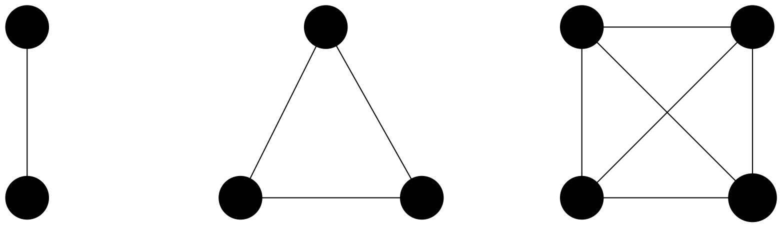
Teorie grafů

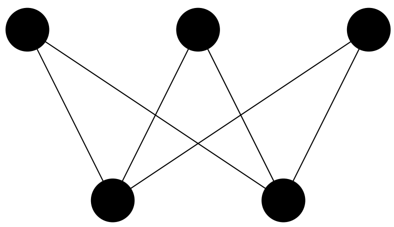
Graf je uspořádaná dvojce množin V a E, kde množina V je množina vrcholů grafu a množina E je množina hran.

$$G = (V, E)$$

Úplný graf je takový graf, ve kterém jsou každé dva vrcholy spojené hranou.



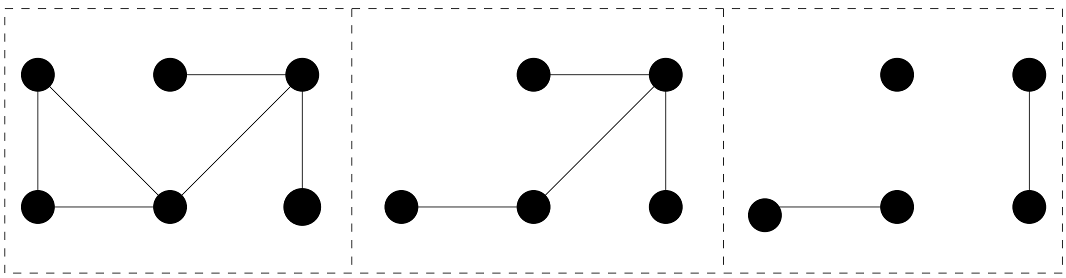
Bipartitní graf – množinu vrcholů lze rozdělit na dvě části, přičemž z každého vrcholu jedné části jde hrana pouze do vrcholů druhé části a naopak. Pokud jde z každého vrcholu jedné části hrana do každého vrcholu druhé části, mluvíme o **úplném bipartitním grafu**.



Podgraf grafu G je graf H, který vznikl odebráním některých vrcholů a hran z původního grafu G.

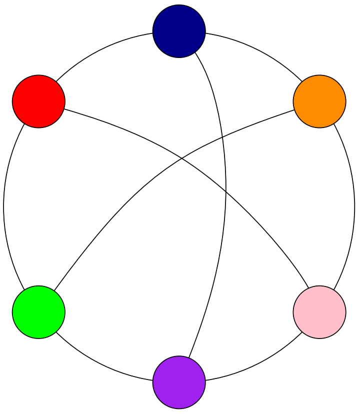
Při odebrání vrcholu je nutné vymazat všechny hrany vedoucí do/z tohoto vrcholu. Pokud byly odebrány jen tyto hrany, nazývá se podgraf **indukovaný**. Pokud byly odebrány i jiné hrany, jde obecně o podgraf.

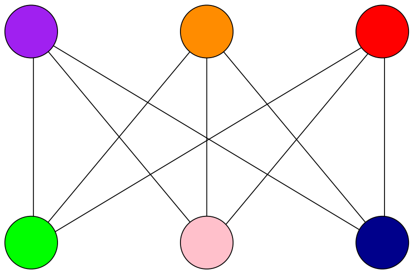
- Graf H je podgrafem grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.
- Graf H je indukovaným podgrafem grafu G, jestliže $V(H) \subseteq V(G)$.



Dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ nazýváme **isomorfní**, jestliže existuje bijektivní zobrazení $f : V \to V'$ tak, že platí:

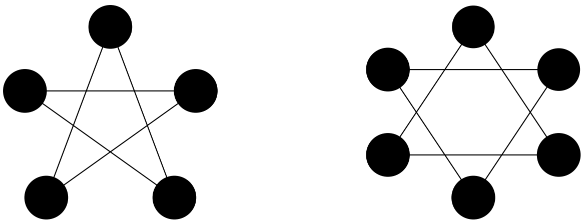
$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'.$$



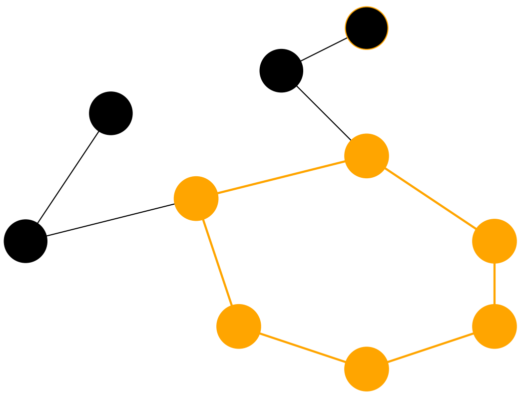


Cesta v grafu – posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t)$, kde vrcholy $v_0, \ldots, v_t$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G a pro každé $i = 1, 2, \ldots, t$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ je prvkem $E(G)$.

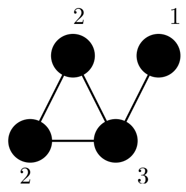
Řekneme, že graf G je **souvislý**, jestliže pro každé jeho dva vrcholy x a y existuje v G cesta z x do y.



Kružnicí (cyklem) v grafu rozumíme posloupnost vrcholů a hran $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_t, v_t = v_0)$, kde vrcholy $v_0, \ldots, v_{t-1}$ jsou navzájem různé vrcholy grafu G a pro každé $i = 1, 2, \ldots, t$ je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ je prvkem $E(G)$.

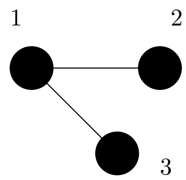


Nechť G je graf, v jeho vrchol. Symbolem deg$G(v)$ označme počet hran grafu G obsahujících vrchol v. Číslo deg$G(v)$ nazveme stupněm vrcholu v v grafu G.



Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy. Označme vrcholy $v_1, \ldots, v_n$ (v nějakém libovolném pořadí). Matice **sousednosti** grafu G je čtvercová matice $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ definovaná předpisem:

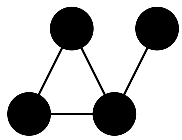
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



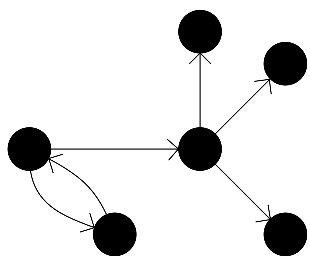
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pro neorientované grafy platí, že jejich matice sousednosti jsou symetrické.
- Pokud je graf G úplný, obsahuje matice $A(G)$ s výjimkou hlavní diagonály samé jedničky.

1. Zapište matici sousednosti pro graf:



Orientovaný graf G je dvojice (V, E), kde $E \subseteq V \times V$. Prvky E nazýváme **šipky** nebo **orientované hrany**. Orientovaná hrana e má tvar (x, y). Říkáme, že tato orientovaná hrana vychází z x a končí v y.

