# Obsah

# Kapitola 4

# Aplikace integrálu

## 4.1 Obsah rovinných oborů

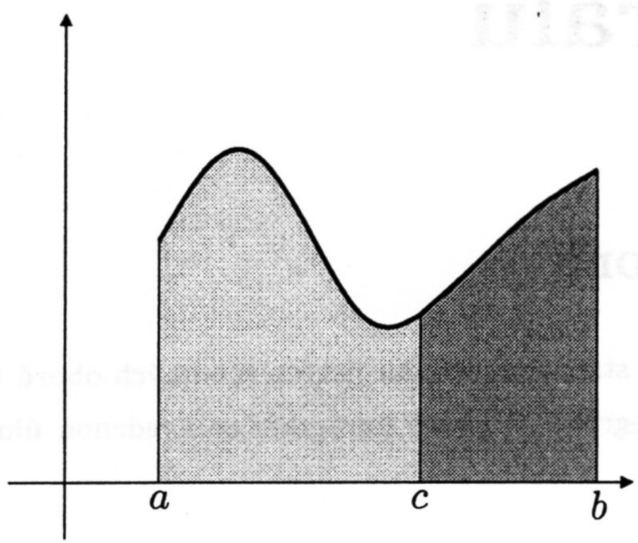
V úvodu ke kapitole II jsme uvedli, že otázka po stanovení obsahu jistých rovinných oborů byla významným podnětem k vybudování pojmu integrálu. V tomto paragrafu se uvedenou úlohou budeme zabývat podrobněji.

**Definice 1.1.** Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ a nechť $f$ je nezáporná funkce definovaná na intervalu $< a, b >$. *Subgrafem* funkce $f$ na intervalu $< a, b >$ rozumíme množinu $S(f; a, b) = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \in < a, b >, 0 \leq$

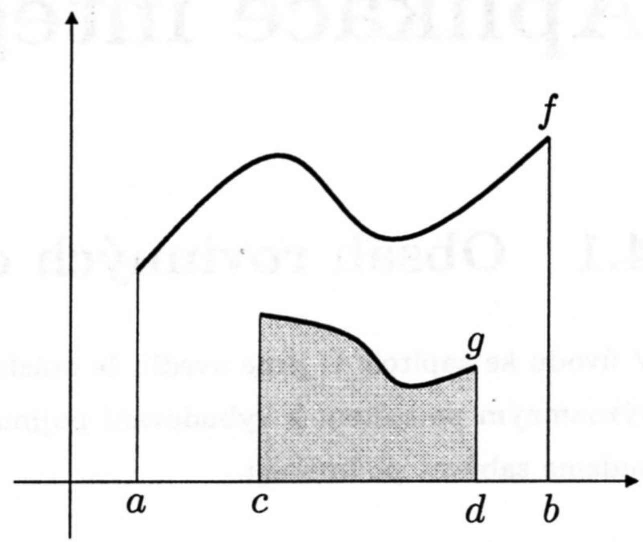
(m3) Je-li $f$ konstantní funkcí na intervalu $< a, b >$, tj. $f(x) = c$ pro $x \in < a, b >$, kde $c \in \mathbf{R}, c \geq 0$, pak je $f \in \mathcal{M}$ a platí $mS(f; a, b) = c \cdot (b - a)$.

Pak číslo $mS(f; a, b)$ nazýváme obsahem (měrou) množiny $S(f; a, b)$.

Názorný význam axiomů (m1) a (m2) plyne z obr. 9 a 10. Axiom (m3) vyjadřuje ten fakt, že obsah obdélníku je roven součinu délek jeho stran.




**Obr. 9**




**Obr. 10**

funkce definovaná na intervalu $< a,b >$. Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je libovolné dělení $< a,b >$ a nechť $m_k = \inf\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}, M_k = \sup\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}$ pro $k = 1, \ldots, n$. Podle (m1) je $mS(f;a,b) = \sum_{k=1}^{n} mS(f; x_{k-1}, x_k)$. Na intervalu $< x_{k-1}, x_k >$ je však $0 \leq m_k \leq f(x) \leq M_k$, takže $S(m_k; x_{k-1}, x_k) \subseteq S(f; x_{k-1}, x_k) \subseteq S(M_k; x_{k-1}, x_k)$. Podle (m2) odtud plyne $mS(m_k; x_{k-1}, x_k) \leq mS(f; x_{k-1}, x_k) \leq mS(M_k; x_{k-1}, x_k)$. Avšak podle (m3) je $mS(m_k; x_{k-1}, x_k) = m_k \cdot (x_k - x_{k-1}), mS(M_k; x_{k-1}, x_k) = M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$. Tedy je $m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq mS(f; x_{k-1}, x_k) \leq M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ pro $k = 1, \ldots, n$ a odtud sečtením $\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq mS(f;a,b) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1})$, tj. $s(D,f) \leq mS(f;a,b) \leq S(D,f)$ pro libovolné $D \in \mathcal{D}(< a,b >)$. Odtud plyne $\sup\{s(D,f); D \in \mathcal{D}\} = \int_a^b f \leq mS(f;a,b) \leq \inf\{S(D,f); D \in \mathcal{D}\} = \int_a^b f$, tj. $mS(f;a,b) = \int_a^b f$. $\square$

