Základy kvantové mechaniky, p. s. r. 2010/2011
Dodatky a příklady- 12. týden

Hilbertův prostor soustavy mnoha částic, postulát o symetrii/antisymetrii

Uvažujme nejprve o soustavě N odlišitelných částic.
Hilbertův prostor je tenzorovým součinem Hilbertových prostorů jednotlivých částic:

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes H_3 \otimes \, ... \, \otimes H_N \, .$$

Souřadnicová & s_z reprezentace (ve srovnání s přednáškou doplněn spin).
Báze na H:

$$\{|1; \mathbf{r}_1, s_{z1}\rangle \otimes |2 : \mathbf{r}_2, s_{z2}\rangle \otimes |3 : \mathbf{r}_3, s_{z3}\rangle \otimes \, ... \, \otimes |N : \mathbf{r}_N, s_{zN}\rangle\} \, ,$$

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \, , ... \, \mathbf{r}_N \in R^3 \, , \; s_{z1}, s_{z2} \, , ... \, s_{zN} \in \{-S \, ... \, S\}$$

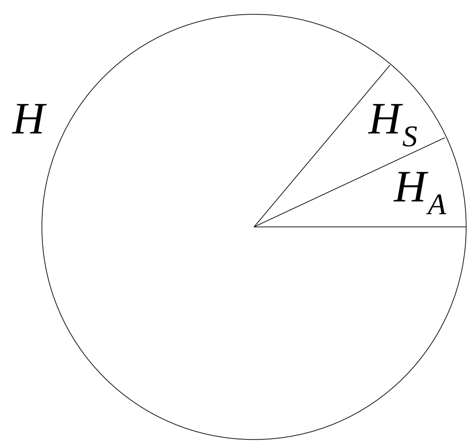
nebo zkráceně

$$\{|\mathbf{r}_1, s_{z1}, \mathbf{r}_2, s_{z2} \, , ... \, \mathbf{r}_N, s_{zN}\rangle\} \, .$$

Nechť $|\Psi\rangle \in H$, $|\Psi\rangle$ lze v bázi vyjádřit následovně:

$$|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \, ... \, \mathrm{d}\mathbf{r}_N \sum_{s_{z1} \, ... s_{zN}} \Psi(\mathbf{r}_1, s_{z1}, \, ... \, \mathbf{r}_N, s_{zN}) |\mathbf{r}_1, s_{z1}, \mathbf{r}_2, s_{z2} \, , ... \, \mathbf{r}_N, s_{zN}\rangle \, .$$

$\Psi(\mathbf{r}_1 \, ...)$ ... souřadnicová reprezentace $|\Psi\rangle$.
Postulát o symetrii/antisymetrii



Obrázek 1: K postulátu o symetrii a antisymetrii. Hilbertův prostor souboru N odlišitelných částic je označen symbolem H. Pro systém totožných bosonů (fermionů) se uplatní pouze podprostor H_S (H_A) obsahující stavové vektory, které jsou symetrické (antisymetrické) vůči záměně libovolných dvou částic.

Def. (symetrie a antisymetrie vůči záměně, ve srovnání s přednáškou doplněn spin).
Ψ je funkce symetrická (antisymetrická) vůči záměně i-té a j-té č., pokud

$$\Psi(\mathbf{r}_1, s_{z1}, \, ... \, \mathbf{r}_j, s_{zj}, \, ... \, \mathbf{r}_i, s_{zi}, \, ... \, \mathbf{r}_N, s_{zN}) = \pm \Psi(\mathbf{r}_1, s_{z1}, \, ... \, \mathbf{r}_i, s_{zi}, \, ... \, \mathbf{r}_j, s_{zj}, \, ... \, \mathbf{r}_N, s_{zN}) \, .$$

Na levé straně jsou argumenty $\mathbf{r}_j$ a s_{zj} na i-tém místě a argumenty $\mathbf{r}_i$ a s_{zi} na j-tém místě, na pravé straně argumenty $\mathbf{r}_i$ a s_{zi} na i-tém místě a argumenty $\mathbf{r}_j$ a s_{zj} na j-tém místě.

Příklady

1. Uvažujte o soustavě dvou neinteragujících odlišitelných částic o stejné hmotnosti (m) v jednorozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě o šířce l.
(a) Zapište hamiltonián, nalezněte, s využitím metody separace proměnných, vlastní hodnoty energie a úplný soubor vlastních funkcí.
(b) Dále uvažujte o stavu, kde se první částice nachází v základním jednočásticovém stavu a druhá částice v prvním excitovaném jednočásticovém stavu. Vyjádřete hustotu pravděpodobnosti současného pozorování částice v místě o souřadnici a a částice v místě o souřadnici b, na pořadí nezávisí.
(c) Navazuje na předchozí. Jaký výsledek bychom dostali pro totožné bosony? Jaký výsledek bychom dostali pro identické fermiony? Na spinové stupně volnosti neberte ohled (lze si představit, že všechny částice mají nastavenu stejnou orientaci spinu, a projeví se jen souřadnice). Diskutujte o souvislosti s úvahami o srážce totožných částic.

2. Uvažujte o soustavě N neinteragujících částic o hmotnosti m v jednorozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě o šířce l při teplotě T. Stanovte poměr mezi pravděpodobností nalezení soustavy v základním stavu (o energii NE_1, kde E_1 je energie základního jednočásticového stavu) a pravděpodobností nalezení soustavy ve stavu o energii $(N-1)E_1+E_2$ (E_2 je energie prvního excitovaného jednočásticového stavu)
(a) pro případ, že jde o odlišitelné částice a
(b) pro případ, že jde o totožné bosony.
Neberte ohled na spinové stupně volnosti. Pravděpodobnost nalezení soustavy ve stavu popsaném daným vlastním vektorem o energii E je úměrná e^{-E/k_BT}.

3. Uvažujte o soustavě N neinteragujících fermionů o hmotnosti m v jednorozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě o šířce l. Vyjádřete sílu, kterou působí na stěnu jámy - tzv. Pauliho tlak. Neberte ohled na spinové stupně volnosti.