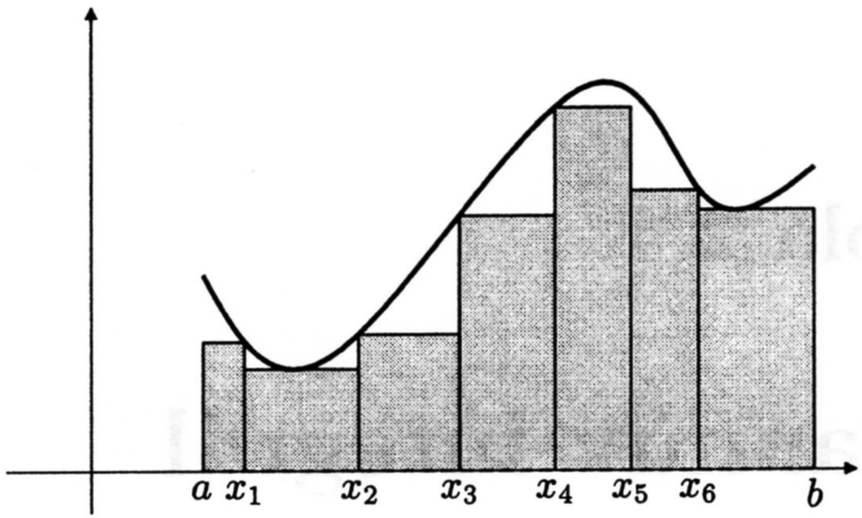
Kapitola 2

Riemannův integrál

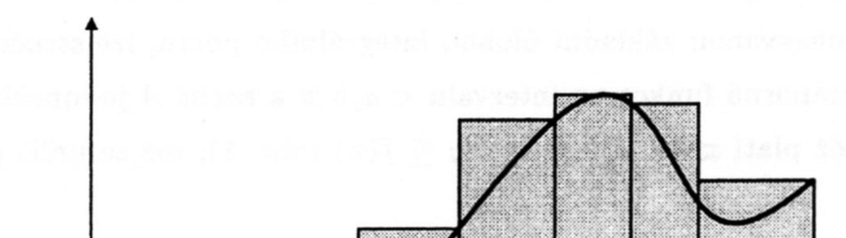
2.1 Definice Riemannova integrálu

K pojmu (určitého) integrálu vede celá řada geometrických a fyzikálních úloh, z nichž jednu z nejstarších, někdy nazývanou základní úlohou integrálního počtu, lze stručně formulovat takto: Buď f spojitá a nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$ a nechť A je množina všech bodů $[x, y]$ v rovině $\mathbf{R}^2$, pro něž platí $x \in< a, b >, 0 \leq y \leq f(x)$ (obr. 1); má se určit plošný obsah (míra) množiny A.



Obr. 2

Podobně, je-li M_k maximální hodnota funkce f na $< x_{k-1}, x_k >$, je $M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ obsah obdélníku o základně $< x_{k-1}, x_k >$ a výšce M_k a $\sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ vyjadřuje obsah mnohoúhelníku, který je nadmnožinou množiny A a který je sjednocením všech těchto obdélníků (obr. 3).



symbolem $\mathcal{D}(< a, b >)$ nebo jen $\mathcal{D}$, pokud bude zřejmé, že se jedná o interval $< a, b >$.

Definice 1.2. Nechť $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ a nechť f je omezená funkce na intervalu $< a, b >$. Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}(< a, b >)$. Označme $m_k = inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, M_k = \sup\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}$ pro $k = 1, \ldots, n$ a položme $s(D, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}), S(D, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$. Číslo $s(D, f)$ nazýváme *dolní součet*, číslo $S(D, f)$ *horní součet* funkce f při dělení D.

Připomeňme, že délku omezeného intervalu I o krajních bodech a, b, tj. číslo $b - a$, značíme symbolem $d(I)$. Označíme-li tedy $< x_{k-1}, x_k >= I_k$, pak dolní a horní součet můžeme zapsat ve tvaru $s(D, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot d(I_k), S(D, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot d(I_k)$.

Lemma 1.1. *Buď f omezená funkce na intervalu $< a, b >$ a nechť $c, d \in \mathbf{R}$ jsou taková čísla, že platí $c \leq f(x) \leq d$ pro každé $x \in < a, b >$. Pak pro libovolná $D_1 \in \mathcal{D}(< a, b >), D_2 \in \mathcal{D}(< a, b >)$ platí $c(b - a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq d(b - a)$.*

Důkaz. 1. Nejdříve ukážeme, že je-li $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}$ libovolné, 1)

Z Lemmatu 1.1 plyne, že obě množiny $\{s(D,f); D \in \mathcal{D}\}, \{S(D,f); D \in \mathcal{D}\}$ jsou omezené. Lze tedy definovat:

Definice 1.3. Buď f omezená funkce na intervalu $< a,b >$. Pak klademe $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(D,f); D \in \mathcal{D}(< a,b >)\}, \overline{\int_a^b} f = \inf\{S(D,f); D \in \mathcal{D}(< a,b >)\}$. Číslo $\underline{\int_a^b} f$ nazýváme *dolním integrálem*, číslo $\overline{\int_a^b} f$ *horním integrálem* funkce f přes interval $< a,b >$.

Věta 1.1. *Buď f omezená funkce na intervalu $< a,b >$ a nechť $c,d \in$ **R** jsou taková čísla, že platí $c \le f(x) \le d$ pro $x \in < a,b >$. Pak platí $c \cdot (b-a) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le d \cdot (b-a)$.*

Důkaz. Nerovnosti $c \cdot (b-a) \le \underline{\int_a^b} f, d \cdot (b-a) \ge \overline{\int_a^b} f$ jsou zřejmé. Buď D_0 nějaké dělení $< a,b >$; podle Lemmatu 1.1 platí $s(D,f) \le S(D_0,f)$ pro každé $D \in \mathcal{D}$, tedy i $\sup\{s(D,f); D \in \mathcal{D}\} = \underline{\int_a^b} f \le S(D_0,f)$. Dělení D_0 však bylo libovolné, takže platí $\underline{\int_a^b} f \le S(D,f)$ pro každé $D \in \mathcal{D}$. Odtud $\inf\{S(D,f); D \in \mathcal{D}\} = \overline{\int_a^b} f \ge \underline{\int_a^b} f$. □

b) Buď f Dirichletova funkce na intervalu $< a, b >$, tj. $f(x) = 1$ pro $x \in \mathbf{Q} \cap < a, b >, f(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{I} \cap < a, b >$. Zjistěte, zda je $f \in \mathcal{R}$ $(< a, b >)$.

Řešení. Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}(< a, b >)$ libovolné. Zřejmě je $m_k = \inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = 0, M_k = \sup\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = 1$ pro každé $k = 1, \ldots, n$. Tedy $s(D, f) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0, S(D, f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = b - a$ pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(< a, b >)$. Odtud $\underline{\int}_a^b f = 0, \overline{\int}_a^b f = (b - a)$, takže f není integrovatelná na $< a, b >$.

