MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Vítězslav Novák

INTEGRÁLNÍ POČET V R

Obsah

Kapitola 1

Primitivní funkce

1.1 Definice primitivní funkce

Definice 1.1. Buďte f, F funkce definované na intervalu I. Říkáme, že funkce F je *primitivní* k funkci f na I, jestliže pro každé $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$.

Poznamenejme, že jestliže v předchozí definici některý z krajních bodů

Příklad 1.2. a) Nechť $a \in \mathbf{R}, a > 0$. Jak snadno ověříme derivováním, funkce $\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

b) Podobně, pro $a > 0$ je funkce $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$ primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ na intervalu (a, ∞) a funkce $\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})$ je primitivní k $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ na intervalu $(-\infty, -a)$. Všechny tři předchozí vztahy lze shrnout do jediného: je-li $c \in \mathbf{R}, c \neq 0$, pak funkce $\ln|x+\sqrt{x^2+c}|$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$ na libovolném intervalu, na němž je funkce $\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$ definována.

Příklad 1.3. a) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x^2+1}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$. Obecněji, derivováním snadno zjistíme: je-li $x_0 \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, pak funkce $\frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{a}$ je primitivní k funkci $\frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

b) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$ a obecněji, funkce $\arcsin \frac{x-x_0}{a}$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}}$ na intervalu (x_0-a, x_0+a) $(x_0 \in \mathbf{R}, a > 0)$.

Je jistě přirozenou otázka, zda ke každé funkci definované na nějakém intervalu existuje na tomto intervalu funkce primitivní. Odpověď – negativní – na tuto otázku nalezneme snadno. Připomeňme, že funkce f se nazývá darbouxovská na intervalu $I \subset D(f)$, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$

funkce $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0, F(0) = 0$ je k ní primitivní na intervalu $(-\infty, \infty)$: pro $x \neq 0$ ověříme vztah $F'(x) = f(x)$ přímým derivováním a $F'(0) = 0 = f(0)$ zjistíme z definice derivace.

Nyní se obrátíme k popisu množiny všech primitivních funkcí k dané funkci na intervalu.

Lemma 1.1. *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Pak pro libovolné $c \in \mathbf{R}$ je také funkce $F + c$ primitivní k f na I.*

Důkaz. Podle předpokladu platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$. Z pravidel pro derivování plyne $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$ a tedy $F + c$ je primitivní k f na I. □

Lemma 1.2. *Nechť F, G jsou primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Pak existuje takové číslo $c \in \mathbf{R}$, že platí $G(x) = F(x) + c$ pro každé $x \in I$.*

Důkaz. Platí $F'(x) = f(x) = G'(x)$ pro $x \in I$, takže funkce F, G mají stejnou derivaci na I. Tedy existuje taková konstanta $c \in \mathbf{R}$, že platí $G(x) = F(x) + c$ identicky na I ([N], Důsledek (3) k Větě 3.2 v kapitole V). □

Z přechozích dvou lemmat plyne

Věta 1.3. *Nechť F je nějaká primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Pak $\{F + c; c \in \mathbf{R}\}$ je množina všech primitivních funkcí k funkci f na I.*

(3) $\int e^x \, dx = e^x$

(4) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a}$ $(a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1)$

(5) $\int \cos x \, dx = \sin x$

(6) $\int \sin x \, dx = -\cos x$

(7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$

(8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x$

(9) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$, obecněji $\int \frac{dx}{(x-x_0)^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x-x_0}{a}$ $(x_0 \in \mathbf{R}, a > 0)$

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$, obecněji $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}} = \arcsin \frac{x-x_0}{a}$ $(x_0 \in \mathbf{R}, a > 0)$

1.2 Základní integrační metody

Lemma 2.1. *Nechť f, g jsou funkce definované na intervalu I a nechť F je primitivní funkce k funkci f, G primitivní funkce k funkci g na I. Pak je $F+G$ primitivní funkce k $f+g$ na I.*

Důkaz. Platí $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$ a tedy $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ pro každé $x \in I$, tj. $F+G$ je primitivní k $f+g$ na I. □

V symbolice neurčitých integrálů lze Lemma 2.1 zapsat takto: $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)\, dx,\ x \in I$.

