M1101 Matematická analýza I – 24. 01. 2011 – řešení

1. (**5 bodů**) Najděte všechny hromadné body posloupnosti a rozhodněte, je-li konvergentní:

$$\left\{\frac{n^3}{n^2+2n-1}\cos \pi n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:
Keďže každý hromadný bod postupnosti je limitou nejakej z nej vybranej podpostupnosti, vyberieme vhodné konvergentné podpostupnosti. Nakoľko $\cos \pi n = (-1)^n$, prirodzene sa nám ponúka podpostupnosť

$$a_{2k} = \frac{(2k)^3}{(2k)^2+2\cdot 2k-1}\cos 2k\pi = \frac{8k^3}{4k^2+4k-1},$$

a podpostupnosť

$$a_{2k-1} = \frac{(2k-1)^3}{(2k-1)^2+2\cdot(2k-1)-1}\cos(2k-1)\pi =$$

$$= -\frac{(2k-1)^3}{(2k-1)^2+2\cdot(2k-1)-1}.$$

Obidve sú konvergentné, pričom $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \infty$ a $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -\infty$. Hromadné body danej postupnosti sú teda $-\infty$ a ∞, postupnosť nie je konvergentná.

2. (**6 bodů**) Vypočtěte limitu funkce:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^4-1}\right).$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^4-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+1}{x^4-1}-\frac{2}{x^4-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^4-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}.$$

3. (**6 bodů**) Zkonstruujte Taylorův polynom $T_4(f,0,x)$ funkce:

$$f(x) = \ln \cos x.$$

Řešení:

$$T_4(f,0,x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4.$$

$$f(x) = \ln \cos x \implies f(0) = 0,$$

$$f'(x) = -\operatorname{tg} x \implies f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \implies f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \implies f'''(0) = 0,$$

$$f''''(x) = -\frac{2(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^4 x} \implies f''''(0) = -2.$$

$$T_4(f,0,x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4.$$

4. (**10 bodů**) Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf:

$$g(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4.$$

Řešení:

- $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$, nie je ani lichá, ani sudá, nie je periodická, v bode $x = 1$ má nespojitosť II. druhu, $\lim_{x\to 1} g(x) = \infty$
- nulový bod $x = -1$, funkcia je nezáporná na celom definičnom obore
- monotónnosť a extrémy:

  $$g'(x) = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}.$$

  body podozrivé na extrém – -1, 1

- konkávnosť, konvexnosť a inflexné body:

$$g''(x) = \frac{8(1+x)^2(2x+8)}{(1-x)^6}.$$

body podozrivé na inflexiu – -4, -1, 1

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	nedef.	$-$
f''	$-$	0	$+$	0	$+$	nedef.	$+$
f	kles.	$\left(\frac{3}{5}\right)^4$	kles.	lok. min.	rast.	nedef.	kles.
f	konkáv.	inflexia	konvex.	0	konvex.	nedef.	konvex.

- asymptoty – bez smernice $x = 1$
  so smernicou – $y = 1$ (pre $x \to \infty$ i pre $x \to -\infty$)
- graf – z predchádzajúcej diskusie sa dá už ľahko načrtnúť.

5. (**7 bodů**) Integrujte:

$$\int \frac{1}{(5\sin^2 x - 4)(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x.$$

Nápověda: Můžete využít například substituci $t = \operatorname{tg} x$.

Řešení:
Kombinácia substitúcie a rozkladu na parciálne zlomky:

$$\int \frac{1}{(5\sin^2 x - 4)(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{5t^2}{1+t^2} - 4\right)\left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(t^2+1)}{(t^2-4)(t^2+2)}\,\mathrm{d}t$$

Rozklad:

$$\frac{t^2+1}{(t^2-4)(t^2+2)} = \frac{5}{24}\cdot\frac{1}{t-2} - \frac{5}{24}\cdot\frac{1}{t+2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{t^2+2}.$$

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2-4)(t^2+2)}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{24}\int \frac{1}{t-2}\,\mathrm{d}t - \frac{5}{24}\int \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t.$$

Po integrovaní dostaneme:

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2-4)(t^2+2)}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{24}\ln|t-2| - \frac{5}{24}\ln|t+2| + \frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C.$$

Spätným dosadením za $t = \operatorname{tg} x$ nakoniec máme:

$$\int \frac{1}{(5\sin^2 x-4)(1+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{24}\ln|\operatorname{tg} x-2| - \frac{5}{24}\ln|\operatorname{tg} x+2| +$$

$$+\frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{5}{24}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-2}{\operatorname{tg} x+2}\right| + \frac{1}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

6. (**6 bodů**) Vypočtěte obsah elementární oblasti M:

$$M = \left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 \;:\; 1\le x\le \mathrm{e},\quad \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}\le y\le \ln x\right\}.$$

Řešení:

$$S(M) = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\ln x - \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}\,\mathrm{d}x.$$

Prvý integrál:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u'=1, & v=\ln x\\ u=x, & v'=\frac{1}{x}\end{matrix}\right| = [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1\,\mathrm{d}x = [x\ln x]_1^{\mathrm{e}} - [x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\ln\mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

Druhý integrál:

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-1)^2}{2(\mathrm{e}-1)}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{(\mathrm{e}-1)^2}{2(\mathrm{e}-1)} = \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

Preto:

$$S(M) = \int_1^{\mathrm{e}} \left(\ln x - \frac{x-1}{\mathrm{e}-1}\right)\mathrm{d}x = 1 - \frac{\mathrm{e}-1}{2} = \frac{3-\mathrm{e}}{2}.$$