M1101: Matematická analýza I **I. termín: 4. ledna 2011**

ZKOUŠKOVÁ PÍSEMNÁ PRÁCE

ZADÁNÍ:

1. **(5 bodů)** Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}},$$

zderivujte ji a výsledek upravte.

2. **(9 bodů)** Vyšetřete průběh funkce

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

a nakreslete její graf. Určete také rovnici tečny a normály v bodě $x_0 = -1$.
Nápověda: při řešení můžete využít hodnotu derivací

$$g'(x) = \frac{(x-3)\sqrt{x(x-2)}}{(x-2)^2} \quad \text{a} \quad g''(x) = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}.$$

3. **(5 bodů)** Vypočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x}.$$

4. **(4 body)** Určete hromadné body posloupnosti

$$\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right\}_{n=1}^{\infty},$$

limes superior, limes inferior a limitu této posloupnosti.

5. a) **(4 body)** Převeďte integrál

$$\int \frac{(x+3)\sqrt{x+1}-10}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$$

na integrál z racionální lomené funkce. Tento integrál dále již nepočítejte.

b) **(8 bodů)** Vypočtěte

$$\int \frac{2x^3+4x-20}{x^3-1}\,dx.$$

6. **(5 bodů)** Určete obsah plochy vymezené rovnicemi

$$y = x\sin 2x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

- Zadání si můžete ponechat — spravné řešení naleznete v ISu ve studijních materiálech předmětu M1101.
- Ústní část zkoušky začíná ve 13^{00} v učebně MS2 na ÚMS.

M1101: I. termín
4.1.2011

1) $\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} > 0$$

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} > 0$$

$1-\sin x > 0 \ \& \ 1+\sin x > 0 \quad \vee \quad 1-\sin x < 0 \ \& \ 1+\sin x < 0$

$\sin x < 1 \ \& \ \sin x > -1 \quad \vee \quad \sin x > 1 \ \& \ \sin x < -1$

$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ \& \ x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \emptyset$

$\Downarrow$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \cdot \frac{-\cos x(1+\sin x) - (1-\sin x)\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{-2\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{-\cos x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$$

2) $g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$

i) $x \neq 2$ $\quad \frac{x^3}{x-2} \geq 0$

$x^3 \geq 0 \ \& \ x-2 > 0 \quad \vee \quad x^3 \leq 0 \ \& \ x-2 < 0$

$x \geq 0 \ \& \ x > 2 \quad \vee \quad x \leq 0 \ \& \ x < 2$

$x > 2 \qquad x \leq 0$

$$D(g) = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$$

ii) $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \left\| \frac{2}{0^+} \right\| = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \left\| \frac{0}{-2} \right\| = 0$

iii) není lichá, sudá ani periodická

$g(-x) = \sqrt{\frac{-x}{-x-2}} = \sqrt{\frac{x}{x+2}}$

iv) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g(x)$: $+$ | 0 · 2 | $+$

v) $g'(x) = \frac{(x-3)\sqrt{x(x-2)}}{(x-2)^2}$ $\qquad D(g') = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$

vi) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{x(x-2)} = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$

$g'(x)$: $-$ | 0 $\quad$ 2 | $-$ | 3 | $+$

$g(x)$: $\searrow$ 0 $\quad$ 2 $\searrow$ 3 $\nearrow$

lok. min $\quad g(3) = \sqrt{27}$

vii) $g''(x) = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}$ $\qquad D(g'') = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$

viii) $g''(x) = 0 \Leftrightarrow$ nikdy

$g''(x)$: $+$ | 0 $\quad$ 2 | $+$

$g(x)$: $\cup$ 0 $\quad$ 2 $\cup$

nemá inflexní bod

ix) asymptota bez směrnice $x_0 = 2$

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x| \sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\frac{x}{x-2}} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{sgn}(x) \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = \underline{\underline{\pm 1}}$$

