Obsah

Kapitola 3

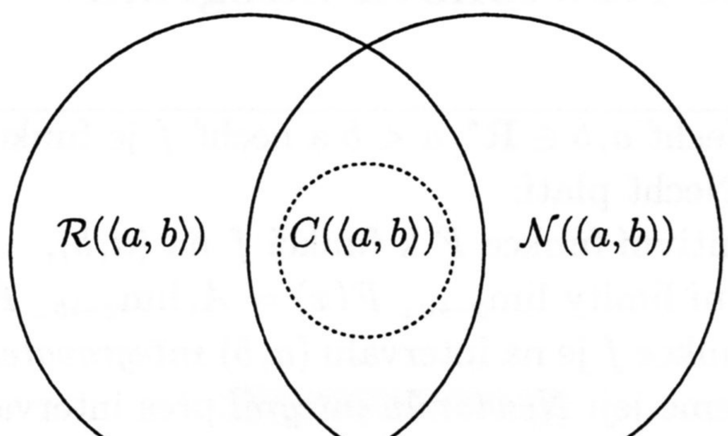
Newtonův integrál

3.1 Definice Newtonova integrálu

Definice 1.1. Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*, a < b$ a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Nechť platí:
(1) existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b),
(2) existují vlastní limity $\lim_{x \to a_+} F(x) = A, \lim_{x \to b_-} F(x) = B$.
Pak říkáme, že funkce f je na intervalu (a, b) *integrovatelná v Newtonově smyslu* a definujeme její *Newtonův integrál* přes interval (a, b) vztahem

Důkaz. Je-li f spojitá na $< a, b >$, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce F (Věta 4.3 v kapitole II). Tedy je F primitivní k f i na (a, b) a je spojitá na $< a, b >$, takže $\lim_{x \to a+} F(x) = F(a) \in \mathbf{R}$, $\lim_{x \to b-} F(x) = F(b) \in \mathbf{R}$. Odtud $f \in \mathcal{N}((a, b))$. $\square$

Pro $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ označme symbolem $\mathcal{C}(< a, b >)$ množinu všech funkcí spojitých na intervalu $< a, b >$. Je-li $f \in \mathcal{C}(< a, b >)$, je $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ (Věta 2.2 v kapitole II) i $f \in \mathcal{N}((a, b))$ (Věta 1.2); jinými slovy, platí $\mathcal{C}(< a, b >) \subseteq \mathcal{R}(< a, b >) \cap \mathcal{N}((a, b))$. Pro množiny $\mathcal{R}(< a, b >), \mathcal{N}((a, b))$ však neplatí ani $\mathcal{R}(< a, b >) \subseteq \mathcal{N}((a, b))$ ani $\mathcal{N}((a, b)) \subseteq \mathcal{R}(< a, b >)$. Vztah mezi množinami $\mathcal{R}(< a, b >), \mathcal{N}((a, b)), \mathcal{C}(< a, b >)$ je znázorněn na obr. 8.



3. Udejte příklad intervalu $< a, b >$ a funkce f na $< a, b >$ tak, že je $f \in \mathcal{R}(< a, b >), f \bar{\in} \mathcal{N}((a, b))$.

4. Udejte příklad intervalu $< a, b >$ a funkce f na $< a, b >$ tak, že je $f \in \mathcal{N}((a, b)), f \bar{\in} \mathcal{R}(< a, b >)$.

5. Udejte příklad intervalu $< a, b >$ a funkce f na $< a, b >$ tak, že je $f \in \mathcal{R}(< a, b >) \cap \mathcal{N}((a, b)), f \bar{\in} \mathcal{C}(< a, b >)$.

3.2 Vlastnosti Newtonova integrálu

Lemma 2.1. *Nechť $f, g \in \mathcal{N}((a, b))$. Pak je i $f + g \in \mathcal{N}((a, b))$ a platí $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.*

Důkaz. Podle předpokladu na (a, b) existuje primitivní funkce F k funkci f i primitivní funkce G k funkci g, přičemž platí $\lim_{x \to a_+} F(x) = A_1 \in \mathbf{R}, \lim_{x \to b_-} F(x) = B_1 \in \mathbf{R}, \lim_{x \to a_+} G(x) = A_2 \in \mathbf{R}, \lim_{x \to b_-} G(x) = B_2 \in \mathbf{R}$. Pak je $F + G$ primitivní funkce k funkci $f + g$ na (a, b) a platí $\lim_{x \to a_+} (F(x) + G(x)) = A_1 + A_2 \in \mathbf{R}, \lim_{x \to b_-} (F(x) + G(x)) = B_1 + B_2 \in \mathbf{R}$, takže $f + g \in \mathcal{N}((a, b))$ a platí $\int_a^b (f + g) = B_1 + B_2 - (A_1 + A_2) = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2) = \int_a^b f + \int_a^b g$. □

a $g(x) - f(x) \geq 0$ pro $x \in (a, b)$. Tedy je $\int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$ a to je tvrzení. $\square$