Přesněji je třeba právě uvedenou rovnost chápat takto: množina všech primitivních funkcí k funkci $f+g$ na intervalu I je totožná s množinou všech funkcí tvaru $F+G$, kde F je libovolná primitivní funkce k f, G libovolná primitivní funkce ke g, na intervalu I. Podobný význam mají všechny identity, které v dalším odvodíme a v nichž vystupují neurčité integrály.

Lemma 2.2. *Nechť F je primitivní funkce k funkci f na intervalu I a nechť $c \in \mathbf{R}$. Pak je cF primitivní k cf na I.*

Důkaz. Platí $F'(x) = f(x)$ pro $x \in I$ a tedy $(cF)'(x) = cF'(x) = cf(x)$ pro $x \in I$, tj. cF je primitivní k cf na I. □

Věta 2.2. (Tzv. metoda per partes.) *Nechť funkce u, v mají derivaci na intervalu I. Pak platí: má-li funkce uv' primitivní funkci F na I, je $uv - F$ primitivní funkce k funkci $u'v$ na I.*

Důkaz. Podle věty o derivaci součinu funkcí ([N], Věta 1.4 v kapitole V) má funkce uv derivaci na I a pro $x \in I$ platí $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Podle předpokladu platí $F'(x) = u(x)v'(x)$ na I. Odtud plyne $(uv - F)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - F'(x) = u'(x)v(x)$, takže $uv - F$ je primitivní funkcí k funkci $u'v$ na I. $\square$

Předpoklady věty jsou splněny zejména tehdy, když derivace v' je spojitá na I, neboť pak je uv' spojitá na I (spojitost u plyne z existence derivace u') a podle Věty 1.2 na I existuje primitivní funkce k funkci uv'.

Pravidlo pro integraci per partes zapisujeme ve tvaru $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$, $x \in I$ a má bohaté praktické využití.

Příklad 2.2. a) Vypočtěte $\int x \cos 2x \, dx$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.
Řešení. Volme $u' = \cos 2x, v = x$, takže $u = \frac{1}{2}\sin 2x, v' = 1$ a dostaneme: $\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$.

b) Vypočtěte $\int \operatorname{arccotg} x\,dx$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

$\left.\frac{a^2}{((x-x_0)^2+a^2)^{n+1}}\right) dx = \frac{x-x_0}{((x-x_0)^2+a^2)^n} + 2n\left(K_n(x_0,a) - a^2K_{n+1}(x_0,a)\right)$. Odtud vyjádříme $K_{n+1}(x_0,a) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-1}{2n}K_n(x_0,a) + \frac{1}{2n}\cdot\frac{x-x_0}{((x-x_0)^2+a^2)^n}\right)$.

Význam tohoto rekurentního vzorce poznáme v příštím paragrafu.

Příklad 2.4. a) Vypočtěte $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ na intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{((x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)^2} = K_2(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}K_1\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

b) Vypočtěte $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ na intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = K_3(0,1) = \frac{3}{4}K_2(0,1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}K_1(0,1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x + \frac{3}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}$.

Věta 2.3. (Substituční metoda.) *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I_1, φ je funkce mající derivaci na intervalu I_2 a nechť $\varphi(I_2) \subseteq I_1$. Pak platí: má-li funkce f primitivní funkci F na I_1, je $F\circ\varphi$ primitivní funkce k funkci $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ na I_2.*

Řešení. Substituce $\arcsin x = t$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = dt$ dává $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} = \frac{\arcsin^3 x}{3}$.

Ukažme na tomto příkladě, že předpoklady Věty 2.3 jsou splněny. Funkce $f(t) = t^2$ je spojitá na intervalu $I_1 = (-\infty, \infty)$ a má zde primitivní funkci $F(t) = \frac{t^3}{3}$, funkce $\varphi(x) = \arcsin x$ má derivaci $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $I_2 = (-1, 1)$ a platí $\varphi(I_2) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq I_1$. Tedy funkce $(F \circ \varphi)(x) = \frac{\arcsin^3 x}{3}$ je primitivní k funkci $(f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = \arcsin^2 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu I_2.