**Příklad 1.1.** Najděte obsah subgrafu funkce $\cos x$ na intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$.

Řešení. Je $mS(\cos; -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

**Věta 1.2.** *Buď $f$ spojitá a nezáporná funkce na intervalu $< a,b >$. Pak funkce $F$ daná na $< a,b >$ předpisem $F(a) = 0, F(x) = mS(f;a,x)$ pro $x \in (a,b >$ je primitivní funkcí k funkci $f$ na intervalu $< a,b >$.*

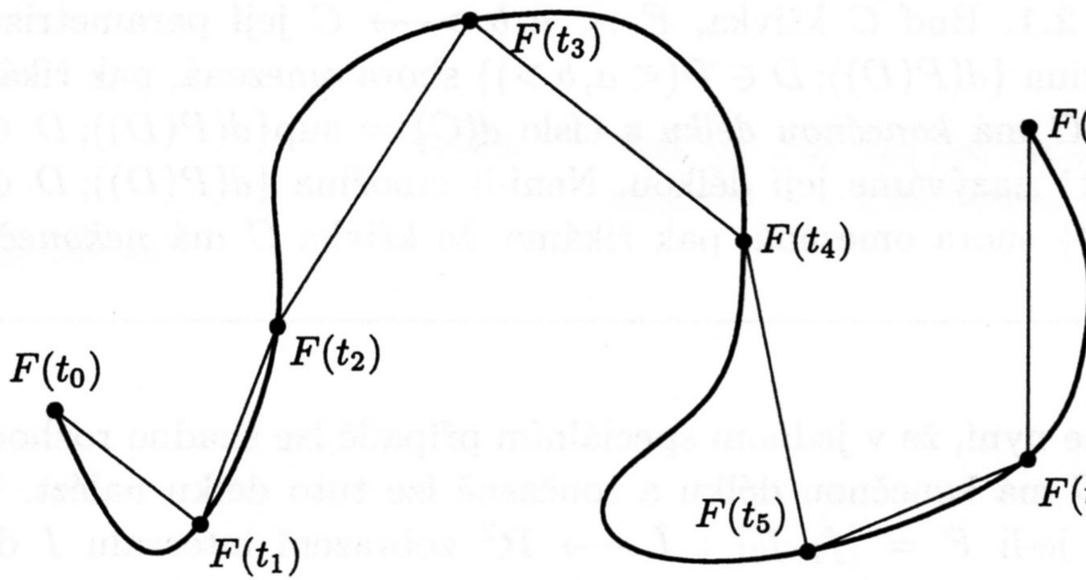
*Důkaz.* Podle Věty 1.1 je $F(x) = mS(f;a,x) = (\mathcal{R}) \int_a^x f$ pro $x \in (a,b >$

4. Podle předchozího cvičení vypočtěte obsah oboru omezeného: a) jedním obloukem cykloidy $C = F(< 0, 2\pi >)$, kde $F(t) = [r(t - \sin t), r(1 - \cos t)]$ a první souřadnou osou, b) obloukem asteroidy $C = F (< 0, \frac{\pi}{2} >)$, kde $F(t) = [r\cos^3 t, r\sin^3 t]$ a první souřadnou osou.

5. Za předpokladu znalosti vzorce pro obsah kruhové výseče odvoďte, že obsah rovinného oboru omezeného křivkou $\rho = f(\varphi)$, kde $\varphi, \rho$ jsou polární souřadnice v rovině, $f$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$, kde $0 \leq a < b \leq 2\pi$, a polopřímkami $\varphi = a, \varphi = b$ je roven $\frac{1}{2}\int_a^b f^2(\varphi)d\varphi$.

6. Podle předchozího cvičení vypočtěte obsah obrazce omezeného: a) kardioidou $\rho = r(1 + \cos\varphi), \varphi \in< 0, 2\pi > (r > 0)$, b) „polární kružnicí“ $\rho^2 + \varphi^2 = r^2$.

7. Nechť $\mathcal{N}^+$ je množina všech nezáporných funkcí, z nichž každá je definována na nějakém uzavřeném intervalu $< a, b >$ a na $(a, b)$ je inte-




**Obr. 11**

Značí-li dále $d(\overline{XY})$ délku úsečky $\overline{XY}$, pak číslo $d(P(D)) = \sum_{k=1}^{n} d(\overline{F(t_{k-1})F(t_k)})$ vyjadřuje délku lomené čáry $P(D)$.

Protože délka úsečky $\overline{XY}$ v rovině, kde $X = [x_1, x_2]$, $Y = [y_1, y_2]$ je $d(\overline{XY}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$, je tedy $d(P(D)) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f_1(t_k) - f_1(t_{k-1}))^2 + (f_2(t_k) - f_2(t_{k-1}))^2}$.

**Lemma 2.1.** *Buď $C$ křivka, $F : < a, b > \longrightarrow C$ její parametrizace a nechť $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(< a, b >)$. Je-li $D_1 \subseteq D_2$, pak $d(P(D_1)) \le d(P(D_2))$.*

**Definice 2.1.** Buď $C$ křivka, $F :< a, b >\longrightarrow C$ její parametrizace. Je-li množina $\{d(P(D)); D \in \mathcal{D}(< a, b >)\}$ shora omezená, pak říkáme, že křivka $C$ má *konečnou délku* a číslo $d(C) = \sup\{d(P(D)); D \in \mathcal{D}(< a, b >)\}$ nazýváme její délkou. Není-li množina $\{d(P(D)); D \in \mathcal{D}(< a, b >)\}$ shora omezená, pak říkáme, že křivka $C$ má *nekonečnou délku.*