Věta 2.3. *Nechť $f \in \mathcal{N}((a, b))$ a nechť $(c, d) \subseteq (a, b)$. Pak je $f \in \mathcal{N}((c, d))$.*

Důkaz. Lze předpokládat $a < c < d < b$ (je-li $a = c$ nebo $b = d$, pak se úvahy jen zjednoduší). Podle předpokladu existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b), takže F je spojitá na (a, b) a primitivní k f i na (c, d). Odtud $\lim_{x \to c_+} F(x) = F(c) \in \mathbf{R}, \lim_{x \to d_-} F(x) = F(d) \in \mathbf{R}$ a $f \in \mathcal{N}((c, d))$. $\square$

Věta 2.4. *Nechť $f \in \mathcal{N}((a, b))$ a nechť $c \in \mathbf{R}, a < c < b$. Pak je $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*

Důkaz. Podle Věty 2.3 je $f \in \mathcal{N}((a, c))$ i $f \in \mathcal{N}((c, b))$. Dále existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b), přičemž $\lim_{x \to a_+} F(x) = A \in \mathbf{R}, \lim_{x \to b_-} F(x) = B \in \mathbf{R}$. Protože F je spojitá v bodě c, platí $\lim_{x \to c_-} F(x) = \lim_{x \to c_+} F(x) = F(c)$. Odtud plyne $\int_a^c f + \int_c^b f = (F(c) - A) + (B - F(c)) = B - A = \int_a^b f$. $\square$

Věta 2.5. *Nechť $a, b, c \in \mathbf{R}^*, a < c < b$, nechť $f \in \mathcal{N}((a, c)) \cap \mathcal{N}((c, b))$ a nechť funkce f je spojitá v bodě c. Pak je $f \in \mathcal{N}((a, b))$.*

že $a \in \mathbf{R}$ a že $b = \infty$ nebo b je jediným singulárním bodem funkce f. Podle Věty 2.3 je $f \in \mathcal{N}((a,x))$ a podle definice nevlastního Riemannova integrálu je $f \in \mathcal{R}((< a, x >))$ pro každé $x \in (a,b)$, přičemž podle Věty 1.3 je $(\mathcal{R}) \int_a^x f = (\mathcal{N}) \int_a^x f$ pro každé takové x. Podle předpokladu existuje primitivní funkce F k funkci f na (a,b), přičemž existují vlastní limity $\lim_{x \to a_+} F(x), \lim_{x \to b_-} F(x)$. Dodefinujeme-li funkci F spojitě v bodě a, platí podle Věty 5.1 v kapitole II $(\mathcal{R}) \int_a^x f = F(x) - F(a)$ pro každé $x \in (a,b)$. Avšak $(\mathcal{N}) \int_a^b f = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x) = \lim_{x \to b_-} F(x) - F(a), (\mathcal{R}) \int_a^b f = \lim_{x \to b_-} (\mathcal{R}) \int_a^x f = \lim_{x \to b_-} (F(x) - F(a)) = \lim_{z \to b_-} F(x)$ $-F(a)$ a tedy $(\mathcal{R}) \int_a^b f = (\mathcal{N}) \int_a^b f$. $\square$

Věta 2.7. (Metoda per partes pro Newtonův integrál.) *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*, a < b$ a nechť u, v jsou funkce mající derivaci na intervalu (a,b). Pak platí $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$, mají-li aspoň dva z výrazů vystupujících v této rovnosti smysl.*

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $\int_a^b u'v, \int_a^b uv'$ mají smysl, tj. že je $u'v \in \mathcal{N}((a,b)), uv' \in \mathcal{N}((a,b))$. Existuje tedy primitivní funkce F k funkci $u'v$ a primitivní funkce G k funkci uv' na (a,b) a tyto funkce mají vlastní limity v bodech a, b. Ze vztahu $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) =$

vlastní limity v bodech c, d. Z věty o derivaci složené funkce plyne, že funkce $F \circ \varphi$ je primitivní k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na intervalu (a, b) a z věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x \to a_+} (F \circ \varphi)(x) = \lim_{y \to c_+} F(y)$, $\lim_{x \to b_-} (F \circ \varphi)(x) = \lim_{y \to d_-} F(y)$. Tedy je $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{N}((a, b))$ a platí $\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = [F \circ \varphi]_a^b = [F]_c^d = \int_c^d f$.