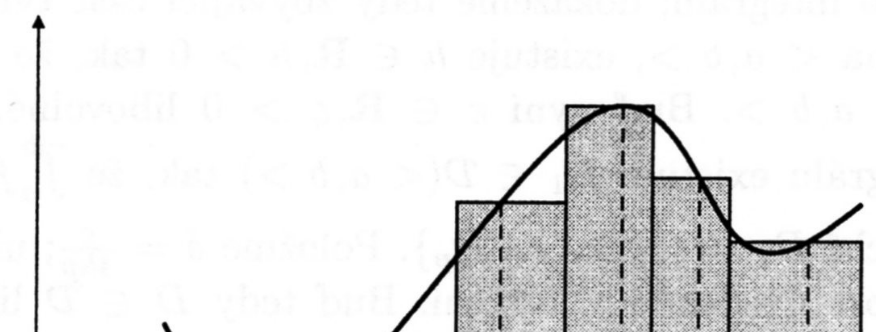
Lemma 1.2. *Buď f omezená funkce na intervalu $< a, b >$. Pak ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D \in \mathcal{D}$ $(< a, b >)$ o $n(D) < \delta$ platí $\overline{\int}_a^b f \leq S(D, f) < \overline{\int}_a^b f + \varepsilon$.*

Důkaz. Nerovnost $\overline{\int}_a^b f \leq S(D, f)$ platí pro každé dělení D podle definice horního integrálu; dokážeme tedy zbývající část tvrzení. Protože f je omezená na $< a, b >$, existuje $h \in \mathbf{R}, h > 0$ tak, že $|f(x)| \leq h$ pro každé $x \in < a, b >$. Buď nyní $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ libovolné. Podle definice horního integrálu existuje $D_1 \in \mathcal{D}(< a, b >)$ tak, že $\overline{\int}_a^b f \leq S(D_1, f) < \overline{\int}_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $D_1 = \{z_0, z_1, \ldots, z_p\}$. Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{4hp}$; ukážeme, že číslo δ má vlastnost uvedenou v tvrzení. Buď tedy $D \in \mathcal{D}$ libovolné takové, Kromě dolních a horních součtů se v úvahách při konstrukci Riemannova integrálu vyskytuje ještě třetí typ součtů, který nyní popíšeme.

Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $< a, b >$ a nechť $c_k \in\ < x_{k-1}, x_k >$ je libovolné číslo pro $k = 1, \ldots, n$. Množinu $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ nazveme ***výběrem z dělicích intervalů*** při dělení D, stručněji výběrem při D.

Definice 1.5. Buď f omezená funkce na intervalu $< a, b >$. Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}(< a, b >)$ a nechť $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ je výběr při D. Číslo $i(D, f, V) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$ nazýváme ***integrálním součtem*** funkce f při dělení D a výběru V.

Geometrický význam čísla $i(D, f, V)$ je patrný z obr. 4.



$\underline{\int}_a^b f, S(D_k, f) \to \overline{\int}_a^b f$. Je-li $f \in \mathcal{R}(<a,b>)$, je $s(D_k, f) \to \int_a^b f, S(D_k, f) \to \int_a^b f$ a $i(D_k, f, V_k) \to \int_a^b f$, kde V_k je libovolný výběr při D_k.

Důkaz. Buď $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ libovolné. Podle Lemmatu 1.2 existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \mathcal{D}$ o $n(D) < \delta$ platí $\overline{\int}_a^b f \leq S(D, f) < \overline{\int}_a^b f + \varepsilon$, tedy i $|S(D, f) - \overline{\int}_a^b f| < \varepsilon$. Protože $n(D_k) \to 0$, existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $k \geq k_0$ je $n(D_k) < \delta$. Tedy je $|S(D_k, f) - \overline{\int}_a^b f| < \varepsilon$ pro $k \geq k_0$, což dokazuje vztah $S(D_k, f) \to \overline{\int}_a^b f$. Podobně se dokáže $s(D_k, f) \to \underline{\int}_a^b f$. Je-li f integrovatelná na $<a,b>$, je $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f = \int_a^b f$, takže $s(D_k, f) \to \int_a^b f, S(D_k, f) \to \int_a^b f$. Vztah $i(D_k, f, V_k) \to \int_a^b f$ plyne z nerovnosti $s(D_k, f) \leq i(D_k, f, V_k) \leq S(D_k, f)$ platné pro všechna $k \in \mathbf{N}$ a z Věty o třech posloupnostech ([N], Věta 5.4 v kapitole IV). □

Z této věty plyne: k výpočtu $\underline{\int}_a^b f, \overline{\int}_a^b f$ (a tedy i $\int_a^b f$, je-li $f \in \mathcal{R}(<a,b>)$) stačí zvolit libovolnou nulovou posloupnost dělení intervalu $<a,b>$, sestavit odpovídající posloupnost dolních, resp. horních součtů a určit její limitu.

Cvičení

3. Nechť f je funkce definovaná na $< a, b >$, která je zde omezena shora a není omezena zdola. Rozhodněte, zda lze definovat $\overline{\int_a^b} f$ jako $\inf\{S(D,f); D \in \mathcal{D}(< a,b >)\}$.

4. Sestrojte omezenou funkci f na intervalu $< 0, 1 >$ takovou, že $\underline{\int_0^1} f = 2, \overline{\int_0^1} f = 5$.

5. Nechť f je funkce definovaná na intervalu $< 0, 1 >$ takto: $f(\frac{1}{n}) = 1$ pro $n \in \mathbf{N}, f(x) = 0$ pro $x \in < 0, 1 > -\{\frac{1}{n}; n \in \mathbf{N}\}$. Dokažte, že $f \in \mathcal{R}(< 0, 1 >)$ a že $\int_0^1 f = 0$.

6. Volbou vhodné nulové posloupnosti dělení a užitím Věty 1.2 vypočtěte $\int_0^1 x, \int_0^1 x^2$.

2.2 Podmínky integrovatelnosti

Lemma 2.1. *Buď f omezená funkce na intervalu $< a, b >$. Pak je $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathcal{D}(< a, b >)$ tak, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$.*

Důkaz. 1. Nechť je podmínka lemmatu splněna. Vzhledem k tomu, že $\Leftarrow$

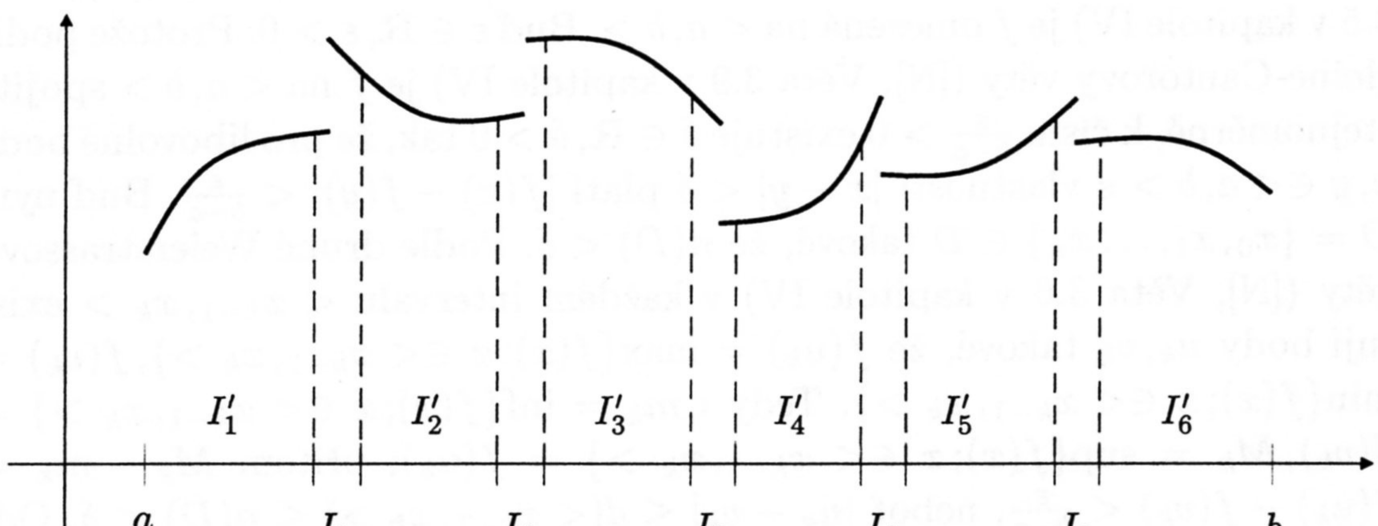
je $m_k = \inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = f(x_{k-1}), M_k = \sup\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = f(x_k)$ pro libovolné $k = 1, \ldots, n$. Odtud $S(D,f) - s(D,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot n(D) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon$. Podle Lemmatu 2.1 je f integrovatelná na $< a, b >$. □