Věta 2.4. (Substituční metoda.) *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I_1, φ je funkce mající nenulovou derivaci na intervalu I_2 a nechť $\varphi(I_2) = I_1$. Pak platí: má-li funkce $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ primitivní funkci F na intervalu I_2, je $F \circ \varphi^{-1}$ primitivní funkce k funkci f na intervalu I_1.*

Důkaz. Protože funkce φ' je darbouxovská na intervalu I_2 a nenabývá zde hodnoty 0, je buď $\varphi'(t) > 0$ pro všechna $t \in I_2$ nebo $\varphi'(t) < 0$ pro všechna $t \in I_2$, takže φ je buď rostoucí nebo klesající na I_2. Tedy je funkce φ spojitá a ryze monotonní na I_2, takže podle věty o derivaci inverzní funkce ([N], Věta 1.6 v kapitole V) funkce φ^{-1} má derivaci na intervalu I_1, přičemž pro $x \in I_1, x = \varphi(t)$ platí $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$. Podle předpokladu platí $F'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ pro $t \in I_2$. Tedy pro $x \in I_1, x = \varphi(t)$ platí

b) Vypočtěte $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,dx$ na intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení. Položme $x = t^3, t \in (-\infty,\infty)$, tedy $dx = 3t^2\,dt$ a dostaneme $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+1}\,dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 3t^2\,dt = 3\int \left(\frac{t^3+t}{t^2+1} - \frac{t}{t^2+1}\right) dt = 3\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right) dt =$ $3(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{x^2} - \ln(\sqrt[3]{x^2}+1))$.

Cvičení

1. Dokažte: jestliže ke dvěma z funkcí $f, g, f+g, f-g$ existuje na intervalu I funkce primitivní, pak existuje i ke zbývajícím dvěma.

2. Udejte příklad funkcí f, g a intervalu I takových, že k $f+g$ existuje na I funkce primitivní, ale k f ani ke g neexistuje.

3. Je možno sestrojit takové funkce f, g na intervalu I, že k f existuje na I primitivní funkce F, ke g existuje na I primitivní funkce G a přitom $F \cdot G$ je na I primitivní k $f \cdot g$?

4. Metodou per partes vypočtěte: a) $\int x^2 \sin x\,dx$, b) $\int (x^3+x^2)e^x\,dx$, c) $\int x\cos^2 x\,dx$, d) $\int e^x \cos x\,dx$, e) $\int 2^x \sin 2x\,dx$, $x \in (-\infty,\infty)$.

5. Ukažte, že metoda per partes vede vždy k cíli u těchto typů neurči-

1.3 Integrování racionálních funkcí

Buď r racionální funkce. Při výpočtu $\int r(x)\,dx$ se můžeme omezit na případ, kdy r je ryze lomená, neboť v opačném případě ji vyjádříme jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Je-li však r ryze lomená, lze ji rozložit na součet parciálních zlomků ([N], Věta 3.5 v kapitole III). V tomto rozkladu vystupují zlomky tvaru

$\frac{a}{x-x_0}$ (odpovídající reálnému kořenu x_0 jmenovatele),

$\frac{a}{(x-x_0)^n}, n \in \mathbf{N}, n > 1$ (odpovídající vícenásobnému reálnému kořenu x_0 jmenovatele),

$\frac{bx+c}{(x-x_0)^2+a^2}$ (odpovídající imaginárnímu kořenu $x_0 \pm ai$ jmenovatele),

$\frac{bx+c}{((x-x_0)^2+a^2)^n}, n \in \mathbf{N}, n > 1$ (odpovídající vícenásobnému imaginárnímu kořenu $x_0 \pm ai$ jmenovatele).

