fresnelova difrakce

Fresnelovo přiblížení využívá v rozvoji vzdáleností i členů druhého řádu a umožňuje řešit difrakční integrál s vyšší přesností a je vhodný i pro větší úhly, respektive pro rozbíhavé svazky světla. Velmi často se však používají numerické postupy.

Pro jednoduchost vezmeme Fresnelův integrál (9.3.1)

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} E_0 \iint_{\Sigma} \frac{e^{-i(R+R')}}{RR'} dx' dy' \quad (9.10.1)$$

Jako v předchozím případě předpokládáme

$$RR' \cong R_0 R'_0 \quad (9.10.2)$$

Pak po dosazení z (9.3.6) a (9.3.7) a pro

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R'_0} \quad K = \frac{i}{\lambda} E'_0 \frac{e^{-iR'_0}}{R'_0} \quad (9.10.3)$$

kde K má význam intenzity elektrického pole v bodě pozorování bez překážky, pak

$$E(r) = K \iint_{\Sigma} \exp(-i\kappa) \left[ (\alpha - x')x' + (\beta - z')y' + \frac{(x'^2 + y'^2)}{2\rho_0} - \frac{((\alpha - x')^2 + (\beta - z')^2)}{2\rho_0} \right] dx' dy' \quad (9.10.4)$$

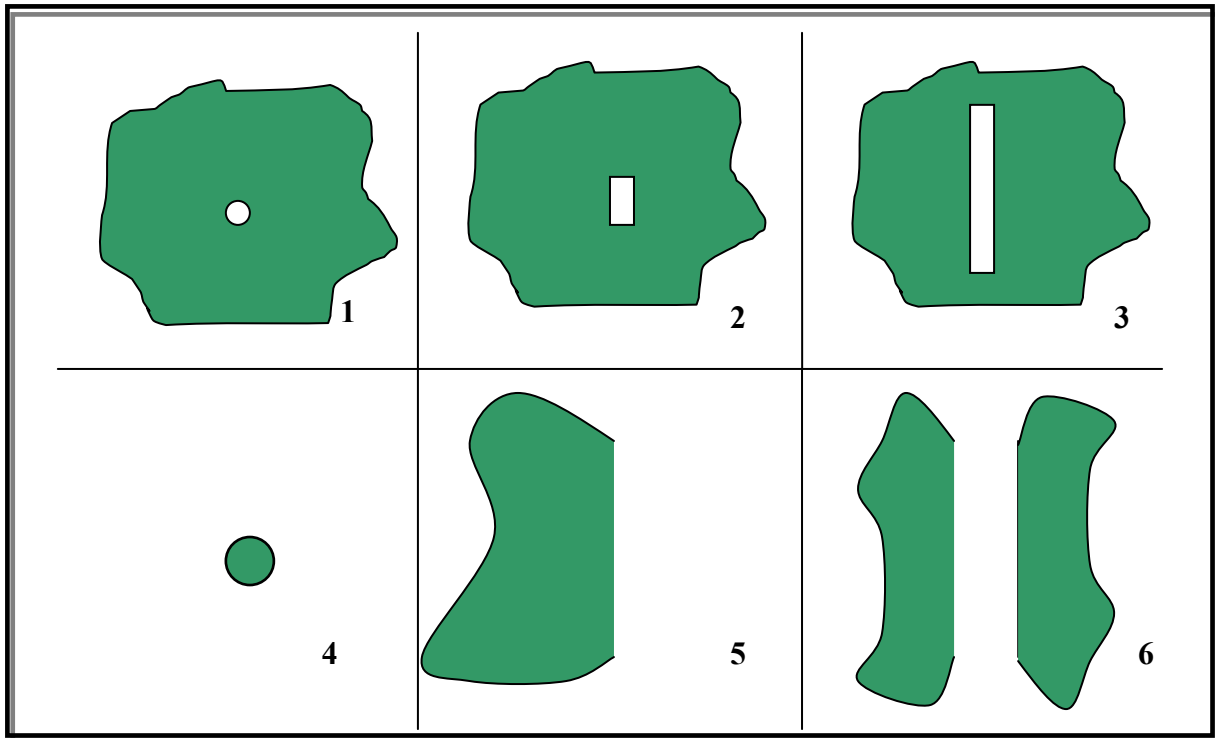
nebo pro zdroj světla na ose

$$E(r) = K \iint_{\Sigma} \exp(-i\kappa) \left[ -x'x' - z'y' + \frac{(x'^2 + y'^2)}{2\rho_0} - \frac{(\alpha'x' + \beta'y')^2}{2\rho_0} \right] dx' dy' \quad (9.10.5)$$

A pro zdroj i bod pozorování na ose

$$E(r) = K \iint_{\Sigma} \exp(-i\kappa) \left[ \frac{(x'^2 + y'^2)}{2\rho_0} \right] dx' dy' \quad (9.10.6)$$