Věta 2.2. *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $< a, b >$. Pak je $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Důkaz. Úvodem poznamenejme, že podle Weierstrassovy věty ([N], Věta 3.5 v kapitole IV) je f omezená na $< a, b >$. Buď $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$. Protože podle Heine-Cantorovy věty ([N], Věta 3.9 v kapitole IV) je f na $< a, b >$ spojitá stejnoměrně, k číslu $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ existuje $\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$ tak, že pro libovolné body $x, y \in < a, b >$ s vlastností $|x - y| < \delta$ platí $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Buď nyní $D = \{x_0, x_1, \ldots x_n\} \in \mathcal{D}$ takové, že $n(D) < \delta$. Podle druhé Weierstrassovy věty ([N], Věta 3.6 v kapitole IV) v každém intervalu $< x_{k-1}, x_k >$ existují body u_k, v_k takové, že $f(u_k) = \max\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, f(v_k) = \min\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}$. Tedy i $m_k = \inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = f(v_k), M_k = \sup\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = f(u_k)$; přitom $M_k - m_k = f(u_k) - f(v_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, neboť $|u_k - v_k| \leq d(< x_{k-1}, x_k >) \leq n(D) < \delta$. Od-

1) 2) 3)

Důkaz. Buď $h \in \mathbf{R}, h > 0$ takové číslo, že platí $|f(x)| \leq h$ pro všechna $x \in < a, b >$. Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ je libovolné a položme $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2h+b-a}$. Pak je $\varepsilon^* > 0$ a tedy existuje konečný počet po dvou disjunktních uzavřených intervalů $I_1, \ldots, I_n \subseteq < a, b >$ tak, že $\sum_{k=1}^{n} d(I_k) < \varepsilon^*$ a že každý bod nespojitosti funkce f, který je vnitřním bodem intervalu $< a, b >$, je vnitřním bodem některého I_k; pokud je některý z bodů a, b bodem nespojitosti funkce f, pak je i krajním bodem příslušného intervalu I_k. Nechť $D_1 \in \mathcal{D}(< a, b >)$ je takové dělení, které jako dělicí body obsahuje kromě bodů a, b právě jen krajní body intervalů $I_1, \ldots, I_n$; toto dělení tedy určuje dělicí intervaly $I_1, \ldots, I_n$ a další dělicí intervaly $I'_1, \ldots, I'_m$ (obr. 5).

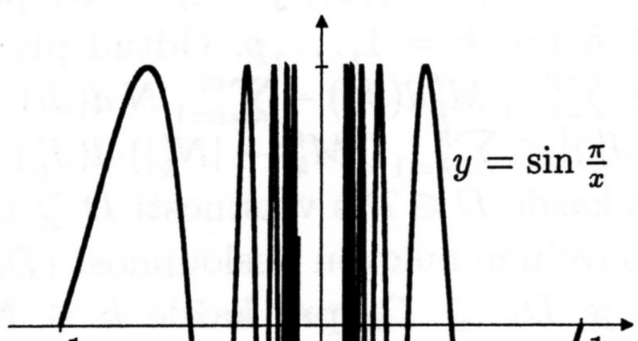


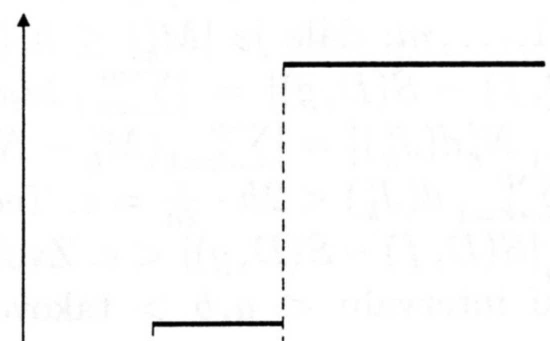
ještě $\bar{M}_k = \sup\{f(x); x \in I_k\}, \bar{m}_k = \inf\{f(x); x \in I_k\}$ pro $k = 1, \dots, n$. Zřejmě platí $|\bar{M}_k| \leq h, |\bar{m}_k| \leq h$, tedy $\bar{M}_k - \bar{m}_k \leq |\bar{M}_k| + |\bar{m}_k| \leq 2h$ pro každé $k = 1, \dots, n$. Odtud plyne $S(D, f) - s(D, f) = \sum_{k=1}^{n} \bar{M}_k d(I_k) + \sum_{i=1}^{t} M_i d(J_i) - \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_k d(I_k) - \sum_{i=1}^{t} m_i d(J_i) = \sum_{k=1}^{n} (\bar{M}_k - \bar{m}_k) d(I_k) + \sum_{i=1}^{t} (M_i - m_i) d(J_i) < 2h \cdot \sum_{k=1}^{n} d(I_k) + \varepsilon^* \cdot \sum_{i=1}^{t} d(J_i) < 2h \cdot \varepsilon^* + \varepsilon^* \cdot (b-a) = \varepsilon^*(2h + b - a) = \varepsilon$. Podle Lemmatu 2.1 je f integrovatelná na $< a, b >$. $\square$

Protože každá konečná množina reálných čísel je zřejmě množinou objemu 0, dostáváme odtud zejména

Důsledek. *Nechť f je omezená funkce na intervalu $< a, b >$, která zde má konečný počet bodů nespojitosti. Pak je $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Příklad 2.1. a) Buď f funkce definovaná na intervalu $< -1, 1 >$ takto: $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ pro $x \neq 0, f(0) = 0$ (obr. 6). Pak je $f \in \mathcal{R}(< -1, 1 >)$, neboť f je omezená na $< -1, 1 >$ a má zde jediný bod nespojitosti 0.





takových, že $d(I_1) + \cdots + d(I_n) < \frac{\varepsilon}{2h}$ a že každý vnitřní bod x intervalu $< a, b >$, pro který je $f(x) \neq g(x)$, je vnitřním bodem některého I_k. Jestliže pro bod a, resp. b také platí $f(a) \neq g(a)$, resp. $f(b) \neq g(b)$, je tento bod krajním bodem některého I_k. Nechť D_0 je ono dělení intervalu $< a, b >$, které obsahuje pouze body a, b a krajní body všech intervalů I_k a nechť $D \in \mathcal{D}$ je libovolné takové, že $D_0 \subseteq D$. Nechť $\{J_1, \ldots, J_m\}$ je množina všech dělicích intervalů příslušných k D, které mají s libovolným intervalem I_k společný nejvýše krajní bod a nechť $\{J_1', \ldots, J_p'\}$ je množina zbývajících dělicích intervalů příslušných k D. Tedy ke každému $i \in \{1, \ldots, p\}$ existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $J_i' \subseteq I_k$. Dále platí $J_1' \cup \cdots \cup J_p' = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ a tedy také $d(J_1') + \cdots + d(J_p') = d(I_1) + \cdots + d(I_n) < \frac{\varepsilon}{2h}$. Označme $M_i = \sup\{f(x); x \in J_i\}, N_i = \sup\{g(x); x \in J_i\}$ pro $i = 1, \ldots, m, M_k' = \sup\{f(x); x \in J_k'\}, N_k' = \sup\{g(x); x \in J_k'\}$ pro $k = 1, \ldots, p$. Protože pro libovolné $i \in \{1, \ldots, m\}$ platí $x \in J_i \Rightarrow f(x) = g(x)$, je $M_i = N_i$ pro $i = 1, \ldots, m$; dále je $|M_k'| \leq h, |N_k'| \leq h$ pro $k = 1, \ldots, p$. Odtud plyne $|S(D, f) - S(D, g)| = \left|\sum_{i=1}^{m} M_i d(J_i) + \sum_{k=1}^{p} M_k' d(J_k') - \sum_{i=1}^{m} N_i d(J_i) - \sum_{k=1}^{p} N_k' d(J_k')\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} (M_k' - N_k') \cdot d(J_k')\right| \leq \sum_{k=1}^{p} (|M_k'| + |N_k'|) \cdot d(J_k') \leq 2h \cdot \sum_{k=1}^{p} d(J_k') < 2h \cdot \frac{\varepsilon}{2h} = \varepsilon$. Tedy pro každé $D \in \mathcal{D}$ s vlastností $D \supseteq D_0$ platí $|S(D, f) - S(D, g)| < \varepsilon$. Zvolme libovolnou nulovou posloupnost (D_k) dělení intervalu $< a, b >$ takovou, že je $D_k \supseteq D_0$ pro každé $k \in \mathbf{N}$.