Integrace zlomků $\frac{a}{x-x_0}, \frac{a}{(x-x_0)^n}$ je snadná: substitucí $x-x_0=t$ obdržíme $\int \frac{a}{x-x_0}\,dx = a\int \frac{dt}{t} = a\ln|t| = a\ln|x-x_0|, \int \frac{a}{(x-x_0)^n}\,dx = a\int t^{-n}\,dt = \frac{a}{-n+1}\cdot t^{-n+1} = \frac{a}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^{n-1}}$.

Zlomek $\frac{bx+c}{(x-x_0)^2+a^a}$ upravíme takto: $\frac{bx+c}{(x-x_0)^2+a^2} = \frac{\frac{b}{2}(2x-2x_0)+bx_0+c}{x^2-2x_0x+x_0^2+a^2} = \frac{b}{2}\cdot \frac{2x-2x_0}{x^2-2x_0x+x_0^2+a^2} + (bx_0+c)\cdot\frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}$; nyní $\int \frac{2x-2x_0}{x^2-2x_0x+x_0^2+a^2}\,dx = \ln(x^2 -$

Řešení. Rozklad na parciální zlomky vyjde $\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2-2x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-2x+3}$. Dále vyjádříme $\frac{x}{x^2-2x+3} = \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+1}{x^2-2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-2}{x^2-2x+3} + \frac{1}{(x-1)^2+2}$. Tedy $\int \frac{2x^2-3x+3}{(x-1)(x^2-2x+3)} dx = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx + \int \frac{dx}{(x-1)^2+2} = \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}}$; výsledek platí na intervalu $(-\infty, 1)$ a na intervalu $(1, \infty)$.

c) Vypočtěte $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

Řešení. Rozklad jmenovatele v reálném oboru je $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ a rozklad na parciální zlomky dává $\frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1})) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$. Dále je $\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$; podobně $\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{-\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x-\sqrt{2})+\frac{1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$. Odtud $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4} (\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x -1))$ na intervalu $(-\infty, \infty)$.

i) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x^2-x+1)^2}$. Ve všech případech určete intervaly, na nichž příslušné primitivní funkce existují.

2. Vypočtěte $\int \frac{x\,dx}{x^4+1}$ jednak rozkladem na parciální zlomky, jednak vhodnou substitucí a zdůvodněte rozdílnost výsledků.

1.4 Integrování jiných funkcí

V tomto paragrafu uvedeme několik typů funkcí, jejichž integraci lze vhodnými substitucemi převést na integrování funkcí racionálních. Pro potřeby dalšího výkladu definujeme nejdříve pojem racionální funkce dvou proměnných. Polynomem v proměnných x, y rozumíme funkci tvaru $P(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{ik} \cdot x^i \cdot y^k$, kde $a_{ik} \in \mathbf{R}$ pro $i = 0, 1, \ldots, m,\ k = 0, 1, \ldots, n$; racionální funkcí v proměnných x, y rozumíme funkci tvaru $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde $P(x,y), Q(x,y)$ jsou polynomy v proměnných x, y. V dalším bude symbol r vždy značit racionální funkci jedné proměnné a symbol R racionální funkci dvou proměnných.

(1) Funkce typu $\mathbf{r}(\sqrt[n]{x})$

Integraci funkcí tohoto typu lze snadno převést na integraci funkcí racio-

Řešení. Položíme $\frac{x+1}{x-1} = t^3$, tj. $x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt$ a dostaneme $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1}\,dx = -6 \cdot \int t \cdot \frac{t^3-1}{2t^3} \cdot \frac{t^2}{(t^3-1)^2}\,dt = -3\int \frac{dt}{t^3-1}$. Primitivní funkci k funkci $\frac{1}{t^3-1}$ dostaneme rozkladem na parciální zlomky ve tvaru $\int \frac{dt}{t^3-1} = \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$. Tedy $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln\left|\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right| + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{3}}$ na libovolném z intervalů $(-\infty,-1), (-1,1), (1,\infty)$.