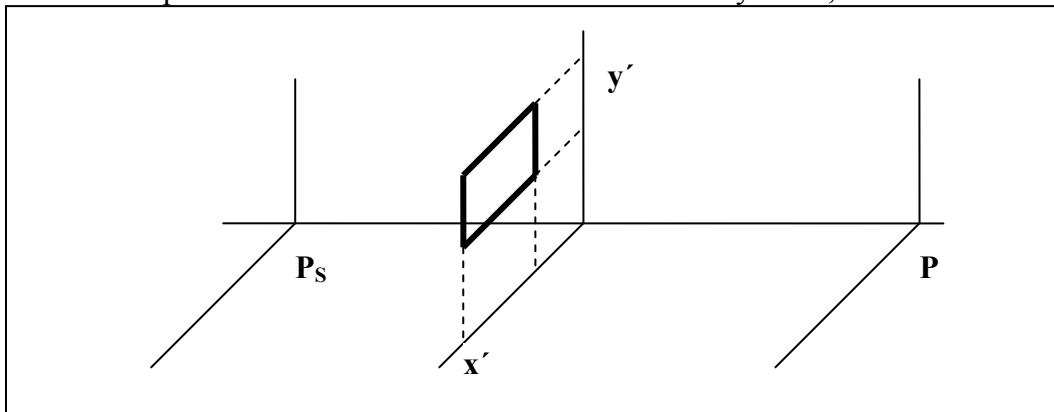
Toto Fresnelovo přiblížení se uplatní při výpočtu difrakce na větších otvorech a zejména na překážkách typu terčíku, poloroviny, drátu, kdy je nutné integrovat v širokých mezích. Viz obr. 9.10.1. Uvedené integrály nemají analytické řešení, je nutné užít přibližné numerické nebo grafické řešení.



Obr. 9.10.1. Typické difrakční překážky pro Fraunhoferovu difrakci (1-malý kruhový otvor, 2-malý obdélníkový otvor, 3-úzká štěrбина) a pro Fresnelovo přiblížení (4-kruhový terčik, 5-polorovina, 6-široká štěrбина).

### 9.11. Fresnelova difrakce na pravoúhlém otvoru

Z historického hlediska je to příklad na možnost názorného grafického řešení a dovoluje rozšíření na polonekonečná stínítka. Zvolíme obdélníkový otvor, viz obr.9.11.1.



Obr. 9.11.1. Obdélníkový otvor pro Fresnelovu difrakci.

Použijeme integrál (9.10.6)

$$E(P) = K \int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{k}{2\rho_0} x'^2\right] \int_{y_1}^{y_2} \exp\left[-\frac{k}{2\rho_0} y'^2\right] dy' \quad (9.11.1)$$

Zavedeme substituci

$$u = x' \sqrt{k/\pi\rho_0} \quad v = y' \sqrt{k/\pi\rho_0} \quad (9.11.2)$$

Pak

$$E(P) = K' \int_{u_1}^{u_2} \exp(-i\pi u'^2 / 2) du \int_{v_1}^{v_2} \exp(-i\pi v'^2 / 2) dv \quad (9.11.3)$$