Předpokládejme nyní, že je $(f \circ \varphi) \cdot \varphi' \in \mathcal{N}((a, b))$. Protože funkce φ^{-1} je rostoucí na (c, d), $\varphi^{-1}((c, d)) = (a, b)$ a $(\varphi^{-1})'(y) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} > 0$ pro každé $y \in (c, d)$, plyne z první části důkazu, že $(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \cdot (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \cdot \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}} = f \in \mathcal{N}((c, d))$. Zbytek tvrzení nyní plyne z první části důkazu. □

Věta 2.9. (Newtonův integrál jako funkce horní meze.) *Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ a nechť $f \in \mathcal{N}((a, b))$. Pak funkce F definovaná na (a, b) vztahem $F(x) = \int_a^x f$ je primitivní funkcí k funkci f na (a, b).*

Důkaz. Podle Věty 2.3 je $f \in \mathcal{N}((a, x))$ pro každé $x \in (a, b)$, takže funkce F je definována na (a, b). Dále existuje primitivní funkce G k funkci f na (a, b) a platí $\lim_{x \to a_+} G(x) = A \in \mathbf{R}$. Je-li nyní $x \in (a, b)$ libovolný bod, je podle definice $F(x) = (\mathcal{N}) \int_a^x f = G(x) - A$. Tedy je $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$ a funkce F je primitivní k f na (a, b). □

6. Je-li $a, b \in \mathbf{R}^*, a > b$ a $f \in \mathcal{N}((b, a))$, klademe $(\mathcal{N}) \int_a^b f = -(\mathcal{N}) \int_b^a f$. Ukažte, že větu o substituci pro Newtonův integrál lze formulovat takto: Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*, a < b$, nechť φ je funkce mající nenulovou derivaci na (a, b) a nechť $\lim_{x \to a_+} \varphi(x) = c, \lim_{x \to b_-} \varphi(x) = d$. Nechť f je funkce na intervalu o krajních bodech c, d. Pak platí $\int_a^b (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = \int_c^d f$, má-li levá nebo pravá strana v této rovnosti smysl.

3.3 Podmínky integrovatelnosti

Věta 3.1. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}, a < b$ a nechť funkce f je spojitá a omezená na (a, b). Pak je $f \in \mathcal{N}((a, b))$.*

Důkaz. Buď $k \in \mathbf{R}, k > 0$ takové číslo, že platí $|f(x)| \leq k$ pro všechna $x \in (a, b)$. Podle Věty 4.3 v kapitole II existuje primitivní funkce F k funkci f na (a, b). Nechť $x, y \in (a, b), x < y$. Podle Lagrangeovy věty ([N], Věta 3.2 v kapitole V) existuje číslo $c \in (x, y)$ takové, že platí $F(x) - F(y) = F'(c) \cdot (x - y) = f(c) \cdot (x - y)$. Odtud plyne $|F(x) - F(y)| = |f(c)| \cdot |x - y| \leq k \cdot |x - y|$, takže funkce F je lipschitzovská, specielně tedy stejnoměrně spojitá na (a, b) ([N], Cvičení 10 v §3, kapitole IV). Odtud plyne existence vlastních limit $\lim_{x \to a_+} F(x), \lim_{x \to b_-} F(x)$ ([N], Věta 5.17 v kapitole IV)

Důkaz. Nechť $g \in \mathcal{N}((a,b))$ a buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle Věty 3.2 existuje $x_0 \in < a, b)$ tak, že pro $x, y \in (x_0, b), x < y$ platí $|\int_x^y g| = \int_x^y g < \varepsilon$. Podle Věty 2.2 je však $0 \leq \int_x^y f \leq \int_x^y g$; je tedy i $|\int_x^y f| < \varepsilon$ a $f \in \mathcal{N}((a,b))$. Jestliže je $f \overline{\in} \mathcal{N}((a,b))$, je i $g \overline{\in} \mathcal{N}((a,b))$, neboť kdyby bylo $g \in \mathcal{N}((a,b))$, pak by podle první části důkazu platilo $f \in \mathcal{N}((a,b))$, což je spor. $\square$

Věta 3.4. (Limitní srovnávací kritérium.) *Nechť $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}^*, a < b$ a nechť f, g jsou nezáporné funkce na intervalu $< a, b)$, k nimž na tomto intervalu existují funkce primitivní. Nechť existuje $\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Je-li $c < \infty$ a $g \in \mathcal{N}((a,b))$, je i $f \in \mathcal{N}((a,b))$; je-li $c > 0$ a $g \overline{\in} \mathcal{N}((a,b))$, je i $f \overline{\in} \mathcal{N}((a,b))$.*

Důkaz. Tvrzení lze odvodit z Věty 3.3 stejným postupem, jak byl proveden důkaz Věty 6.3 v kapitole II. $\square$

Věta 3.5. *Nechť $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}^*, a < b$ a nechť f je spojitá funkce na intervalu $< a, b)$. Pak je $f \in \mathcal{N}((a,b))$ tehdy a jen tehdy, když existuje $(\mathcal{R}) \int_a^b f$ jako vlastní nebo jako nevlastní.*

Důkaz. Je-li $b \in \mathbf{R}$ a je-li f omezená na $< a, b)$, je $f \in \mathcal{N}((a,b))$ podle Věty 3.1 a $f \in \mathcal{R}(< a, b >)$ podle Důsledku k Větě 2.3 v kapitole II. Ve všech ostatních případech je $(\mathcal{R}) \int_a^b f$ nevlastní. Protože funkce f je spojitá