(a) $f + g \in \mathcal{R}(< a, b >)$,

(b) $f \cdot g \in \mathcal{R}(< a, b >)$.

3. Nechť r je racionální funkce a $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Udejte nutnou a postačující podmínku pro to, aby $r \in \mathcal{R}(< a, b >)$.

4. Dokažte tato tvrzení:

   (a) Každá podmnožina množiny objemu 0 je množinou objemu 0.

   (b) Sjednocení konečného počtu množin objemu 0 je množina objemu 0.

   (c) Množina bodů konvergentní posloupnosti je množina objemu 0.

5. Ukažte na příkladech, že sjednocení spočetného systému množin objemu 0 může, ale nemusí být množinou objemu 0.

6. Sestrojte funkci f na intervalu $< 0, 1 >$ takovou, že f není monotonní, má na $< 0, 1 >$ nekonečně mnoho bodů nespojitosti a přitom $f \in \mathcal{R}(< 0, 1 >)$.

7. Nechť f je omezená funkce na intervalu $< a, b >$ a nechť množina $\{x \in < a, b >; f(x) \neq 0\}$ je množinou objemu 0. Dokažte, že $f \in$

Důkaz. Buď $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}$ a nechť $m_k = \inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, n_k = \inf\{g(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, p_k = \inf\{f(x) + g(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}$ pro $k = 1, \dots, n$. Pro $x \in < x_{k-1}, x_k >$ platí $m_k + n_k \leq f(x) + g(x)$, takže i $m_k + n_k \leq p_k$. Odtud plyne $m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + n_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq p_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ pro $k = 1, \dots, n$. Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, obdržíme $s(D, f) + s(D, g) \leq s(D, f + g)$. Buď (D_k) libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $< a, b >$; podle předchozí úvahy platí $s(D_k, f) + s(D_k, g) \leq s(D_k, f + g)$ pro každé $k \in \mathbf{N}$. Přechodem k limitě pro $k \to \infty$ obdržíme podle Věty 1.2 $\int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int}_a^b (f + g)$. Pro horní součty odvodíme podobně nerovnost $S(D, f + g) \leq S(D, f) + S(D, g)$, z níž limitním přechodem přes nulovou posloupnost dělení plyne $\overline{\int}_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$. Celkem tedy platí $\int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int}_a^b (f + g) \leq \overline{\int}_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$ a odtud plynou obě tvrzení lemmatu. □

1) 2) 3) 4)

Indukcí lze tvrzení Lemmatu 3.1 zřejmě rozšířit na libovolný konečný počet funkcí.

Lemma 3.2. *Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $c \in \mathbf{R}$. Pak je $cf \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a platí $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.*

Důkaz. Je-li $c = 0$, je tvrzení zřejmé. Nechť $c > 0$ a nechť $D =$ 1) 2)

Věta 3.3. *Nechť* $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$. *Pak je* $|f| \in \mathcal{R}(< a, b >)$ *a platí* $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$.

Důkaz. Úvodem poznamenejme, že pro libovolnou funkci g omezenou na libovolném intervalu I platí $\sup\{|g(x)|; x \in I\} - \inf\{|g(x)|; x \in I\} \le \sup\{g(x); x \in I\} - \inf\{g(x); x \in I\}$. Jsou-li totiž $u, v \in I$ libovolné, platí $|g(u)| - |g(v)| \le |g(u) - g(v)| \le \sup\{g(x); x \in I\} - \inf\{g(x); x \in I\}$; přechodem k suprému v prvním členu nalevo v této nerovnosti a k infimu v druhém členu obdržíme tvrzení. Buď nyní $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ libovolné. Podle Lemmatu 2.1 existuje $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}$ takové, že $S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Označíme-li $m_k = \inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, M_k = \sup\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, n_k = \inf\{|f(x)|; x \in < x_{k-1}, x_k >\}, N_k = \sup\{|f(x)|; x \in < x_{k-1}, x_k >\}$, platí podle předchozí úvahy $N_k - n_k \le M_k - m_k$ pro všechna $k = 1, \dots, n$. Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $x_k - x_{k-1}$ a sečteme pro $k = 1, \dots, n$, vyjde $S(D, |f|) - s(D, |f|) = \sum_{k=1}^n (N_k - n_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = S(D, f) - s(D, f) < \varepsilon$. Podle Lemmatu 2.1 je $|f| \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Protože je $f(x) \le |f(x)|, -f(x) \le |f(x)|$ pro všechna $x \in < a, b >$, platí podle Důsledku k Větě 3.2 $\int_a^b f \le \int_a^b |f|, - \int_a^b f \le \int_a^b |f|$ a tedy i $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$. □

Věta 3.4. *Nechť* $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$. *Pak je* $fg \in \mathcal{R}(< a, b >)$.

Nechť nyníf, g jsou libovolné integrovatelné funkce na $< a, b >$. Pak jsou omezené, takže existuje $k \in \mathbf{R}$ takové, že je $f(x) \leq k, g(x) \leq k$ pro všechna $x \in < a, b >$. Tedy je $k - f(x) \geq 0, k - g(x) \geq 0$ na $< a, b >$ a podle Věty 3.2 jsou funkce $k - f, k - g$ integrovatelné na $< a, b >$. Podle první části důkazu je funkce $(k - f) \cdot (k - g) = k^2 - k(f + g) + fg$ integrovatelná na $< a, b >$. Protože $fg = (k - f) \cdot (k - g) + k(f + g) - k^2$, je podle Věty 3.2 funkce fg integrovatelná na $< a, b >$. $\square$

Věta 3.5. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť existuje číslo $c \in \mathbf{R}, c > 0$ takové, že platí $g(x) \geq c$ pro $x \in < a, b >$. Pak je $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}(< a, b >)$.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. K číslu $c^2\varepsilon > 0$ existuje podle Lemmatu 2.1 $D = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}$ takové, že $S(D, g) - s(D, g) < c^2\varepsilon$. Nechť $m_k = \inf\{g(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, M_k = \sup\{g(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, n_k = \inf\{\frac{1}{g(x)}; x \in < x_{k-1}, x_k >\}, N_k = \sup\{\frac{1}{g(x)}; x \in < x_{k-1}, x_k >\}$. Zřejmě je $n_k = \frac{1}{M_k}, N_k = \frac{1}{m_k}$ a $m_k \geq c, M_k \geq c$. Odtud plyne $N_k - n_k = \frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k} = \frac{M_k - m_k}{m_k M_k} \leq \frac{M_k - m_k}{c^2}$. Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem $x_k - x_{k-1}$ a sečteme pro $k = 1, \ldots, n$, vyjde $S(D, \frac{1}{g}) - s(D, \frac{1}{g}) \leq \frac{1}{c^2} (S(D, g) - s(D, g)) < \frac{1}{c^2} \cdot c^2\varepsilon = \varepsilon$. Podle Lemmatu 2.1 je $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a tvrzení plyne z Věty 3.4, neboť $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. $\square$

$s(D_k, f) = s(D'_k, f) + s(D''_k, f), S(D_k, f) = S(D'_k, f) + S(D''_k, f)$. Limitním přechodem pro $k \to \infty$ obdržíme podle Věty 1.2 $\underline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f, \overline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Odtud plynou obě tvrzení věty. $\square$

Tvrzení věty lze zřejmě indukcí zobecnit takto: nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}, a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ a nechť $f \in \mathcal{R}(< a_k, a_{k+1} >)$ pro $k = 1, \ldots, n-1$. Pak je $f \in \mathcal{R}(< a_1, a_n >)$ a platí $\int_{a_1}^{a_n} f = \int_{a_1}^{a_2} f + \int_{a_2}^{a_3} f + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f$.