Kde

$$K' = K\pi\rho / k \quad (9.11.4)$$

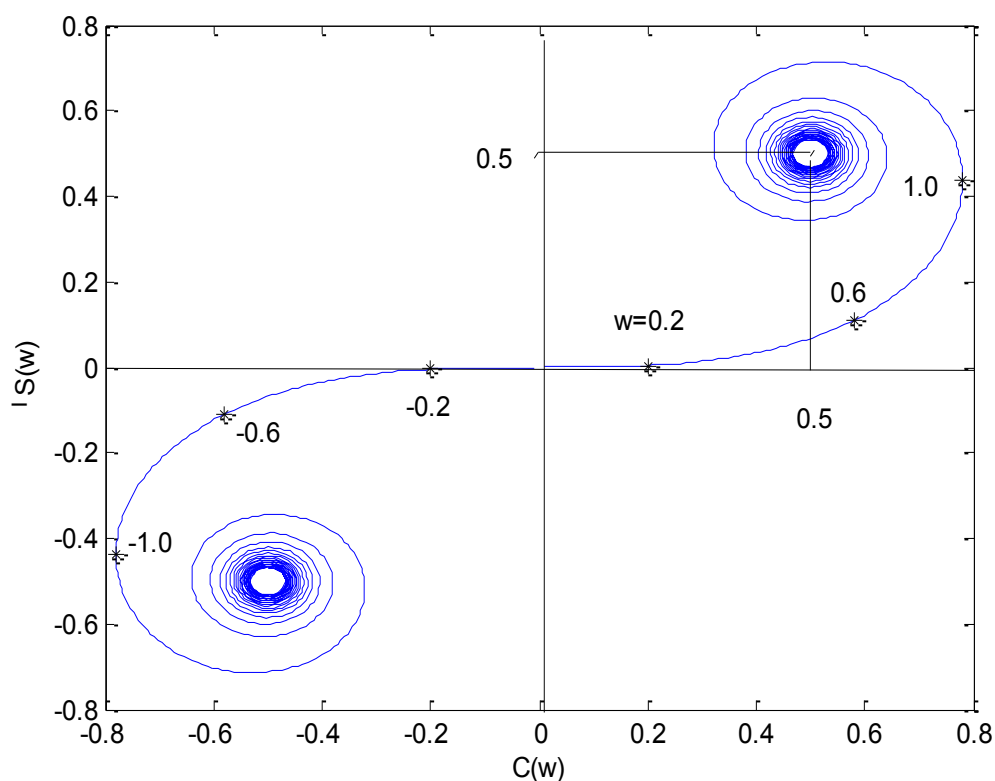
Zvolme označení

$$\int_0^w \exp(-\pi v'^2 / 2) dw = C(w) + S(w) \quad (9.11.5)$$

Kde

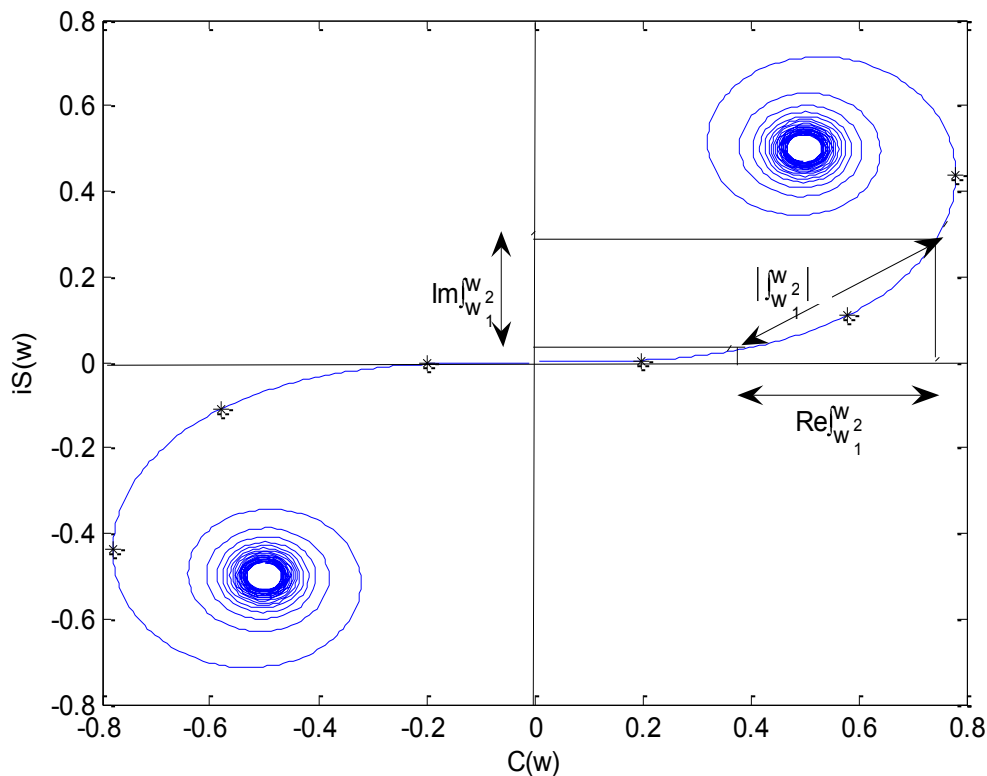
$$C(w) = \int_0^w \cos(\pi w'^2 / 2) dw \quad S(w) = \int_0^w \sin(\pi w'^2 / 2) dw \quad (9.11.6)$$

jsou tzv Fresnelovy integrály.



Obr. 9.11.2. Cornu spirála.

V komplexní rovině  $C(w)$ ,  $iS(w)$ , kde  $w$  je parametr, je jejich hodnota určena tzv. Cornu spirálou, viz obr.9.11.2. Vzdálenost mezi body  $(w_1, w_2)$  je absolutní hodnota integrálu s těmito mezemi. Příslušné průměty jsou hodnotami  $C$  a  $S$ .



Obr. 9.11.3. Vychíslení Fresnelova integrálu pomocí Cornu spirály.

Bez stínítka je hodnota integrálu

$$E(P) = K' \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi u^2 / 2) du \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\pi v^2 / 2) dv = K'(1+i)^{-2} = E_0 \quad (9.11.7)$$

V obecném tvaru lze (9.11.3) pro obdélník napsat

$$E(P) = \frac{E_0}{(1+i)^2} \left[ \mathbf{F}(u) + S(u) \frac{u}{u_1} \right] \left[ \mathbf{F}(v) + S(v) \frac{v}{v_1} \right] \quad (9.11.8)$$