(3) Funkce typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

U funkcí tohoto typu se můžeme ze zřejmých důvodů omezit pouze na případ, kdy $a \neq 0$ a kdy polynom $p(x) = ax^2+bx+c$ nemá dvojnásobný kořen. Předpokládejme nejdříve, že tento polynom má reálné kořeny x_1, x_2, kde $x_1 < x_2$, takže $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Je-li $a > 0$, je polynom p kladný na intervalech $(-\infty, x_1)$ a (x_2, ∞). Na libovolném z těchto intervalů je $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(x-x_1)^2 \cdot \frac{x-x_2}{x-x_1}} = \sqrt{a} \cdot |x-x_1| \cdot \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}$. Podle bodu (2) substituce $\frac{x-x_2}{x-x_1} = t^2$ vede k integraci racionální funkce. Je-li $a < 0$, je polynom p kladný pouze na intervalu (x_1, x_2). Na tomto intervalu platí $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a \cdot (x-x_1)^2 \cdot \frac{x_2-x}{x-x_1}} = \sqrt{-a} \cdot (x-x_1) \cdot \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}}$, takže

$\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\Big)$ na intervalu $(1,2)$.

Ověřme alespoň na tomto příkladě, že jsou splněny předpoklady Věty 2.4 o substituci. Funkce $f(x)=\frac{x}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$ je definována na intervalu $I_1=(1,2)$, funkce $\varphi(t)=\frac{t^2+2}{t^2+1}$ má zápornou derivaci $\varphi'(t)=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}$ na intervalu $I_2=(0,\infty)$ a platí $\varphi(I_2)=I_1$. Funkce $(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)=-2\cdot\frac{t^2+2}{t^2+1}$ má na I_2 primitivní funkci $F(t)=-2(t+\operatorname{arctg} t)$. Tedy podle Věty 2.4 je funkce $(F\circ\varphi^{-1})(x)=-2\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\right)$ primitivní k funkci f na intervalu I_1.

b) Vypočtěte $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

Řešení. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2-x+1}=x-t$; pak je $x-\sqrt{x^2-x+1}=t$ a ze substituční rovnice vypočteme $x=\frac{t^2-1}{2t-1}, dx=2\cdot\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}\,dt$. Odtud $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=2\int\frac{t^2-t+1}{t\cdot(2t-1)^2}\,dt$; rozkladem na parciální zlomky nalezneme $\int\frac{t^2-t+1}{t(2t-1)^2}\,dt=\ln|t|-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2t-1}-\frac{3}{4}\cdot\ln|2t-1|$. Tedy $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1}-\frac{3}{2}\ln|2x-2\sqrt{x^2-x+1}-1|$ na intervalu $(-\infty,1)$ nebo $(1,\infty)$.

(4) Funkce typu $R(\sin x,\cos x)$

Integraci funkcí tohoto typu lze vždy převést na integraci funkcí racionálních, a to substitucí

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, použijeme substituci $\mathrm{tg}\, x = t$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pak $x = \mathrm{arctg}\, t, dx = \frac{dt}{t^2+1}$ a obdržíme $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int \frac{1}{1+\frac{3}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\, dt = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2} \mathrm{arctg}\, \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \mathrm{arctg}(\frac{1}{2}\, \mathrm{tg}\, x)$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Nalezli jsme tedy primitivní funkci na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkce $f(x) = \frac{1}{1+3\cos^2 x}$ je však spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$, takže k ní musí existovat primitivní funkce na tomto intervalu. Ukážeme, jak se dá tato primitivní funkce sestrojit. Položme $F_\circ(x) = \frac{1}{2} \mathrm{arctg}(\frac{1}{2}\, \mathrm{tg}\, x)$; pak $F_\circ$ je primitivní k f na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} F_\circ(x) = \frac{\pi}{4}$. Položíme-li $F_1(x) = \frac{1}{2} \mathrm{arctg}(\frac{1}{2}\, \mathrm{tg}\, x) + \frac{\pi}{2}$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, je F_1 primitivní k f na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ a platí $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} F_1(x) = \frac{\pi}{4}$. Definujeme nyní funkci F na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ předpisem $F(x) = F_\circ(x)$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), F(x) = F_1(x)$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ a $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$. Pak je F primitivní k f na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ a z Věty 3.3 v [N], kap. V plyne, že existuje i $F'(\frac{\pi}{2})$ a platí $F'(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} F'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2})$. Je tedy F primitivní k f na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Popsaný postup pze nyní opakovat pro intervaly $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}), (\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}), \dots$ a také pro intervaly $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}), (-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}), \dots$

c) Vypočtěte $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx$.