Věta 3.8. (Tzv. věta o střední hodnotě integrálního počtu.) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $g(x) \geq 0$ pro $x \in < a, b >$. Pak existuje takové číslo $c \in \mathbf{R}$, že $\inf\{f(x); x \in < a, b >\} \leq c \leq \sup\{f(x); x \in < a, b >\}$ a že $\int_a^b fg = c \int_a^b g$.*

Důkaz. Označme $\inf\{f(x); x \in < a, b >\} = m, \sup\{f(x); x \in < a, b >\} = M$. Pro $x \in < a, b >$ je $m \leq f(x) \leq M$, tedy i $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$. Podle Důsledku k Větě 3.2 odtud plyne $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$. Je-li $\int_a^b g = 0$, pak z této nerovnosti plyne $\int_a^b fg = 0$ a tvrzení věty je splněno pro jakékoliv číslo c s vlastností $m \leq c \leq M$. Je-li však $\int_a^b g > 0$, položme $c = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$ a číslo c vyhovuje oběma požadavkům ve větě. $\square$

Cvičení

1. Nechť f, g jsou funkce definované na intervalu $< a, b >$. Dokažte: jsou-li dvě z funkcí $f, g, f+g, f-g$ integrovatelné na $< a, b >$, jsou integrovatelné i zbývající dvě.

2. Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$. Dokažte, že jestliže množina $\{x \in < a, b >; f(x) < 0\}$ je množinou objemu 0, pak $\int_a^b f \geq 0$.

3. Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a $f(x) \geq 0$ pro $x \in < a, b >$. Dokažte: existuje-li $x_0 \in < a, b >$ tak, že $f(x_0) > 0$ a f je spojitá v bodě x_0, pak $\int_a^b f > 0$.

4. Pro funkce f, g definované na intervalu $< a, b >$ definujeme funkce $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ předpisem $\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $\min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Dokažte: je-li $f \in \mathcal{R}(< a, b >), g \in \mathcal{R}(< a, b >)$, pak je $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}(< a, b >), \min\{f, g\} \in \mathcal{R}(< a, b >)$.

5. Pro funkci f definovanou na intervalu $< a, b >$ položme $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = \max\{-f, 0\}$ (funkce f^+, resp. f^- se nazývá kladná, resp. záporná část funkce f). Dokažte, že $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ platí právě tehdy, když je $f^+ \in \mathcal{R}(< a, b >), f^- \in \mathcal{R}(< a, b >)$; v tomto případě je $\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$.

takové, že $|f(x)| \leq h$ pro $x \in< a, b >$. Nechť $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ je libovolné. 1)
Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{h}$; pak pro $x \in< x_0, x_0 + \delta) \cap < a, b >$ platí $|F(x) - F(x_0)| = |\int_a^x f - \int_a^{x_0} f| = |\int_{x_0}^x f| \leq h \cdot (x - x_0) < h\delta = \varepsilon$; použili jsme Důsledek (2) k Větě 3.1. Je tedy F zprava spojitá v bodě x_0. Podobně se dokáže, že F (b)
je zleva spojitá v každém bodě $x_0 \in (a, b >$ a odtud plyne tvrzení. $\square$

Věta 4.2. *Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $x_0 \in< a, b >$. Je-li funkce f spojitá v bodě x_0, má funkce $F(x) = \int_a^x f$ derivaci v bodě x_0 a platí $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že je $x_0 \in< a, b)$ a dokážeme, že funkce F (a)
má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou $f(x_0)$. Nechť $x \in (x_0, b >$ je libovolné číslo; pak $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^x f$. Podle Důsledku 1)
2 k Větě 3.8 existuje číslo c s vlastností $\inf\{f(t); t \in< x_0, x >\} \leq c \leq \sup\{f(t); t \in< x_0, x >\}$ takové, že $\int_{x_0}^x f = c \cdot (x - x_0)$.Označme toto číslo $c(x)$; tím je definována funkce c na intervalu $(x_0, b >$ taková, že $m(x) \leq$ 2)
$c(x) \leq M(x)$ pro $x \in (x_0, b >$, kde $m(x) = \inf\{f(t); t \in< x_0, x >\}, M(x) = \sup\{f(t); t \in< x_0, x >\}$ a že platí $F(x) - F(x_0) = c(x) \cdot (x - x_0)$, tj. $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = c(x)$. Protože funkce f je (zprava) spojitá v bodě x_0, platí $\lim_{x \to x_0+} m(x) = \lim_{x \to x_0+} M(x) = f(x_0)$ a tedy i $\lim_{x \to x_0+} c(x) = f(x_0)$. 3)
Odtud $\lim_{x \to x_0+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$, tj. $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Podobně doká- (b)

Nyní můžeme dokázat Větu 1.2 z kapitoly I.

Věta 4.3 (o existenci primitivní funkce). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu I. Pak k ní na tomto intervalu existuje funkce primitivní.*

Důkaz. Je-li interval I uzavřený, $I =< a, b >$, pak je podle Důsledku k Větě 4.2 funkce $F(x) = \int_a^x f$ primitivní funkcí k f na $< a, b >$. V obecném případě zvolme nějaké číslo $c \in I$ a položme $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in I$. Funkce F je definována na I, neboť pro $x \in I, x \neq c$ je f spojitá a tedy integrovatelná na intervalu o krajních bodech c, x; pro $x = c$ je pak $F(c) = 0$. Buď $x \in I$ libovolný bod. Zvolme čísla $a, b \in I$ tak, že $a \leq \min\{c, x_0\}, b \geq \max\{c, x_0\}, a < b$. Pak je f spojitá na $< a, b >$ a podle Poznámky 4.1 platí $F'(x_0) = f(x_0)$. Protože $x_0 \in I$ byl libovolný, platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$ a F je primitivní k f na I. □

Je-li f integrovatelná funkce na intervalu $< a, b >$, lze analogicky na $< a, b >$ definovat funkci G předpisem $G(x) = \int_x^b f$ nebo obecněji $G(x) = \int_x^c f$, kde $c \in< a, b >$ (integrál jako funkci dolní meze). Pro tuto funkci platí podobná tvrzení:

Poznámka 4.2. *Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $c \in< a, b >$. Položme $G(x) = \int_x^c f$ pro $x \in< a, b >$. Pak je funkce G spojitá na $< a, b >$. Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in< a, b >$, má funkce G v tomto bodě derivaci*