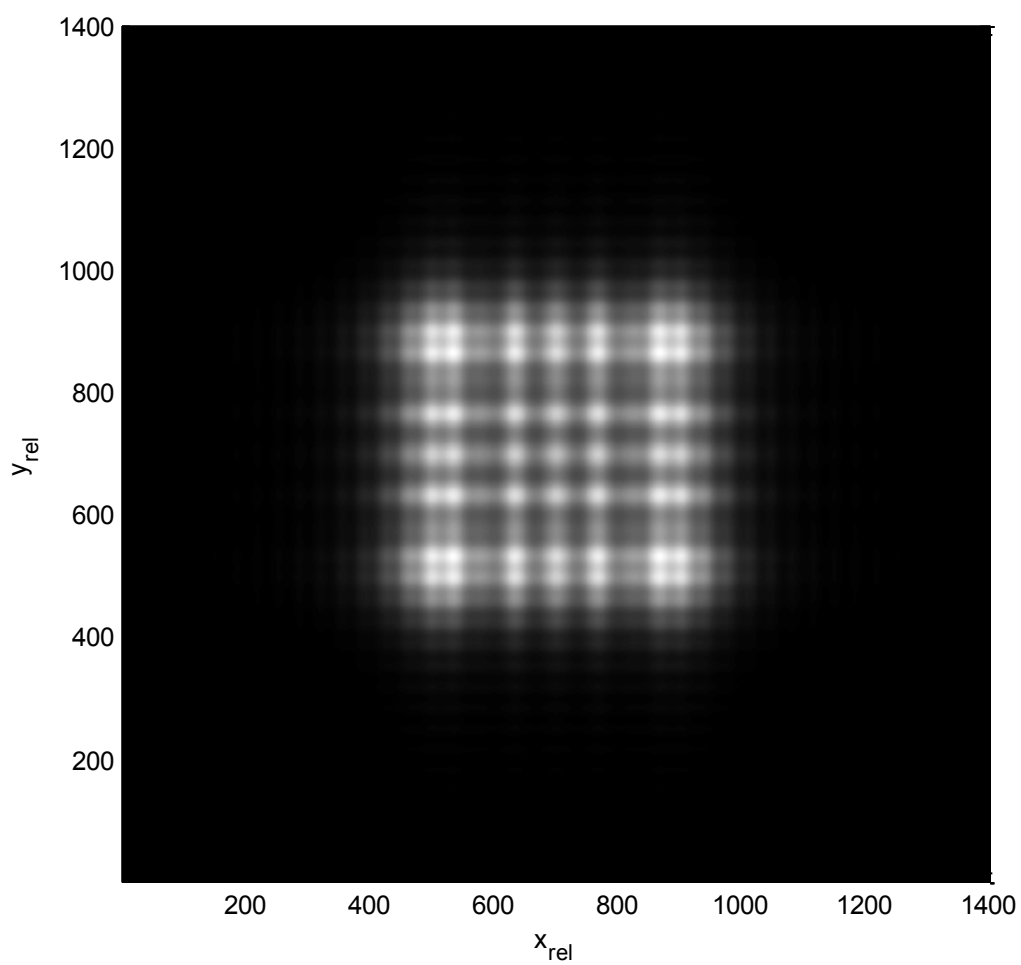
Pro zjednodušení situace uvažujeme hodně vzdálený zdroj světla, pak

$$R_0 \rightarrow \infty, \quad \rho \cong R_0' \quad (9.11.9)$$

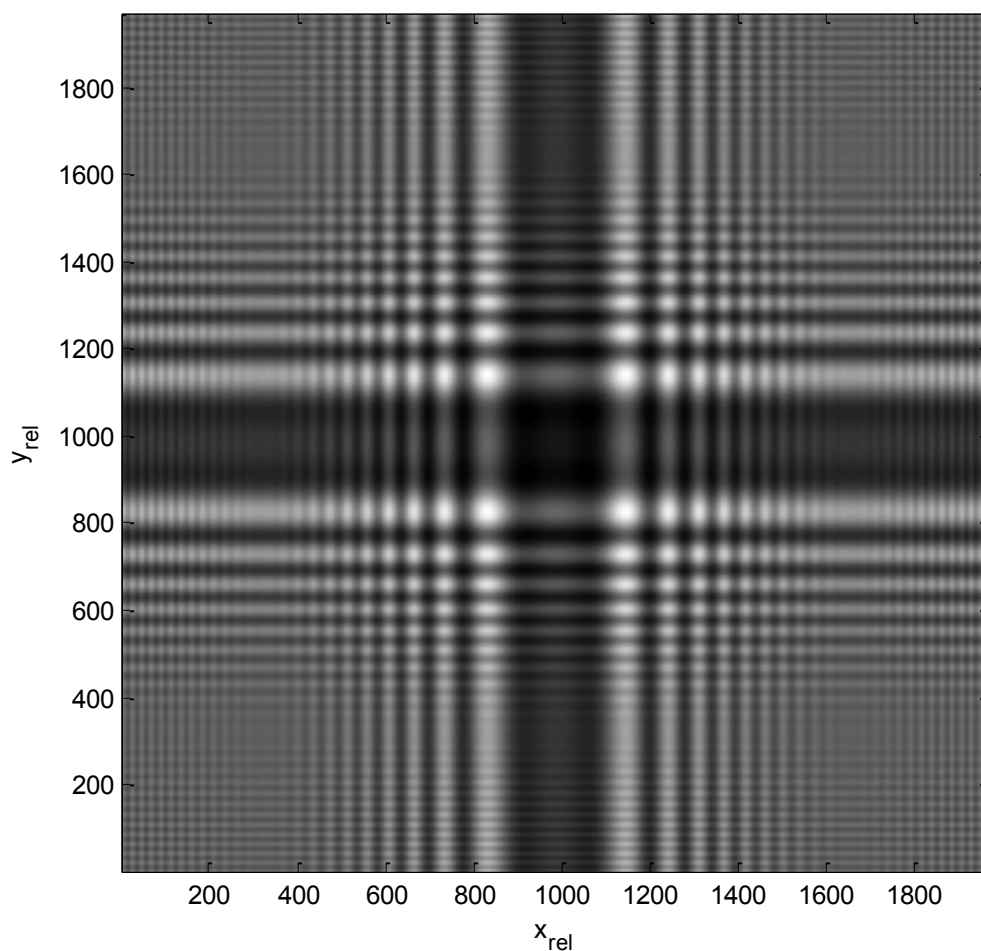
Integrál (9.11.8) a popsaný postup dovolí vypočítat rozložení intenzity světla v libovolném bodě roviny stínítka  $(x, y)$  posouváním otvoru v rovině  $(x', y')$ , viz obr. 9.11.1. Typický příklad rozložení intenzity světla v takovém případě je na obr. 9.11.4. Stejným postupem můžeme počítat Fresnelovu difrakci na obdélníkovém terči. Pak z (9.11.8) dostaneme