Ukážeme nyní, že v jednom speciálním případě lze snadno rozhodnout, že křivka $C$ má konečnou délku a současně lze tuto délku nalézt. Připomeňme, že je-li $F = [f_1, f_2] : I \longrightarrow \mathbf{R}^2$ zobrazení intervalu $I$ do $\mathbf{R}^2$, pak derivací tohoto zobrazení na intervalu $I$ rozumíme vektorovou funkci $F' = (f_1', f_2') : I \longrightarrow V_2$; předpokládáme přitom existenci obou derivací $f_1', f_2'$ na $I$ ([N], Definice 1.2 v kapitole VII). Dále připomeňme, že je-li $\underline{v} = (v_1, v_2) \in V_2$ dvojrozměrný vektor nad $\mathbf{R}$, pak jeho normou (délkou) rozumíme číslo $\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

**Věta 2.1.** *Buď $C$ křivka, $F :< a, b >\longrightarrow C$ její parametrizace. Má-li zobrazení $F$ spojitou derivaci na $< a, b >$, má $C$ konečnou délku a platí $d(C) = \int_a^b \|F'\|$.*

*Důkaz.* Nechť $F = [f_1, f_2]$, takže $F' = (f_1', f_2')$ a $\|F'\| = \sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}$. Má- 1)

$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|$, kterou snadno dokážeme elementárními úpravami a umocňováním. Je-li $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ libovolné dělení intervalu $< a, b >$ a mají-li čísla $c_k \in (t_{k-1}, t_k), d_k \in (t_{k-1}, t_k)$ týž význam jako v první části důkazu, platí tedy $|\sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(c_k)} - \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)}| \leq |f_2'(c_k) - f_2'(d_k)|$ pro každé $k = 1, \ldots, n$. Označíme-li $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$, obdržíme odtud $|i(D, \|F'\|, V) - d(P(D))| = |\sum_{k=1}^n \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(c_k)} \cdot (t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)} \cdot (t_k - t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n |\sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(c_k)} - \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)}| \cdot (t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n |f_2'(c_k) - f_2'(d_k)| \cdot (t_k - t_{k-1})$. Funkce $f_2'$ je spojitá na intervalu $< a, b >$, tedy podle Heine-Cantorovy věty je zde spojitá stejnoměrně. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné; k číslu $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolná $t', t'' \in < a, b >$ s vlastností $|t' - t''| < \delta$ platí $|f_2'(t') - f_2'(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Jesliže je nyní $n(D) < \delta$, platí $|f_2'(c_k) - f_2'(d_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ pro každé $k = 1, \ldots, n$ a odtud $|i(D, \|F'\|, V) - d(P(D))| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b - a) = \varepsilon$ . Tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $D \in \mathcal{D}(< a, b >)$ s vlastností $n(D) < \delta$ platí $|i(D, \|F'\|, V) - d(P(D))| < \varepsilon$, kde $V = \{c_1, \ldots, c_n\}$ je onen výběr při $D$, pro nějž platí $f_1(t_k) - f_1(t_{k-1}) = f_1'(c_k) \cdot (t_k - t_{k-1})$ pro $k = 1, \ldots, n$.

l.v.

volnou nulovou posloupnost $(D_k)$ dělení intervalu $< a, b >$. Jak jsme viděli v důkazu tvrzení (a), k číslu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje $k_1 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $k \geq k_1$ je $i(D_k, \|F'\|, V_k) > \int_a^b \|F'\| - \frac{\varepsilon}{2}$ a $k_2 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $k \geq k_2$ je $d(P(D_k)) > i(D_k, \|F'\|, V_k) - \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolíme-li tedy libovolně $k \in \mathbf{N}, k \geq \max\{k_1, k_2\}$, bude platit $d(P(D_k)) > \int_a^b \|F'\| - \varepsilon$ a platí (b). □

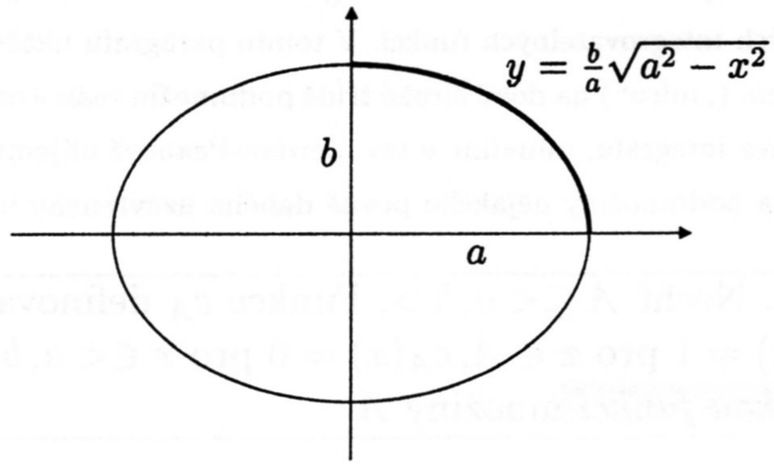
Je-li $f$ spojitá funkce na intervalu $< a, b >$, je $Grf$ křivkou o parametrizaci $F = [x, f] :< a, b > \longrightarrow Grf$. Má-li $f$ na $< a, b >$ derivaci, je $F' = (1, f') :< a, b > \longrightarrow V_2$ a $\|F'\| = \sqrt{1 + f'^2}$. Proto z Věty 2.1 specielně plyne

**Důsledek.** *Nechť $f$ je funkce definovaná na intervalu $< a, b >$, která zde má spojitou derivaci. Pak $Grf$ je křivka konečné délky a platí $d(Grf) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}$.*

**Příklad 2.1.** a) Vypočtěte délku grafu funkce $\ln x$ na intervalu $< \sqrt{3}, \sqrt{8} >$.
Řešení. Je $d(Grf) = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_2^3 (1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1}) dt = [t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1}]_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$; použili jsme substituci $x^2 + 1 = t^2$.

b) Vypočtěte délku asteroidy $C = F(< 0, 2\pi >)$, kde $F(t) = [r \cos^3, r \sin^3 t]$, $r > 0$ (obr. 13).

kvadrantu. Tedy je $d(C) = 4 \cdot d(Grf)$, kde $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, x \in < 0, a >$ (obr. 14).