$$b: \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - x^2(x-2)}{\sqrt{x-2} \cdot \left(\sqrt{x^3} + x\sqrt{x-2} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{+2x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^3} + x(x-2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{+2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} + 1 - \frac{2}{x}} = \underline{\underline{1}}$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{|x| \cdot \sqrt{|x|}}{\sqrt{|x-2|}} + \frac{x \cdot \sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-2|}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \sqrt{|x|} + x \cdot \sqrt{|x-2|}}{\sqrt{|x-2|}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|^3 - x^2 |x-2|}{\sqrt{|x-2|} \left(|x|\sqrt{|x|} - x \cdot \sqrt{|x-2|} \right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sgn}(x-2) \cdot \frac{x^3 - x^2(x-2)}{\sqrt{x^4 - 2x^3} - x \cdot |x-2|} = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sgn}(x-2) \cdot \frac{2x^2}{x\sqrt{x(x-2)} - x\,|x-2|} =$$

jsme v okolí $-\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sgn}(x-2) \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}} + 1 - \frac{2}{x}} = \underline{\underline{-1}}$$

asymptota se směrnicí v $+\infty$: $y = x+1$

asymptota se směrnicí v $-\infty$: $y = -x-1$

tečna v $x_0 = -1$

$g'(x_0) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$, $g(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$t: y = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{3}(x+1) \quad | \cdot 3\sqrt{3}$

$3\sqrt{3}\, y = 3 - 4(x+1)$

$t: \underline{3\sqrt{3}\, y = -4x - 1}$

normála v $x_0 = -1$

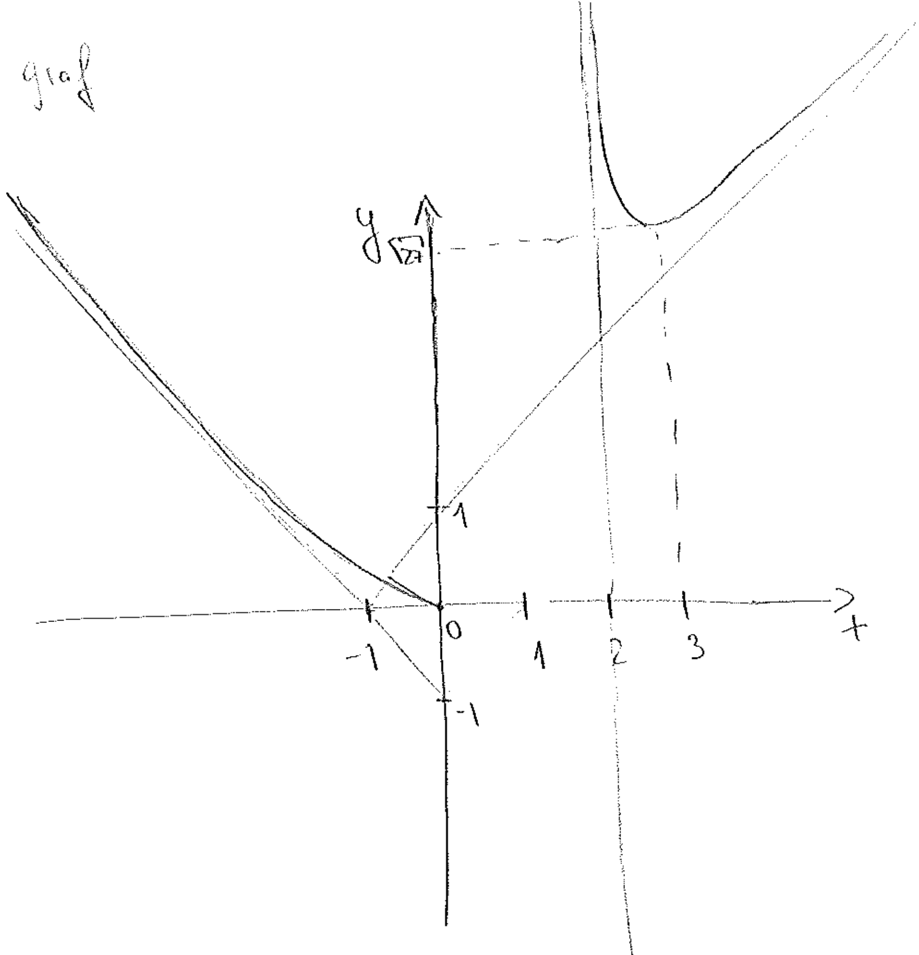
$n: y = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{4}(x+1) \quad | \cdot 12\sqrt{3}$