$$E(P) = \frac{E_0}{(1+i)^2} \left[ \mathbf{C}(u) + iS(u) \frac{u}{u_1} \right] \left[ \mathbf{C}(v) + iS(v) \frac{v}{v_1} \right] + \left[ \mathbf{C}(u) + iS(u) \frac{u}{u_2} \right] \left[ \mathbf{C}(v) + iS(v) \frac{v}{v_1} \right] + \left[ \mathbf{C}(u) + iS(u) \frac{u}{u_1} \right] \left[ \mathbf{C}(v) + iS(v) \frac{v}{v_2} \right] + \left[ \mathbf{C}(u) + iS(u) \frac{u}{u_2} \right] \left[ \mathbf{C}(v) + iS(v) \frac{v}{v_2} \right] \quad (9.11.10)$$

Průběh intenzity světla pro malý čtvercový terč je na obr. 9.11.5.



*Obr.9.11.4. Fresnelova difrakce na čtvercovém otvoru (relativní velikost strany čtverce je 600).*



Obr. 9.11.5. Fresnelova difrakce na malém čtvercovém terči (relativní velikost čtverce je 30).

### **9.12. Štěrbina a vlákno**

Integrál (9.11.8) lze s výhodou použít pro řešení Fresnelovy difrakce na úzké dlouhé štěrbině.

Pro meze integrace platí

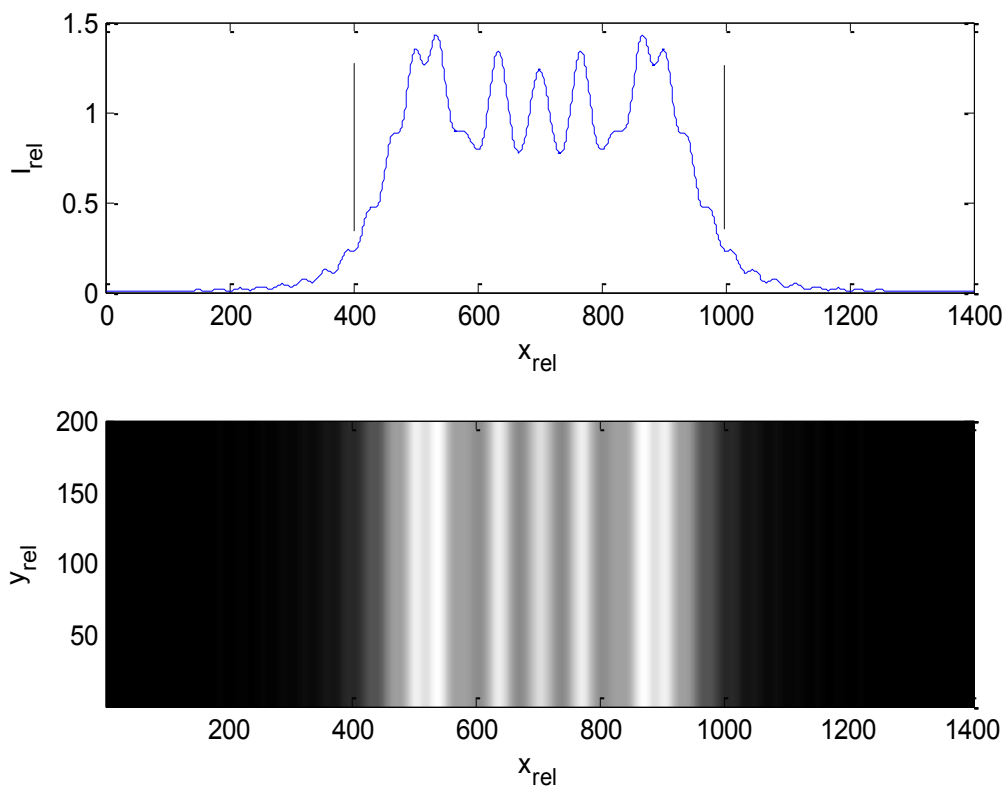
$$u_1 \rightarrow -\infty, \quad u_2 \rightarrow 0$$