**Obr. 14**

Pak je $1 + f'^2(x) = 1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^4 - a^2x^2} = \frac{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)(a^4 - a^2x^2)}{(a^4 - a_2x^2)^2}$ a $d(C) = 4\int_0^a \frac{1}{a^4 - a^2x^2} \cdot \sqrt{(a^4 - (a^2 - b^2)x^2)(a^4 - a^2x^2)}$. Protože polynom pod odmocninou je 4. stupně a nemá vícenásobné kořeny, jde o eliptický integrál (srv. závěr 4. paragrafu v kapitole I).

## Cvičení

## 4.3 Jordan-Peanův objem na přímce

V §1 jsme viděli, že s pomocí Riemannova integrálu lze určit obsah jistých rovinných oborů - subgrafů nezáporných integrovatelných funkcí. V tomto paragrafu ukážeme, jak lze pomocí integrálu definovat objem („míru“) na dosti široké třídě podmnožin reálné osy - přímky. Vycházíme-li přitom z Riemannova integrálu, mluvíme o tzv. Jordan-Peanově objemu. V dalším se pro jednoduchost omezíme na podmnožiny nějakého pevně daného uzavřeného intervalu $< a, b >$.

**Definice 3.1.** Nechť $A \subseteq < a, b >$. Funkce $c_A$ definovaná na $< a, b >$ vztahem $c_A(x) = 1$ pro $x \in A, c_A(x) = 0$ pro $x \in < a, b > -A$ se nazývá *charakteristickou funkcí* množiny $A$.

**Definice 3.2.** Označme $\mathcal{M}(< a, b >) = \{A \subseteq < a, b >; c_A \in \mathcal{R}(<a, b>) \}$ a pro libovolnou $A \in \mathcal{M}(< a, b >)$ položme $mA = \int_a^b c_A$. Množinu $\mathcal{M}(< a, b >)$ nazýváme *systémem jordan-peanovsky měřitelných množin* v $< a, b >$ a číslo $mA$ pro $A \in \mathcal{M}(< a, b >)$ nazýváme Jordan-Peanovým objemem množiny $A$.

Název „objem“ se používá proto, že uvedená konstrukce je univerzální, tj. lze ji použít na

*(1)* $A \in \mathcal{M}(< a, b >) \Longrightarrow mA \geq 0.$

*(2)* $A, B \in \mathcal{M}(< a, b >), A \cap B = \emptyset \Longrightarrow m(A \cup B) = mA + mB.$

*(3)* $A, B \in \mathcal{M}(< a, b >), A \subseteq B \Longrightarrow mA \leq mB.$

*(4)* $A, B \in \mathcal{M}(< a, b >), A \subseteq B \Longrightarrow m(B - A) = mB - mA.$

*(5) Je-li* $I \subseteq < a, b >$ *interval, je* $mI = d(I)$.

*(6) Je-li* $A \subseteq < a, b >$ *konečná množina, je* $mA = 0$.

*Důkaz.* (1) je zřejmé.

(2) Pro $A, B \in M(< a, b >), A \cap B = \emptyset$ je zřejmě $c_{A \cup B} = c_A + c_B$. Tedy $m(A \cup B) = \int_a^b (c_A + c_B) = \int_a^b c_A + \int_a^b c_B = mA + mB$.

(3) Je-li $A \subseteq B$, je $c_A(x) \leq c_B(x)$ pro každé $x \in < a, b >$ a tedy $mA = \int_a^b c_A \leq \int_a^b c_B = mB$.

(4) Je-li $A \subseteq B$, je $B = A \cup (B - A)$, přičemž množiny $A$ a $B - A$ jsou disjunktní. Tedy podle (2) je $mB = mA + m(B - A)$ a odtud plyne tvrzení.

(5) Nechť $I$ je interval o krajních bodech $c, d$, takže $a \leq c < d \leq b$. Pak je $mI = \int_a^b c_I = \int_a^c c_I + \int_c^d c_I + \int_d^b c_I = \int_c^d c_I = d - c = d(I)$, neboť na $< a, c)$ i na $(d, b >$ je $c_I(x) = 0$ a na $(c, d)$ je $c_I(x) = 1$.

(6) plyne z Věty 3.4 v kapitole II.