$12\sqrt{3}\, y = 12 + 27(x+1)$

$n: \underline{12\sqrt{3}\, y = 39 + 27x}$

$n: 4\sqrt{3}\, y = 13 + 9x$

*) graf



3) $$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}\cdot \ln \sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x}} = \underline{\underline{e}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} \left\| \frac{-\infty}{-\infty} \right\| \overset{l'H.p.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cdot \cos x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot \cos x}{\sin x} \left\| \frac{0}{0} \right\| \overset{l'H.p.}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - x\cdot \sin x}{\cos x} = 1$$

nebo: $$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x}\cdot \cos x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}} \cdot \overbrace{\cos x}^{\to 1} = 1$$

4)

$$\left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$n = 3k$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k-1}{3k+1} \cdot \cos \frac{6k\pi}{3} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3-\frac{1}{k}}{3+\frac{1}{k}} \cos 2k\pi = \underline{1}$

$n = 3k+1$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k}{3k+2} \cdot \cos \frac{6k\pi+2\pi}{3} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3}{3+\frac{2}{k}} \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underline{-\frac{1}{2}}$

$n = 3k+2$: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k+1}{3k+3} \cos \frac{6k\pi+4\pi}{3} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3+\frac{1}{k}}{3+\frac{3}{k}} \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underline{-\frac{1}{2}}$

Hromadné body: $\underline{\underline{1, -\frac{1}{2}}}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} = \underline{\underline{1}}$$

5) a) $\displaystyle\int \frac{(x+3)\sqrt{x+1} - 10}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}}\,dx \left| \begin{array}{c} t^2 = x+1 \\ 2t\,dt = dx \\ x = t^2 - 1 \end{array} \right| = \int \frac{(t^2+2)\cdot t - 10}{t^4 - t} \cdot 2t\,dt =$

$$= \underline{\underline{2\int \frac{t^3 + 2t - 10}{t^3 - 1}\,dt}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x-20}{x^3-1}\,dx = 2\int \frac{x^3+2x-10}{x^3-1}\,dx$

$(x^3+2x-10) : (x^3-1) = 1 + \frac{2x-9}{x^3-1}$

$\underline{-x^3+1}$

$2x-9$

kořeny x^3-1

	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

parciální zlomky

M1101: I. termín
4. 1. 2011

$$\frac{2x-9}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$2x-9 = Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

x^2: $0 = A+B$ $\quad$ x^1: $2 = A-B+C$ $\quad$ x^0: $-9 = A-C$

$B = -A$ $\quad$ $2 = A+A+A+9$ $\quad$ $C = A+9$

$B = \frac{7}{3}$ $\quad$ $-7 = 3A$ $\quad$ $C = \frac{20}{3}$

$A = -\frac{7}{3}$

$$\int \frac{2x^3+4x-20}{x^3-1}\,dx = 2\int\left(1-\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7x+20}{x^2+x+1}\right)dx =$$

$$= 2\int\left[1-\frac{7}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{33}{2}\cdot\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right)\right]dx =$$

$$= 2\cdot\left(x-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{6}\ln|x^2+x+1|+\frac{11}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C =$$

$$= \underline{\underline{2x-\frac{14}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x^2+x+1|+\frac{22}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C}}$$

6) $y = x\cdot\sin 2x$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\pi/4} x\sin 2x\,dx \left|\begin{matrix} u=x & u'=1 \\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x & v'=\sin 2x\end{matrix}\right| = \left[-\frac{1}{2}x\cdot\cos 2x\right]_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$