$q(D)$. Protože g je nerostoucí na intervalu $< x_{k-1}, x_k >$, platí zde $g(x_{k-1}) \geq g(x) \geq g(x_k)$ a současně $\sup\{g(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = g(x_{k-1}), \inf\{g(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\} = g(x_k)$. Odtud plyne $|q(D)| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f| \cdot |g - g(x_{k-1})| \leq h \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) \cdot (x_k - x_{k-1}) = h \cdot (S(D, g) - s(D, g))$. Uvažme nyní funkci $F(x) = \int_a^x f$. Podle Věty 4.1 je F spojitá na $< a, b >$ a podle Weierstrassovy věty existuje $\min\{F(x); x \in < a, b >\} = m, \max\{F(x); x \in < a, b >\} = M$. Pro $x \in < a, b >$ tedy platí $m \leq F(x) \leq M$. Dále je $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f = F(x_k) - F(x_{k-1})$ pro $k = 1, \ldots, n$. Odtud plyne $p(D) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \cdot \int_{x_{k-1}}^{x_k} f = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \cdot (F(x_k) - F(x_{k-1})) = g(x_0)F(x_1) + g(x_1)F(x_2) + \cdots + g(x_{n-1})F(x_n) - (g(x_0)F(x_0) + g(x_1)F(x_1) + \cdots + g(x_{n-1})F(x_{n-1})) = g(x_0)F(x_1) + g(x_1) F(x_2) + \cdots + g(x_{n-1})F(x_n) - (g(x_1)F(x_1) + g(x_2)F(x_2) + \cdots + g(x_{n-1}) F(x_{n-1}) + g(x_n)F(x_n)) = F(x_1)(g(x_0) - g(x_1)) + F(x_2)(g(x_1) - g(x_2)) + \cdots + F(x_n)(g(x_{n-1}) - g(x_n)) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \cdot (g(x_{k-1}) - g(x_k))$; při úpravě jsme využili toho, že $F(x_0) = \int_a^a f = 0$ a že $g(x_n) = g(b) = 0$. Pro každé $k = 1, \ldots, n$ však platí $m \leq F(x_k) \leq M$, takže $m \sum_{k=1}^{n} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} F(x_k) \cdot (g(x_{k-1}) - g(x_k)) = p(D) \leq M \sum_{k=1}^{n} (g(x_{k-1}) - g(x_k))$. Avšak $\sum_{k=1}^{n} (g(x_{k-1}) - g(x_k)) = g(x_0) - g(x_n) = g(a) - g(b) = 1$. Obdrželi jsme tak nerovnost $m \leq p(D) \leq M$. Tedy pro každé $D \in \mathcal{D}$ platí $\int_a^b fg = p(D) + q(D)$, přičemž $m \leq p(D) \leq M$ a $|q(D)| \leq h \cdot (S(D, g) - s(D, g))$.

$< \min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\} >$. Dokažte, že platí $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

2. Uveďte takovou formulaci Věty 3.1 a Věty 3.3, aby platily pro libovolná čísla $a, b \in \mathbf{R}$.
3. Dokažte Poznámku 4.2 přímo, tj. bez užití vztahu $\int_x^c f = -\int_c^x f$.
4. Udejte příklad funkce f integrovatelné na intervalu $< a, b >$, jež není spojitá v bodě $x_0 \in < a, b >$ tak, aby pro funkci $F(x) = \int_a^x f$ platilo:

   a) F nemá derivaci v bodě x_0,

   b) F má derivaci v bodě x_0, avšak $F'(x_0) \neq f(x_0)$.

5. Nechť $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$, φ je spojitá funkce na intervalu I a nechť $\varphi(I) \subseteq < a, b >$. Dokažte, že funkce $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f$ je spojitá na intervalu I.
6. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $< a, b >$, φ je funkce mající derivaci na intervalu I a nechť $\varphi(I) \subseteq < a, b >$. Dokažte, že funkce $F(x) = \int_a^{\varphi(x)} f$ má derivaci na I a pro $x \in I$ platí $F'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x)$.

2.5 Metody výpočtu Riemannova integrálu

Důkaz. Z existence derivace $F'(x) = f(x)$ pro $x \in < a, b >$ plyne, že F je spojitá na $< a, b >$. Tvrzení tedy plyne z Věty 5.1. □

Věta poskytuje pohodlnou metodu pro výpočet $\int_a^b f$, dovedeme-li najít funkci F, která je primitivní k f na $< a, b >$, ev. která je primitivní k f na (a, b) a spojitá v bodech a, b. Číslo $F(b) - F(a)$ se obvykle značí stručněji $[F]_a^b$, takže vzorec uvedený ve větě se zapisuje ve tvaru $\int_a^b f = [F]_a^b$.

Příklad 5.1. a) Vypočtěte $\int_0^\pi \sin x$.
Řešení. Protože funkce $\sin x$ je spojitá na $< 0, \pi >$, je na tomto intervalu integrovatelná. Dále je funkce $-\cos x$ primitivní k funkci $\sin x$ na $(-\infty, \infty)$, tedy i na $< 0, \pi >$. Odtud $\int_0^\pi \sin x = [-\cos x]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2$.

b) Vypočtěte $\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$.

Řešení. Funkce za integračním znamením je spojitá, tedy integrovatelná na intervalu $< \frac{5}{4}, \frac{3}{2} >$. V Příkladě 4.3.a) v kapitole I jsme k ní nalezli primitivní funkci $F(x) = -2\left(\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\right)$ na intervalu $(1, 2)$ a tedy i na intervalu $< \frac{5}{4}, \frac{3}{2} >$. Odtud $\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}} \frac{x\,dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}} = -2\left[\sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}\right]_{\frac{5}{4}}^{\frac{3}{2}}$
$= -2\left(1 + \operatorname{arctg} 1 - \sqrt{3} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) = 2\left(\sqrt{3} - 1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2(\sqrt{3}-1) + \frac{\pi}{6}.$

Řešení. Volíme $u' = x, v = \operatorname{arctg} x$, takže $u = \frac{1}{2}x^2, v' = \frac{1}{x^2+1}$ a dostaneme $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x = \left[\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1}) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[x - \operatorname{arctg} x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Věta 5.3. (Substituční metoda.) *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $< c, d >$. Nechť funkce φ má derivaci na intervalu $< a, b >$, nechť $\varphi' \in \mathcal{R}(< a, b >)$ a nechť $\varphi(< a, b >) \subseteq < c, d >$. Pak platí $\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$.*

Důkaz. Z předpokladů plyne, že funkce $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ je integrovatelná na $< a, b >$. Definujme na intervalu $< c, d >$ funkci F předpisem $F(x) = \int_c^x f$. Podle Důsledku k Větě 4.2 je funkce F primitivní k f na $< c, d >$. Z věty o derivaci složené funkce pak plyne, že funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na intervalu $< a, b >$. Podle Důsledku k Větě 5.1 tedy platí $\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_c^{\varphi(b)} f - \int_c^{\varphi(a)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$. □

Vzorec uvedený ve větě se zapisuje také ve tvaru

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt,$$

který ukazuje, že schéma jeho použití je podobné jako u integrálu neurčitého (Věta 2.3 v kapitole I): v integrálu $\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx$ klademe $\varphi(x) = t, \varphi'(x)\, dx = dt$; musíme však pomocí

4. Užitím některého z předchozích dvou cvičení vypočtěte: a) $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x$, b) $\int_0^2 \frac{x^2-1}{x-1}$, c) $\int_0^1 f$, kde f je na $< 0, 1 >$ definována takto: $f(\frac{1}{2^n}) = 0$ pro $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = 1$ pro $x \in < 0, 1 > - \{\frac{1}{2^n}; n \in \mathbf{N}\}$.

5. Metodou per partes vypočtěte: a) $\int_0^1 xe^{2x}$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x$, c) $\int_1^2 \ln x$, d) $\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \operatorname{arccotg} x$, e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x$.

6. Substituční metodou vypočtěte: a) $\int_0^1 x(x^2-1)^{10}$, b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$, c) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$, d) $\int_0^1 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

2.6 Nevlastní Riemannův integrál

Riemannův integrál jsme konstruovali pro funkce definované na uzavřeném intervalu. V závěru §2 jsme viděli, že je možno hovořit o integrálu funkce f i přes interval otevřený, příp. jednostranně uzavřený. Dva požadavky pro konstrukci integrálu funkce f přes interval I jsou však zásadní: omezenost intervalu I a omezenost funkce f. V tomto paragrafu ukážeme, jak lze pojem integrálu rozšířit i na případy, kdy některý z těchto požadavků (příp. oba) není splněn. Integrály tohoto typu se nazývají nevlastní.