pak

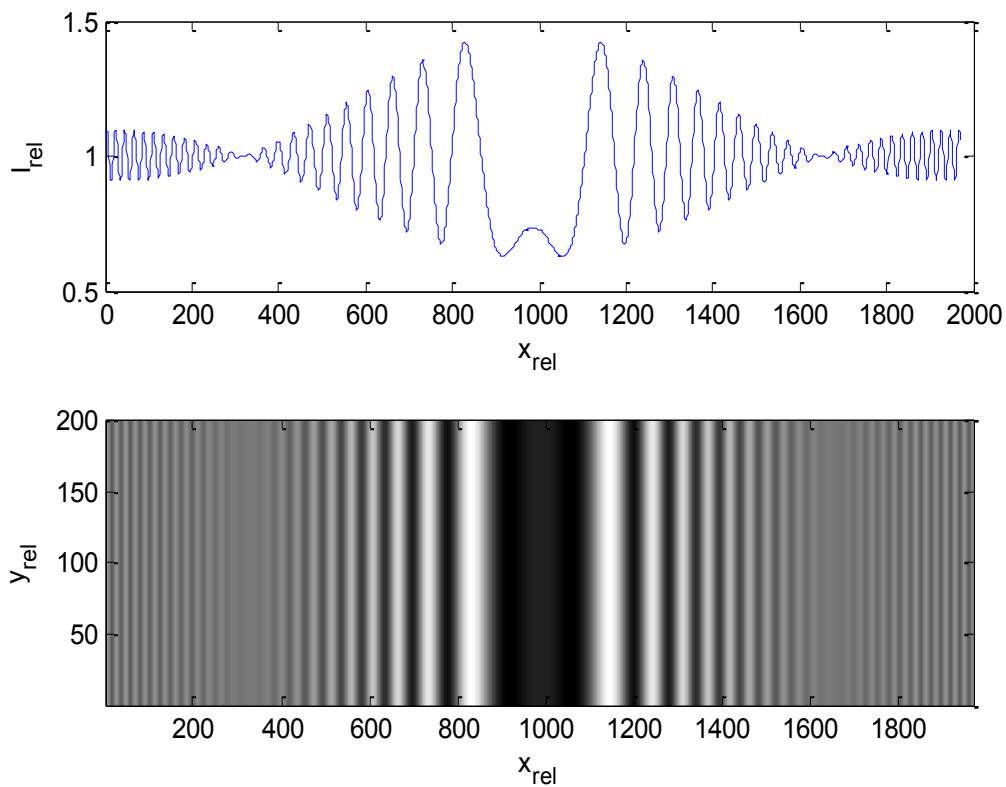
$$E(P) = \frac{E_0}{(1+i)} \left[ C(v) + S(v) \frac{\sqrt{v_2}}{\sqrt{v_1}} \right] \quad (9.12.1)$$

Výsledek je graficky zobrazen na obr. 9.12.1 .





Obr. 9.12.1. Fresnelova difrakce na široké štěrbině, veličiny  $I$ ,  $x$  a  $y$  jsou v relativních jednotkách, poloha štěrbině je znázorněna svislými čarami.



Obr. 9.12.1. Fresnelova difrakce na tenkém vláknu (značení jako v obr. 9.12.1, relativní tloušťka vlákna je 30).

Na tenkém drátu se Fresnelova difrakce počítá analogicky k (9.12.1) a platí

$$E(P) = \frac{E_0}{(1+i)} \left[ \frac{1}{2} C(v) + iS(v) \right]_{-\infty}^{v_1} + \left[ \frac{1}{2} C(v) + iS(v) \right]_{v_2}^{\infty} \quad (9.12.2)$$

Průběh intenzity světla je na obr. 9.12.2.

### 9.13. Hrana

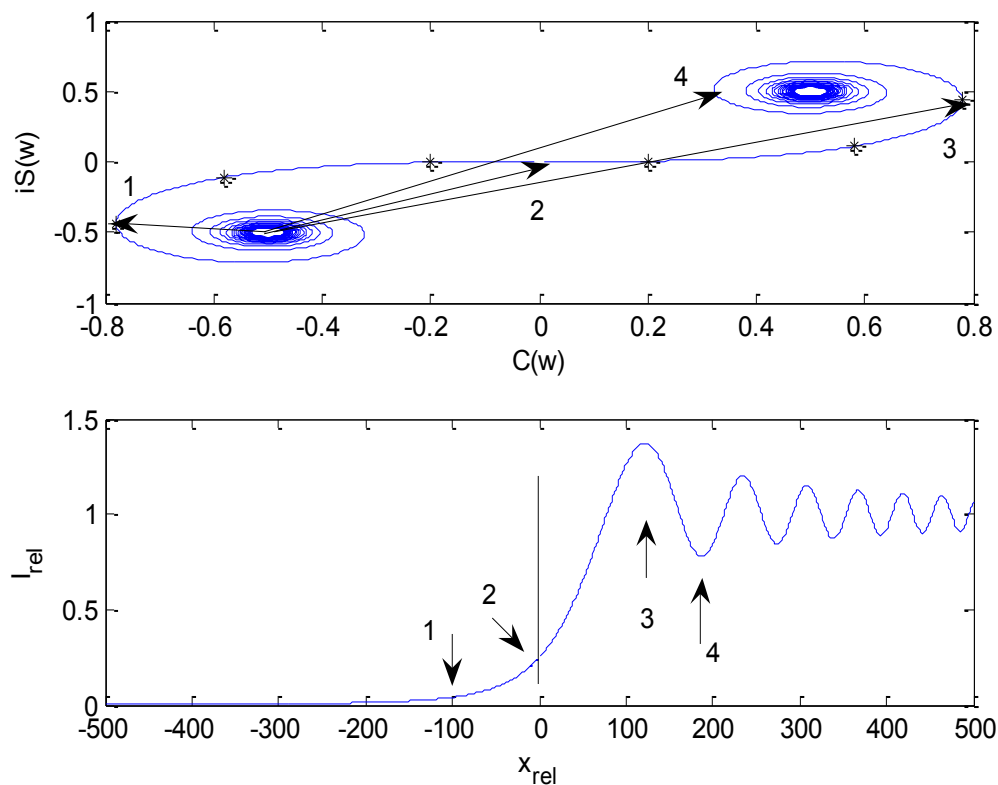
Hrana je blízká řešení na štěrbině, platí

