M1101 Matematická analýza I – 18. 01. 2011 – řešení

1. (**4 body**) Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3n^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(\frac{n}{n^2}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(\frac{2\sqrt{n}}{n^2}+\frac{3n^2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n\sqrt{n}}+3} = 0.$$

2. (**6 bodů**) Vypočtěte limitu funkce:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2}\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{4}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Môžeme napríklad použiť L'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{4}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{\left(x^2\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{4}\right)'} = \lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x\cdot\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{4}-\frac{x^2}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{4}{0-4\cdot\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}.$$

3. (**7 bodů**) Určete definiční obor funkce a její první diferenciál:

$$f(x) = \arcsin\frac{x-2}{3} + \ln\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

Řešení:
Prípustné hodnoty premennej x musia súčasne spĺňať tieto nerovnosti:

$$-1 \le \frac{x-2}{3} \le 1 \qquad \wedge \qquad \frac{x-2}{x+2} > 0.$$

Prvá nerovnosť má riešenie $x \in \langle -1,\, 5\rangle$. Druhá nerovnosť má riešenie $x \in (-\infty,\, -2) \cup (2,\, \infty)$ (napr. pomocou metódy nulových bodov). Definičný obor funkcie f je potom prienikom týchto riešení, teda $\mathcal{D}(f) = (2,\, 5\rangle$.
Prvý diferenciál funkcie f:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x) &= f'(x)\mathrm{d}x, \\ f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}} + \frac{2}{x^2-4}, \\ \mathrm{d}f(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}} + \frac{2}{x^2-4}\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

4. (**10 bodů**) Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf:

$$g(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2}.$$

Můžete využít vyjádření druhé derivace

$$g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4\,(x+1)^5}},$$

a limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right) = \frac{1}{3}.$$

Řešení:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, nie je ani lichá, ani sudá, nie je periodická, je spojitá na celom $\mathbb{R}$
- nulové body $x = -1$, $x = 0$, funkcia je záporná na $(-\infty, -1)$ a kladná na $(-1, \infty)$
- monotónnosť a extrémy:

$$g'(x) = \frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x\,(x+1)^2}}.$$

  body podozrivé na extrém – -1, $-\frac{2}{3}$, 0

- konkávnosť, konvexnosť a inflexné body:

$$g''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4\left(x+1\right)^5}}.$$

body podozrivé na inflexiu – -1, 0

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3},0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$+$	nedef.	$+$	0	$-$	nedef.	$+$
f''	$+$	nedef.	$-$	$-$	$-$	nedef.	$-$
f	rast.	inflexia	rast.	lok. max.	kles.	lok. min.	rast.
f	konvex.	0	konkáv.	$\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	konkáv.	0	konkáv.

- asymptoty – bez smernice nie sú
  so smernicou – $y = x + \frac{1}{3}$ (pre $x \to \infty$ i pre $x \to -\infty$)
- graf – z predchádzajúcej diskusie sa dá už ľahko načrtnúť.

5. (**7 bodů**) Integrujte:

$$\int \ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:
Kombinácia metódy per-partes a substitúcie:

$$\int \ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1, & v=\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) \\ u=x, & v'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \end{matrix}\right| =$$

$$= x\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t=x^2-1 \\ \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \end{matrix}\right| =$$

$$= x\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = x\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{t}+C = x\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C.$$

6. (**6 bodů**) Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti M kolem souřadnicové osi x:

$$M = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0\le x\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le y\le \operatorname{tg} x\right\}.$$

Řešení:

$$V(M) = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} [(\operatorname{tg} x)^2 - 0^2]\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\mathrm{d}x = \pi\,[\operatorname{tg} x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$