Máme tedy tento výsledek: Nevlastní integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}$ konverguje (a je roven $\frac{1}{k-1}$), je-li $k > 1$ a diverguje, je-li $k \leq 1$.

b) Vyšetřete konvergenci nevlastního integrálu $\int_0^\infty \bar{e}^{kx}$, kde $k \in \mathbf{R}$.
Řešení. Položme opět $F(x) = \int_0^x \bar{e}^{kt}$. Je-li $k \neq 0$, je $F(x) = -\frac{1}{k}\left[\bar{e}^{kt}\right]_0^x = \frac{1}{k}(1 - \bar{e}^{kx})$, takže $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{1}{k}$ pro $k > 0$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ pro $k < 0$. Je-li však $k = 0$, je $F(x) = x$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$. Platí tedy: Nevlastní integrál $\int_0^\infty \bar{e}^{kx}$ konverguje (a je roven $\frac{1}{k}$), je-li $k > 0$ a diverguje, je-li $k \leq 0$.

c) Dokažte konvergenci a vypočtěte $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}$.
Řešení. Podle Poznámky 6.1 stačí vyšetřit oba nevlastní integrály $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}$, $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}$. Položme $F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}$; pak $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$. Tedy $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}$ konverguje a má hodnotu $\frac{\pi}{2}$. Podobně ověříme, že $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}$ konverguje a má hodnotu $\frac{\pi}{2}$. Tedy $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1}$ konverguje a $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} = \pi$.

d) Vyšetřete konvergenci $\int_0^\infty \cos x$.
Řešení. Zde je $F(x) = \int_0^x \cos t = \sin x$ a $\lim_{x\to\infty} F(x)$ neexistuje. Tedy $\int_0^\infty \cos x$ diverguje. Podobně $\int_0^\infty \sin x$ diverguje.

e) Nechť f je funkce definovaná na intervalu $< 0, \infty)$ takto: $f(n) = n$ pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $f(x) = 0$ pro $x \in (n-1, n), n \in \mathbf{N}$. Vyšetřete konvergenci

∞ tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro každá $x, y \in \mathbf{R}, x > x_0, y > x_0$ platí $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$. Avšak $F(y) - F(x) = \int_a^y f - \int_a^x f = \int_x^y f$. $\square$

Věta 6.2. (Srovnávací kritérium.) *Nechť pro $x \in < a, \infty)$ platí $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Konverguje-li integrál $\int_a^\infty g$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f$. Diverguje-li integrál $\int_a^\infty f$, diverguje i integrál $\int_a^\infty g$.*

Důkaz. 1. Nechť integrál $\int_a^\infty g$ konverguje a buď $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ libovolné. Podle Věty 6.1 existuje $x_0 \in \mathbf{R}, x_0 \geq a$ takové, že pro $x, y \in \mathbf{R}, x > x_0, y > x_0$ je $|\int_x^y g| < \varepsilon$. Volme označení tak, že je $y \geq x$. Pak je $|\int_x^y g| = \int_x^y g$, neboť na intervalu $< x, y >$ je $g(t) \geq 0$. Z téhož důvodu je i $|\int_x^y f| = \int_x^y f$. Podle Důsledku k Větě 3.2 je však $\int_x^y f \leq \int_x^y g$. Platí tedy $|\int_x^y f| < \varepsilon$ pro $x > x_0, y > x_0$ a podle Věty 6.1 $\int_a^\infty f$ konverguje.

2. Nechť $\int_a^\infty f$ diverguje. Kdyby $\int_a^\infty g$ konvergoval, pak by podle první části důkazu $\int_a^\infty f$ konvergoval, což je ve sporu s naším předpokladem. Tedy $\int_a^\infty g$ diverguje. $\square$

Věta 6.3. (Limitní srovnávací kritérium.) *Nechť funkce f, g jsou nezáporné na intervalu $< a, \infty)$ a nechť existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Je-li $c < \infty$ a konverguje-li integrál $\int_a^\infty g$, konverguje i integrál $\int_a^\infty f$. Je-li $c > 0$ a diverguje-li integrál $\int_a^\infty g$, diverguje i integrál $\int_a^\infty f$.*

Příklad 6.2. a) Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci integrálu $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}$.
Řešení. Protože $\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{x^2+1}{x^3+1} = 1 > 0$, $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^3+1}$ diverguje.

b) Dokažte, že $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}$ konverguje.
Řešení. Tvrzení plyne ze vztahu $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} = \frac{\pi}{2} < \infty$.

c) Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbf{N}$ a libovolné $a \in \mathbf{R}, a > 0$ integrál $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^{ax}}$ konverguje.
Řešení. Platí $e^{\frac{1}{2}ax} \cdot \frac{x^n}{e^{ax}} = \frac{x^n}{e^{\frac{1}{2}ax}}$ a opakovaným použitím l'Hospitalova pravidla zjistíme $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{\frac{1}{2}ax}} = 0$. Tedy $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^{ax}}$ konverguje.

Věta 6.4. (Nutná podmínka konvergence.) *Nechť integrál* $\int_a^\infty f$ *konverguje a nechť existuje* $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$. *Pak je* $c = 0$.

Důkaz. Předpokládejme naopak, že je $c \neq 0$, např. $c > 0$. Zvolme číslo $k \in \mathbf{R}$ tak, že je $0 < k < c$. Pak existuje $x_1 \in \mathbf{R}, x_1 \geq a$ tak, že pro $x \geq x_1$ je $f(x) > k$. K číslu $\varepsilon = 1$ existuje podle Věty 6.1 $x_0 \in \mathbf{R}, x_0 \geq a$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbf{R}, x > x_0, y > x_0$ platí $|\int_x^y f| < 1$. Zvolme $x \in \mathbf{R}, x > \max\{x_0, x_1\}$ a nechť $y \in \mathbf{R}$ je takové, že $y > x + \frac{1}{k}$. Pak je $x > x_0, y > x_0$ a přitom $|\int_x^y f| = \int_x^y f \geq k(y-x) > 1$ a to je spor. Podobně ověříme, že nemůže platit $c < 0$. Tedy je $c = 0$. $\square$

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že platí $|\int_c^d f| \leq 2k$ pro libovolná $c, d \in \mathbf{R}, c \geq a, d \geq a$, neboť $|\int_c^d f| = |\int_a^d f - \int_a^c f| \leq |\int_a^d f| + |\int_a^c f|$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. K číslu $\frac{\varepsilon}{4k} > 0$ existuje $x_0 \geq a$ takové, že pro $x > x_0$ je $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4k}$. Nechť $x, y \in \mathbf{R}$ jsou taková, že je $x_0 < x < y$. Podle Věty 4.4 existuje $c \in < x, y >$ tak, že platí $\int_x^y fg = g(x)\int_x^c f + g(y)\int_c^y f$. Odtud plyne $|\int_x^y fg| \leq |g(x)| \cdot |\int_x^c f| + |g(y)| \cdot |\int_c^y f| < \frac{\varepsilon}{4k} \cdot 2k + \frac{\varepsilon}{4k} \cdot 2k = \varepsilon$ a podle Věty 6.1 integrál $\int_a^\infty fg$ konverguje. □

Příklad 6.3. a) Nechť $k \in \mathbf{R}, k > 0$. Dokažte, že integrály $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^k}, \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^k}$ konvergují.
Řešení. Položíme-li $f(x) = \sin x$, resp. $f(x) = \cos x$ a $g(x) = \frac{1}{x^k}$, jsou zřejmě splněny předpoklady Věty 6.6.
Specielně tedy konvergují oba integrály $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}, \int_1^\infty \frac{\cos x}{x}$.

b) Dokažte, že integrály $\int_1^\infty \sin x^2, \int_1^\infty \cos x^2$ konvergují.
Řešení. Položme $F(x) = \int_1^x \sin t^2\, dt$. Substituce $t^2 = u$, tj. $t = \sqrt{u}, dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du$ dává $F(x) = \frac{1}{2}\int_1^{x^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2}G(x^2)$, kde $G(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}$. Protože integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ konverguje, existuje vlastní limita $\lim_{x\to\infty} G(x) = c$. Podle věty o limitě složené funkce ([N], Věta 1.7 v kapitole IV) platí $\lim_{x\to\infty} F(x) = \frac{1}{2}c$ a integrál $\int_1^\infty \sin x^2$ konverguje. Podobně ověříme, že $\int_1^\infty \cos x^2$ konverguje.