## 4.4 Jiné aplikace

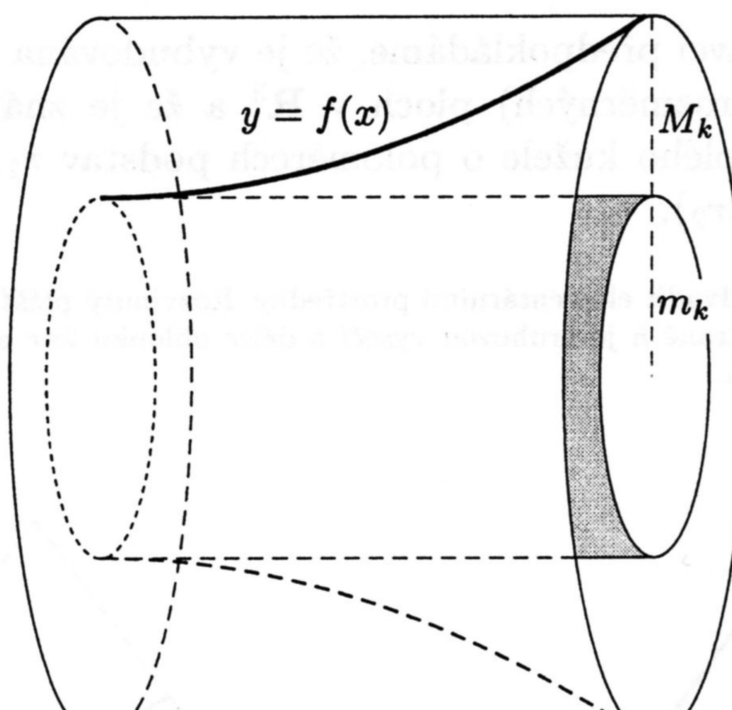
Tento paragraf se poněkud vymyká z rámce ostatních paragrafů této kapitoly i celého textu, neboť v něm pracujeme s pojmy sice intuitivně zřejmými, avšak přesto takovými, které nebyly řádně zavedeny. Jejich přesné definice by vyžadovaly mnoho přípravných úvah a lze je zavést daleko pohodlněji později, po vybudování příslušného matematického aparátu. Paragraf má tedy pouze informativní chrakter, ukazující další možnosti použití jednorozměrného Riemannova integrálu. Proto také získané výsledky formulujeme jako poučky, nikoliv věty; jsou to sice tvrzení pravdivá, ale za předpokladu korektního zavedení pojmů, o nichž pojednávají.

### (1) Objem rotačního tělesa

Budeme předpokládat, že je dán (Jordan-Peanův) objem v $\mathbf{R}^3$ (značíme jej $m_3$ nebo stručněji $m$) a že je známo, že objem přímého kruhového válce o poloměru podstavy $r$ a výšce $h$ je $\pi r^2 h$.

Nechť $f$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$ a nechť $V$ je těleso v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací subgrafu $S(f; a, b)$ funkce $f$ kolem osy $x$ (obr. 15).

$<x_{k-1}, x_k>\}, M_k = \max\{f(x); x \in < x_{k-1}, x_k >\}$ pro $k = 1, \ldots, n$. Rotací subgrafu konstantní funce $m_k$, resp. $M_k$ na intervalu $< x_{k-1}, x_k >$ vznikne přímý kruhový válec $S_k$, resp. $T_k$ o poloměru základny $m_k$, resp. $M_k$ a výšce $(x_k - x_{k-1})$. Tedy je $mS_k = \pi m_k^2 \cdot (x_k - x_{k-1}), mT_k = \pi M_k^2 \cdot (x_k - x_{k-1})$ a $S_k$ je podmnožinou té části tělesa $V$, která přísluší intervalu $< x_{k-1}, x_k >, T_k$ je její nadmnožinou (obr. 16).



Řešení. Koule $V$ o poloměru $r$ a středu v počátku vznikne rotací subgrafu funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, x \in < -r, r >$ kolem osy $x$. Tedy $mV = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) = \pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_{-r}^{r} = \pi (r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3} \pi r^3$.

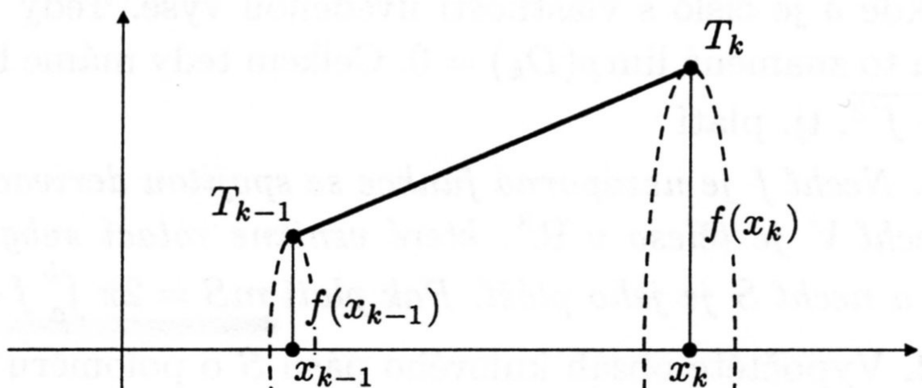
## (2) Obsah pláště rotačního tělesa

V tomto odstavci předpokládáme, že je vybudována teorie obsahu rozvinutelných (dvojrozměrných) ploch v $\mathbf{R}^3$ a že je znám vzorec pro obsah pláště $S$ komolého kužele o poloměrech podstav $r_1, r_2$ a délce strany $h : mS = \pi h (r_1 + r_2)$.