$$v_1 \rightarrow -\infty$$

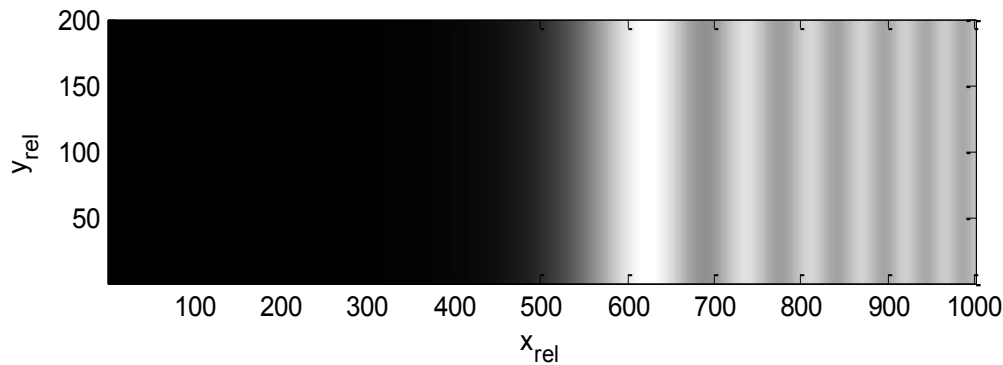
A pro integrál (9.12.1)

$$E(P) = \frac{E_0}{(1+i)} \left[ C(v_2) + iS(v_2) + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right] \quad (9.13.8)$$

Názorný postup integrace s využitím Cornu spirály je na obr 9.13.1. včetně průběhu intenzity světla, viz rovněž obr.9.13.2.



Obr. 9.13.1. Fresnelova difrakce na hraně ( $x=0$ ). Délka úseček (1,2,..) je úměrná intenzitě.



Obr.9.13.2. Průběh intenzity světla při difrakci na hraně ( $x=500$ ).

### **9.14. Fresnelova difrakce na stínítku s kruhovou symetrií**

Pro tento případ, když se spokojíme s tím, že zdroj, střed kruhu i bod pozorování jsou na optické ose, je možné analytické řešení. Pak integrál (9.10.6) pro  $K = iK'$

$$E(r) = iK' \iint_{\Sigma} Q \exp(-k) \left[ \frac{(x'^2 + y'^2)}{2\rho_0} \right] dx' dy' \quad (9.14.1)$$

kde  $Q$  je faktor sklonu. Integrál (9.11.1) převedeme do sférických souřadnic

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \quad dx' dy' = r dr d\phi \quad (9.14.2)$$

$$E(r) = iK' \int_0^{r_0} Q \exp(-ikr^2 / 2\rho) r dr \int_0^{2\pi} d\phi \quad (9.14.3)$$

Zavedeme substituci

$$\psi = \frac{kr^2}{2\rho_0} \quad (9.14.4)$$

$$E(r) = iK' \frac{2\pi\rho}{k} \int_0^{\psi_0} Q(\psi) \exp(-i\psi) d\psi = iC \int_0^{\psi_0} Q(\psi) \exp(-i\psi) d\psi \quad (9.14.5)$$

### **9.15. Kruhový otvor**

Předpokládáme faktor sklonu konstantní, pak (9.14.5)

$$E(r) = iCQ \int_0^{\psi_0} \exp(-i\psi) d\psi = -C' \left[ \exp(-i\psi_0) - 1 \right] \quad (9.15.1)$$

A pro intenzitu světla

$$I(P) = 2C'^2 \left( 1 - \cos \frac{kr_0^2}{2\rho_0} \right) \quad (9.15.2)$$

Intenzita se posunutím bodu pozorování na ose mění periodicky úměrně s  $\rho_0^{-1}$  a s intenzitou od 0 do  $4C'^2$ .