Jestliže funkce f na intervalu $< a, \infty)$ nemění znaménko a jestliže integrál $\int_a^\infty f$ konverguje, pak zřejmě konverguje absolutně. V obecném případě však může integrál $\int_a^\infty f$ konvergovat a integrál $\int_a^\infty |f|$ divergovat; říkáme pak, že integrál $\int_a^\infty f$ *konverguje neabsolutně.*

Příklad 6.4. Dokažte, že integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}$ konverguje neabsolutně.
Řešení. Podle Příkladu 6.3 a) tento integrál konverguje. Předpokládejme, že konverguje absolutně, tj. že konverguje $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}$. Protože pro všechna $x \in \mathbf{R}$ platí $0 \leq \sin^2 x \leq |\sin x|$, plyne odtud podle Věty 6.2 konvergence integrálu $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}$. Protože $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, konverguje tedy integrál $\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}$. Z Dirichletova kritéria plyne konvergence $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}$. Snadno ověříme, že z konvergence $\int_a^\infty f, \int_a^\infty g$ plyne konvergence $\int_a^\infty (f+g)$ (viz Cvičení 1). Tedy konverguje integrál $\int_1^\infty \left(\frac{1-\cos 2x}{x} + \frac{\cos 2x}{x}\right) = \int_1^\infty \frac{1}{x}$ a to je spor, neboť $\int_1^\infty \frac{1}{x}$ diverguje (Příklad 6.1 a)).

Nyní se budeme zabývat druhým typem nevlastních integrálů, kdy integrujeme neomezenou funkci přes omezený interval. Úvahy a výsledky o těchto typech nevlastních integrálů jsou podobné předchozím tvrzením; proto se omezíme jen na nejzákladnější pojmy a věty.

Definice 6.3. Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a nechť f je funkce definovaná na je funkce definovaná na množině $\cup_{k=1}^{n}(a_{k-1}, a_k)$, pro niž $a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou její singulární body (body $a = a_0, b = a_n$ mohou, ale nemusí být jejími singulárními body). Volme čísla $c_1, \ldots, c_n$ tak, že je $a_0 < c_1 < a_1 < c_2 \cdots < a_{n-1} < c_n < a_n$. O nevlastním integrálu $\int_a^b f$ řekneme, že konverguje, jestliže konvergují všechny nevlastní integrály $\int_{a_{k-1}}^{c_k} f, \int_{c_k}^{a_k} f (k = 1, \ldots, n)$ a jeho hodnotu definujeme jako součet hodnot těchto integrálů.

Příklad 6.5. Nechť $k \in \mathbf{R}, k > 0$; vyšetřete konvergenci nevlastního integrálu $\int_0^1 \frac{1}{x^k}$.

Řešení. Singulárním bodem funkce $\frac{1}{x^k}$ je bod 0. Položme $F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^k}$. Pro $k \neq 1$ je $F(x) = \frac{1}{1-k}\left[\frac{1}{t^{k-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-k}\left(1 - \frac{1}{x^{k-1}}\right)$, takže $\lim_{x\to 0_+} F(x) = \frac{1}{1-k}$, je-li $k < 1$ a $\lim_{x \to 0_+} F(x) = \infty$, je-li $k > 1$. V případě $k = 1$ je však $F(x) = [\ln t]_x^1 = -\ln x$, takže $\lim_{x\to 0_+} F(x) = \infty$. Máme tedy závěr: Nevlastní integrál $\int_0^1 \frac{1}{x^k}$ konverguje (a má hodnotu $\frac{1}{1-k}$), je-li $k < 1$ a diverguje, je-li $k \geq 1$.

Příklad 6.6. a) Dokažte konvergenci integrálu $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a vypočtěte jeho hodnotu.

Řešení. Singulárními body jsou obě meze integrálu; vyšetříme tedy oba integrály $\int^1 \frac{1}{\ldots}$, $\int^0 \frac{1}{\ldots}$. Položíme-li $F(x) = \int^x \frac{1}{\ldots}$, je $F(x) = \arcsin x$

$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{x-1}{x+1}\right)$ a $\lim_{x\to 1+} G(x) = \infty$. Tedy $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}$ diverguje a tudíž i $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}$ diverguje.

Pro nevlastní integrály typu $\int_a^b f$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a b je singulárním bodem funkce f, platí věty analogické k Větám 6.1 - 6.3 a 6.5 - 6.8 (nikoliv ovšem k Větě 6.4). Důkazy se provedou naprosto shodným způsobem. Na ukázku zformulujeme analogie Věty 6.1 a Věty 6.3.

Věta 6.9. (Cauchy-Bolzanovo kritérium.) *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, nechť f je funkce definovaná na intervalu $< a, b)$ a nechť b je jejím singulárním bodem. Nevlastní integrál $\int_a^b f$ konverguje tehdy a jen tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$ existuje $x_0 \in < a, b)$ takové, že pro libovolná $x, y \in (x_0, b)$ platí $|\int_x^y f| < \varepsilon$.*

Věta 6.10. (Limitní srovnávací kritérium.) *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a nechť f, g jsou nezáporné funkce definované na intervalu $< a, b)$. Nechť b je singulárním bodem obou funkcí f, g a nechť existuje $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Je-li $c < \infty$ a konverguje-li integrál $\int_a^b g$, konverguje i integrál $\int_a^b f$. Je-li $c > 0$ a diverguje-li integrál $\int_a^b g$, diverguje i integrál $\int_a^b f$.*

4. Dokažte toto tvrzení: nechť $\int_a^\infty f$ konverguje. Pak platí $\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty f = 0$.

5. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci nevlastních integrálů: a) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}$, b) $\int_0^\infty \frac{x^2+x+1}{x^3+x+1}$, c) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, d) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+1}}$, e) $\int_0^\infty \operatorname{arccotg} x$, f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+2x+3}$, g) $\int_{-\infty}^\infty r(x)$, kde r je racionální funkce, jejíž jmenovatel nemá reálné kořeny, h) $\int_0^\infty e^{ax}\cos bx (a, b \in \mathbf{R})$.

6. Nechť f je funkce definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$, jež je integrovatelná na každém omezeném intervalu. K definici konvergence a hodnoty nevlastního integrálu $\int_{-\infty}^\infty f$ je možno zvolit jinou „přirozenou" cestu: Pro $x \in \mathbf{R}$ $x > 0$ položme $F(x) = \int_{-x}^x f$; existuje-li vlastní $\lim_{x\to\infty} F(x)$, řekneme, že $\int_{-\infty}^\infty f$ konverguje a klademe $\int_{-\infty}^\infty f = \lim_{x\to\infty} F(x)$. Vyšetřete vztah této definice k definici podané v Poznámce 6.1.

7. Dokažte, že konvergence a hodnota nevlastního integrálu $\int_a^b f$, jak byla zavedena v Poznámce 6.3, nezávisí na volbě čísel $c_1, \ldots, c_n$.

8. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci nevlastních integrálů: a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$, b) $\int_0^1 \frac{1}{x(x^2+1)}$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$, d) $\int_0^1 \frac{1}{\ln x}$, e) $\int_0^1 x^a \cdot (1-x)^b$,

jeho hlavní hodnotou. Dokažte: Jestliže $\int_a^b f$ konverguje v obvyklém smyslu (tj. ve smyslu definice podané v Poznámce 6.3), pak konverguje ve smyslu hlavní hodnoty a jeho hodnota splývá s jeho hlavní hodnotou. Udejte příklad funkce f, pro niž $\int_a^b f$ diverguje, avšak konverguje ve smyslu hlavní hodnoty.