Tento vzorec lze odvodit elementárními prostředky. Rozvinutý plášť (úplného) kužele o poloměru podstavy $r$ a straně $h$ je kruhovou výsečí o délce oblouku $2\pi r$ a poloměru $h$ (obr. 17), takže jeho obsah je $\pi r h$.

nezáporné funkce na $< a, b >$; rotací subgrafu této funkce kolem osy $x$ vznikne rotační těleso $V(D)$, jehož plášť označme $S(D)$. Pro obsah pláště $S$ tělesa $V$ pak platí $mS = \sup\{mS(D); D \in \mathcal{D}(< a, b >)\}$ (tímto vzorcem je možno obsah $mS$ definovat). Úvahou podobnou jako při důkazu Věty 2.1 lze dokázat: je-li $(D_k)$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $< a, b >$, pak platí $\lim mS(D_k) = \sup\{mS(D); D \in \mathcal{D}(< a, b >)\}$. Je tedy $mS = \lim mS(D_k)$.

Buď $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{D}(< a, b >)$ a nechť $S(D)$ má týž význam jako výše. Rotací subgrafu lineární funkce, jejímž grafem je úsečka $\overline{T_{k-1}T_k}$, vznikne komolý kužel o poloměrech podstav $f(x_{k-1}), f(x_k)$ a délce strany $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$ (obr. 19), takže jeho plášť má obsah $\pi \cdot \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \cdot (f(x_{k-1} + f(x_k))$.



$\sqrt{1+f'^2(x)} \le h$ pro $x \in < a, b >$. Buď $\varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ libovolné. Funkce $f$ je spojitá na $< a, b >$, tedy je zde podle Heine-Cantorovy věty spojitá stejnoměrně. K číslu $\frac{\varepsilon}{2\pi h(b-a)} > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné body $x, y \in < a, b >$, pro něž $|x-y| < \delta$, platí $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\pi h(b-a)}$. Jesliže je nyní $n(D) < \delta$, pak $|p(D)| = 2\pi \cdot |\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(c_k)} \cdot (f(d_k) - f(c_k)) \cdot (x_k - x_{k-1}| \le 2\pi \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+f'^2(c_k)} \cdot |f(d_k) - f(c_k)| \cdot (x_k - x_{k-1}) \le 2\pi h \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi h(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$. Nechť je tedy $(D_k)$ nulová posloupnost dělení intervalu $< a, b >$ a pro každé $k \in \mathbf{N}$ nechť $V_k$ je onen výběr při $D_k$, pro nějž platí $mS(D_k) = i(D_k, 2\pi f\sqrt{1+f'^2}, V_k) + p(D_k)$. Protože funkce $f\sqrt{1+f'^2}$ je spojitá, tedy integrovatelná na $< a, b >$, platí podle Věty 1.2 v kapitole II $\lim i(D_k, 2\pi f\sqrt{1+f'^2}, V_k) = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$. Dále, protože $(D_k)$ je nulová, existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $k \ge k_0$ je $n(D_k) < \delta$, kde $\delta$ je číslo s vlastností uvedenou výše. Tedy pro $k \ge k_0$ je $|p(D_k)| < \varepsilon$ a to znamená $\lim p(D_k) = 0$. Celkem tedy máme $\lim mS(D_k) = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$, tj. platí

**Poučka 4.2.** *Nechť $f$ je nezáporná funkce se spojitou derivací na intervalu $< a, b >$, nechť $V$ je těleso v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací subgrafu $S(f; a, b)$ kolem osy $x$ a nechť $S$ je jeho plášť. Pak platí $mS = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+f'^2}$.*

**Příklad 4.2.** Vypočtěte obsah kulového pásu $S$ o poloměru $r$ a výšce $h$.

hmotnost a specifická homotnost, statické momenty a těžiště. Budeme tyto pojmy považovat za známé a za pravdivá přijmeme tato fakta:

(a) Je-li obdélník o obsahu $m$ pokryt hmotou tak, že specifická hmotnost je konstantní a je rovna $s$, pak hmotnost tohoto obdélníku je rovna $s \cdot m$.

(b) Je-li úsečka délky $l$ pokryta hmotou tak, že specifická hmotnost je konstantní a je rovna $s$, pak hmotnost této úsečky je rovna $s \cdot l$.

(c) Hmotnost je aditivní funkcí v tomto smyslu: jsou-li $M_1, \ldots, M_n$ množiny o hmotnostech $H_1, \ldots, H_n$, přičemž žádné dvě různé množiny $M_i, M_k$ nemají společné vnitřní body, pak množina $M_1 \cup \cdots \cup M_n$ má hmotnost $H_1 + \cdots + H_n$.

(d) Statický moment (vzhledem k dané přímce) je aditivní funkcí ve stejném smyslu.

(e) Těžiště množiny $M$ pokryté hmotou je bod o této vlastnosti: kdyby v něm byla soustředěna veškerá hmota množiny $M$, pak vzniklý hmotný bod by měl stejný statický moment vzhledem k libovolné přímce jako množina $M$.