### **9.16. Kruhový disk**

Podobně můžeme pro disk využít integrál (9.14.5)

$$E(r) = iC \int_{\psi_0}^{\infty} Q(\psi) \exp(-i\psi) d\psi = iCQ \int_{\psi_0}^{\infty} \exp(-i\psi) d\psi = iC' \left[ \exp(-i\infty) - \exp(-i\psi_0) \right] \quad (9.16.1)$$

$$E(r) = iC' \left[ \exp(-i\infty) - \exp\left(-i \frac{kr_0^2}{2\rho_0}\right) \right] \quad (9.16.2)$$

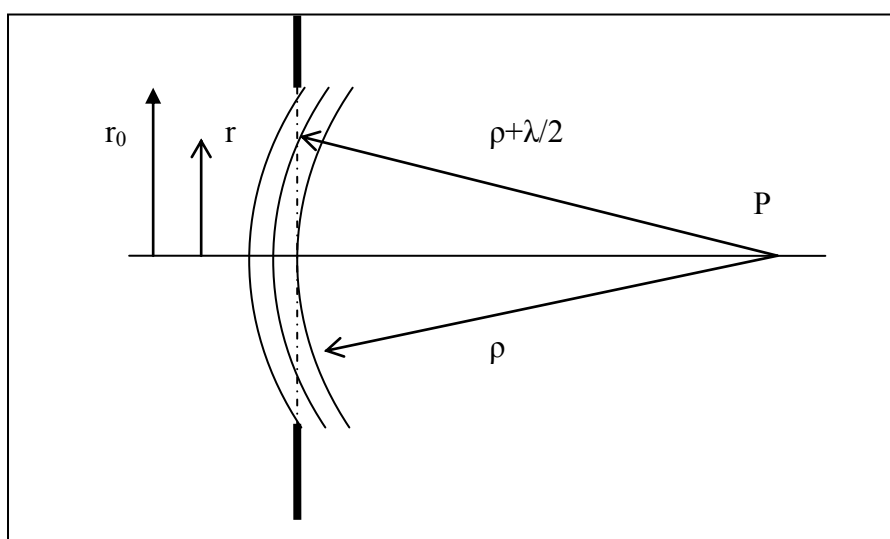
Pro  $r_0 \rightarrow \infty$  musí být intenzita elektrického pole na ose jako v případě bez stínítka, proto pro první člen musí platit ( $\exp(-i\infty) \rightarrow 0$ ). Pak po intenzitu světla na ose dostaneme pro libovolné  $\rho_0$

$$I = C'^2 \quad (9.16.3)$$

Tedy na ose v difrakčním obraze je vždy světlá skvrna. To je známá Poissonova skvrna, která sehrála významnou roli při dokazování oprávněnosti vlnové teorie.

### 9.17. Fresnelovy zóny

Fresnelovy zóny jsou mezikruží s poloměrem  $r_n$  zvoleným tak, aby drahový rozdíl (zdroj, stínítko, bod pozorování) mezi sousedními byl  $\lambda/2$ , respektive fázový  $\pi$ .



Obr. 9.17.1. Fresnelovy zóny.

Podle obr. (9.17.1) lze odvodit

$$r_n^2 = n\lambda\rho \quad \psi_n = n\pi \quad (9.17.1)$$

Pro plochu každého mezikruží

$$\Delta = \pi (r_{n+1}^2 - r_n^2) = \pi\lambda\rho = \pi r_n^2 \quad (9.17.2)$$

Příspěvek n-té zóny je

$$\begin{aligned} \Delta_n &= iC \int_{\psi_n}^{\psi_{n+1}} Q \exp(-\psi) d\psi = -iC Q_n \left[ \exp(-\psi_{n+1}) - \exp(-\psi_n) \right] \\ &= -iC Q_n \left[ \exp(-(n+1)\pi) - \exp(-n\pi) \right] = 2CQ_n \cos(n\pi) \end{aligned} \quad (9.17.3)$$

Pro n sudé, respektive liché dostaneme

$$\Delta_n = \pm iCQ_n \quad (9.17.4)$$

Pro celý otvor

$$E = -iC \left[ Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 \dots \pm Q_N \right] \quad (9.17.5)$$

Je zřejmé, že příspěvky sousedních zón se navzájem potlačují. Snadno můžeme zařídit, aby např. sudé zóny byly nepropustné, pak

$$E = -iC \left[ Q_1 + Q_3 \dots + Q_N \right] \quad (9.17.6)$$

Pokud otvor nebude příliš velký, pak všechny  $Q_n \cong 1$ , tedy

$$E = - \mathfrak{N} \quad I = C^2 N^2 \quad (9.17.7)$$

Na ose je série bodů o souřadnici  $\rho$  s poměrně velkou intenzitou světla, clona se chová jako spojná čočka. Platí

$$\frac{n\lambda}{r_n^2} = \frac{1}{\rho} \quad (9.17.8)$$

V případě, že bodový zdroj světla je v místě  $D$ , pak podle (9.10.3) platí

$$\frac{n\lambda}{r_n^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{D} + \frac{1}{D'} \quad (9.17.9)$$

Což je analogie čočkové rovnice s ohniskem

$$f = \frac{r_0^2}{n\lambda} \quad (9.17.10)$$

Velkou nevýhodou je závislost na vlnové délce. Naopak je výhodou konstrukce čoček, kde není dostupný průhledný optický materiál (např. v oblasti rentgenového záření).