Řešení. Substituce $\mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = t$, z níž plyne $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$ dává $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = 4 \int \frac{t^2-t+1}{(t^2+1)(t^2+3)}\, dt$. Rozklaza integračním znamením funkce typu $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$, kde s je jmenovatel čísla p. Podle části (2) substituce $a + bz = t^s$ a tedy $a + bx^n = t^s$ vede k integraci racionální funkce.

Nechť je nakonec $p \notin \mathbf{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$. Substituce $x^n = z$ vede k neurčitému integrálu $\int z^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot (a+bz)^p \, dz$. Pišme funkci za integračním znamením ve tvaru $z^{\frac{m+1}{n}+p-1} \cdot \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p$. Je-li $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$, jde o funkci typu $R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)$, kde s je jmenovatel čísla p. Podle (2) substituce $\frac{a+bz}{z} = t^s$, tj. $ax^{-n} + b = t^s$ vede k integrování racionální funkce.

Můžeme tedy shrnout:

Binomický integrál $\int x^m (a+bx^n)^p \, dx$, kde $m, n, p \in \mathbf{Q}$ lze převést na integrál z racionální funkce v těchto případech:

1) *$p \in \mathbf{Z}$, a to substitucí $x = t^s$, kde s je společný jmenovatel čísel m, n,*

2) *$\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$, a to substitucí $a + bx^n = t^s$, kde s je jmenovatel čísla p,*

3) *$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$, a to substitucí $ax^{-n} + b = t^s$, kde s je jmenovatel čísla p.*

Příklad 4.5. a) Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{x}}{\ldots} \, dx$ na intervalu $< 0, \infty)$

zlomky nalezneme $\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dt = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$. Celkem $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

Ve všech případech, které jsme dosud popisovali, byly nalezené primitivní funkce elementární. V obecném případě však primitivní funkce k elementární funkci nemusí být elementární. Podle Věty 1.2 sice existuje primitivní funkce ke každé elementární funkci na libovolném intervalu, na němž je tato funkce spojitá, avšak může to být tzv. vyšší funkce. Vyššími funkcemi jsou vyjádřeny např. tyto neurčité integrály:

$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = Si(x), x \in (-\infty, \infty)$, tzv. integrálsinus

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx = Ci(x), x \in (-\infty, 0)$ a $x \in (0, \infty)$, tzv. integrálkosinus

$\int \frac{dx}{\ln x} = Li(x), x \in (0, 1)$ a $x \in (1, \infty)$, tzv. logaritmusintegrál

$\int e^{-x^2}\,dx, x \in (-\infty, \infty)$, tzv. Gaussova funkce

$\int \sin x^2\,dx, \int \cos x^2\,dx, x \in (-\infty, \infty)$, tzv. Fresnelovy funkce.

Vyššími funkcemi jsou rovněž vyjádřeny neurčité integrály typu $\int R(x, \sqrt{p(x)})\,dx$, kde p je polynom 3. nebo 4. stupně nemající vícenásobné kořeny; jsou nazývány eliptickými intergrály (tento název je odůvodněn tím, že integrálem tohoto typu je vyjádřena délka oblouku elipsy). Také binomické integrály vedou k vyšším funkcím, pokud nenastane některý z případů uvedených v části (5). Neexistuje však univerzální pravidlo, kterým by bylo možno vždy rozhodnout, zda se nám nedaří primitivní funkci nalézt jako elementární jen v důsledku nevhodně volených integračních metod nebo zda je to skutečně vyšší funkce.