Toto číslo aproximuje hmotnost subgrafu $S(f; a, b)$ dostatečně přesně, pokud dělení $D$ je dostatečně jemné. Zvolíme tedy nulovou posloupnost $(D_k)$ dělení intervalu $< a, b >$; hmotnost $H(S(f; a, b))$ subgrafu funkce $f$ pak lze definovat vztahem $H(S(f; a, b)) = \lim i(D_k, sf, V_k)$. Avšak funkce $sf$ je spojitá a tedy integrovatelná na $< a, b >$, takže $\lim i(D_k, sf, V_k) = \int_a^b sf$. Platí tedy $H(S(f; a, b)) = \int_a^b sf$.
Soustřeďme dále veškerou hmotu obdélníku o základně $< x_{k-1}, x_k >$ a výšce $f(c_k)$ do jeho středu, tj. do bodu $[c_k, \frac{1}{2}f(c_k)]$. Vzniklý hmotný bod má statický moment vzhledem k první, resp. druhé souřadné ose roven $s(c_k) \cdot f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot \frac{1}{2}f(c_k) = \frac{1}{2}s(c_k) \cdot f^2(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$, resp. $s(c_k) \cdot f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot c_k$, takže statický moment sjednocení všech těchto obdélníků vzhledem k první souřadné ose je $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}s(c_k) \cdot f^2(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = i(D, \frac{1}{2}sf^2, V)$ a statický moment vzhledem k druhé souřadné ose je $\sum_{k=1}^n c_k s(c_k) f(c_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = i(D, xsf, V)$. Buď $(D_k)$ nulová posloupnost dělení intervalu $< a, b >$; z důvodů stejných jako nahoře lze definovat statické momenty množiny $S(f; a, b)$ vzhledem souřadným osám vztahy $S_x(S(f; a, b)) = \lim i(D_k, \frac{1}{2}sf^2, V_k) = \frac{1}{2}\int_a^b sf^2$, $S_y(S(f; a, b)) = \lim i(D_k, xsf, V_k) = \int_a^b xsf$.
Buď nakonec $T(S(f; a, b)) = [x_T, y_T]$ těžiště množiny $S(f; a, b)$. Soustředíme-li do tohoto bodu veškerou hmotu množiny $S(f; a, b)$, bude mít tento

Řešení. Daná množina $M$ je subgrafem funkce $f(x) = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}; x \in < 0, a >$ a specifická hmotnost v bodě $[x, y] \in M$ je $s(x) = kx$, kde $k \in \mathbf{R}, k > 0$. Tedy je $H(M) = \int_0^a kx \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{kb}{a} \int_a^0 t^2 dt = \frac{kb}{3a}[t^3]_0^a = \frac{ka^2 b}{3}$; použili jsme substituci $a^2 - x^2 = t^2$. Dále je $S_x(M) = \frac{1}{2} \int_0^a kx \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2) = \frac{kb^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 x - x^3) = \frac{kb^2}{2a^2} \left[\frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{kb^2}{2a^2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{ka^2 b^2}{8}, S_y(M) = \int_0^a kx^2 \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{kb}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 t \cdot a^2 \cos^2 t dt = \frac{ka^3 b}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{ka^3 b}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{ka^3 b}{8} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi k a^3 b}{16}$; byla použita substituce $x = a \sin t$. Tedy $x_T = \frac{\frac{\pi k a^3 b}{16}}{\frac{ka^2 b}{3}} = \frac{3\pi a}{16}, y_T = \frac{\frac{ka^2 b^2}{8}}{\frac{ka^2 b}{3}} = \frac{3b}{8}$ a $T(M) = \left[\frac{3\pi a}{16}, \frac{3b}{8}\right]$.

## (4) Těžiště křivky

Nechť $C$ je křivka v rovině o parametrizaci $F = [f_1, f_2] :< a, b > \longrightarrow C$. Předpokládejme, že zobrazení $F$ má spojitou derivaci na $< a, b >$. Nechť $C$ je pokryta hmotou tak, že specifická hmotnost v bodě $F(t) = [f_1(t), f_2(t)]$ je $s(t)$. Nechť $s$ je spojitá funkce na intervalu $< a, b >$.

Buď $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{D}(< a, b >)$. Nahraďme oblouk křivky $C$ mezi body $F(t_{k-1}) = [f_1(t_{k-1}), f_2(t_{k-1})]$ a $F(t_k) = [f_1(t_k), f_2(t_k)]$ úsečkou spo-

$\frac{\varepsilon}{h\cdot(b-a)} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro $t', t'' \in < a, b >, |t' - t''| < \delta$ platí $|f_2'(t') - f_2'(t'')| < \frac{\varepsilon}{h\cdot(b-a)}$. Je-li $n(D) < \delta$, platí $|f_2'(d_k) - f_2'(c_k)| < \frac{\varepsilon}{h\cdot(b-a)}$ pro každé $k = 1, \dots, n$ a tedy $|i(D, s\|F'\|, V) - H(P(D))| < h \cdot \frac{\varepsilon}{h\cdot(b-a)} \cdot \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \varepsilon$. Nechť $(D_k)$ je nulová posloupnost dělení intervalu $< a, b >$, $V_k$ je odpovídající výběr při $D_k$ pro každé $k \in \mathbf{N}$. Pak existuje $k_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $n(D_k) < \delta$ pro $k \geq k_0$. Tedy pro $k \geq k_0$ platí $|i(D_k, s\|F'\|, V_k) - H(P(D_k))| < \varepsilon$, takže $\lim H(P(D_k)) = \lim i(D_k, s\|F'\|, V_k) = \int_a^b s\|F'\|$ a toto číslo nezávisí na volbě posloupnosti $(D_k)$.