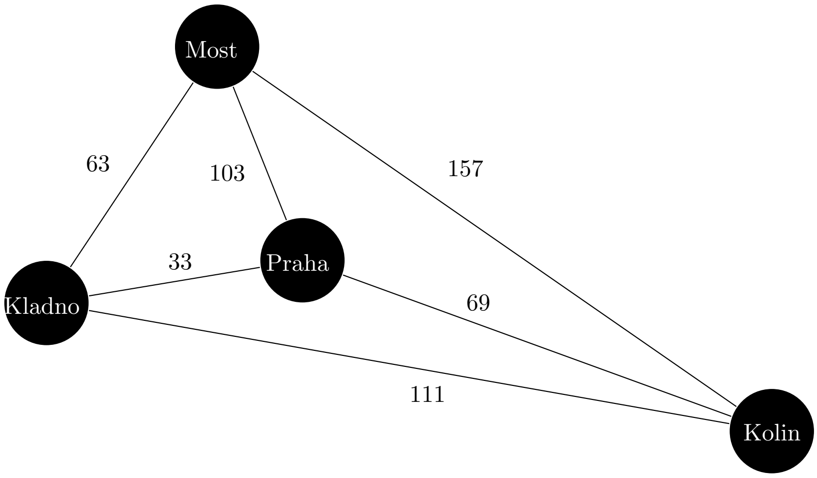


Graf 1

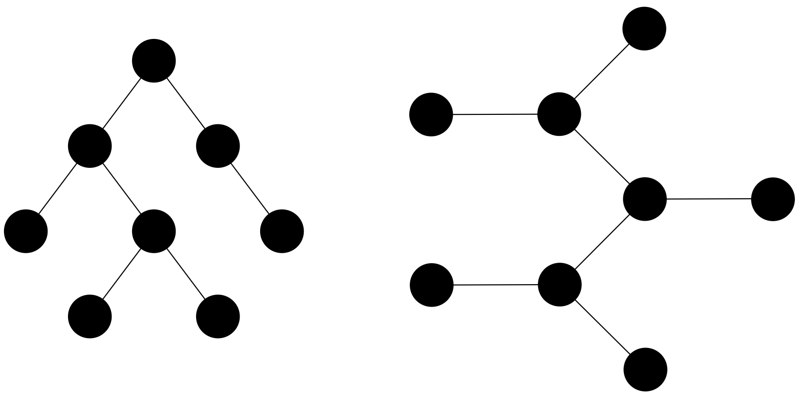
2. Zapište matici sousednosti pro Graf 1.

Funkci, která k hranám přiřadí čísla nazveme **ohodnocením hran** a označíme ji w.

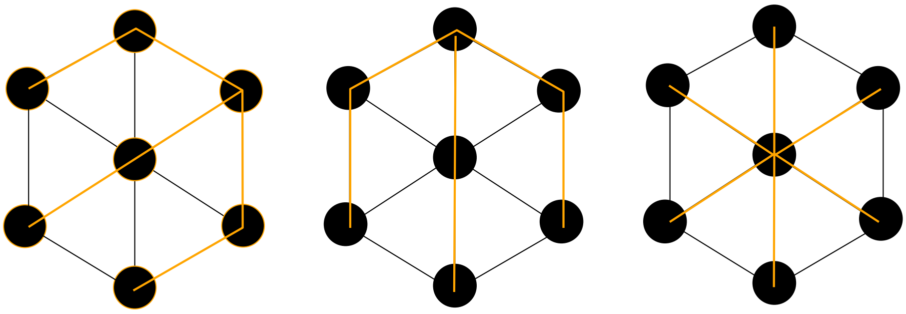
$$w : E(G) \to (0, \infty)$$



Strom je souvislý graf neobsahující kružnici.



Kostra grafu – libovolný podgraf, který hranami spojuje všechny vrcholy původního grafu a zároveň sám neobsahuje žádnou kružnici (tj. jde o strom).

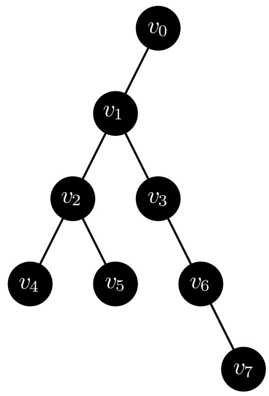


Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný graf. Množinu $W \subseteq V$ (tedy podmnožinu množiny vrcholů) nazveme **jádrem** grafu G, jestliže platí následující dvě podmínky:

(a) Je-li $(u_0, u_1) \in E$ a $u_0 \in W$, pak $u_1 \notin W$.

(b) Jestliže $u_0 \notin W$, pak existuje $u_1 \in W$ tak, že $(u_0, u_1) \in E$.

3. Určete jádro grafu:



Více na `http://teorie-grafu.elfineer.cz/`