Jestliže dále veškerou hmotu úsečky o krajních bodech $F(t_{k-1}), F(t_k)$ soustředíme do bodu $F(c_k) = [f_1(c_k), f_2(c_k)]$, pak statický moment tohoto hmotného bodu vzhledem k první, resp. druhé souřadné ose bude $f_2(c_k) \cdot s(c_k) \cdot \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)} \cdot (t_k - t_{k-1})$, resp. $f_1(c_k) \cdot s(c_k) \cdot \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)} \cdot (t_k - t_{k-1})$, kde čísla $c_k, d_k$ mají týž význam jako nahoře. Tato čísla vyjadřují přibližnou hodnotu statických momentů úsečky $\overline{F(t_{k-1})F(t_k)}$, takže statické momenty lomené čáry $P(D)$ jsou přibližně $S_x(P(D)) = \sum_{k=1}^{n} f_2(c_k) \cdot s(c_k) \cdot \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)} \cdot (t_k - t_{k-1}), S_y(P(D)) = \sum_{k=1}^{n} f_1(c_k) \cdot s(c_k) \cdot \sqrt{f_1'^2(c_k) + f_2'^2(d_k)} \cdot (t_k - t_{k-1})$. Analogicky jako výše zjistíme, že je-li $(D_k)$ libovolná nulová posloupnost dělení intervalu $< a, b >$, pak existují limity *nost v bodě* $[x, f(x)] \in Grf$ *je* $s(x)$ *a nechť* $s$ *je spojitá funkce na* $< a, b >$. *Pak platí* $H(Grf) = \int_a^b s\sqrt{1+f'^2}$, $S_x(Grf) = \int_a^b sf\sqrt{1+f'^2}$, $S_y(Grf) = \int_a^b sx\sqrt{1+f'^2}$ *a* $T(Grf) = [\frac{S_y(Grf)}{H(Grf)}, \frac{S_x(Grf)}{H(Grf)}]$.

**Příklad 4.4.** a) Najděte souřadnice těžiště křivky $C$, jež je obloukem asteroidy v 1. kvadrantu o parametrizaci $F(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t], t \in< 0, \frac{\pi}{2} >$, je-li specifická hmotnost konstantní a rovna 1.
Řešení.
Protože $s(t) = 1$, je $H(C) = d(C)$ a podle Příkladu 2.1 je $d(C) = \frac{3}{2}a$. Dále je $S_x(C) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2\|F'\| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\ dt = 3a^2\int_0^1 u^4 du = \frac{3}{5}a^2[u^5]_0^1 = \frac{3}{5}a^2$ při substituci $\sin t = u$, $S_y(C) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1\|F'\| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot 3a\sin t\cos t\ dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t\ dt = -3a^2\int_1^0 u^4 du = \frac{3}{5}a^2$ při substituci $\cos t = u$. Tedy je $x_T = \frac{\frac{3}{5}a^2}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{5}a = y_T$ a $T(C) = [\frac{2}{5}a, \frac{2}{5}a]$.

b) Najděte těžiště oblouku $C$ paraboly, jež je grafem funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^2, x \in< 0, 1 >$, je-li pokryt hmotou tak, že specifická hmotnost v bodě $[x, \frac{1}{2}x^2] \in C$ je $s(x) = kx (k > 0)$.

Řešení. Platí $H(C) = \int_0^1 kx \cdot \sqrt{1+x^2}dx = k\int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{k}{3}[t^3]_1^{\sqrt{2}} = \frac{k}{3}(2\sqrt{2} -$

3. Nechť $f$ je spojitá a nezáporná funkce na intervalu $< c, d >$, nechť $F = [f_1, f_2] :< a, b > \to Grf$ je parametrizace jejího grafu. Předpokládejme, že funkce $f_1$ je ryze monotonní na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci. Dokažte (pomocí věty o substituci), že objem tělesa $V$ vzniklého rotací subgrafu funkce $f$ kolem osy $x$ je $mV = \pi \int_a^b f_2^2 \cdot |f_1'|$.
4. Podle předchozího cvičení vypočtěte objem tělesa, které vznikne: a) rotací asteroidy kolem osy $x$, b) rotací jednoho oblouku cykloidy kolem osy $x$.
5. Vypočtěte obsah pláště tělesa vzniklého rotací subgrafu $S(f; a, b)$ kolem osy $x$, kde: a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in < 1, 2 >, b) f(x) = \frac{e^x - \bar{e}^x}{2}, x \in$ $< 0, a > (a \in \mathbf{R}, a > 0)$.
6. Nechť $f$ je nezáporná funkce na intervalu $< c, d >$, nechť $F = [f_1, f_2] :$ $< a, b > \to Grf$ je parametrizace jejího grafu. Nechť $F$ má spojitou derivaci na $< a, b >$ a $f_1$ je ryze monotonní na tomto intervalu. Dokažte, že obsah pláště $S$ tělesa vzniklého rotací subgrafu funkce $f$ kolem osy $x$ je $mS = 2\pi \int_a^b f_2 \|F'\|$.
7. Podle předchozího cvičení vypočtěte obsah pláště tělesa, které vznikne: a) rotací asteroidy kolem osy $x$, b) rotací křivky o parametrizaci

11. Najděte souřadnice těžiště: a) grafu funkce $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + \bar{e}^x), x \in\ < -1, 1 >$, b) jednoho oblouku cykloidy, za předpokladu konstantní specifické hmotnosti.

# Literatura


[B] Berman G. N., *Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza*, Nauka, Moskva 1971.

[D] Demidovič B. P., *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu*, Nauka, Moskva 1964.

[G–N] Grebenča M. K., Novoselov S. I., *Kurs matematičeskogo analiza 1*, Moskva 1951.

[H] Hájek J., *Cvičení z matematické analýzy, integrální počet v* **R**, skriptum MU, Brno 2000.

[J] Jarník V., *Integrální počet I*, Academia Praha 1974.

[N] Novák V., *Diferenciální počet v* **R**, skriptum MU, Brno 1997.