Příklady na třetí cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2010

Definice absorpčního stavu a absorpčního řetězce:
Stav $j \in J$ je absorpční stav, jestliže $p_{jj} = 1$.
Homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů se nazývá absorpční, jestliže každý jeho trvalý stav je absorpční.

Definice fundamentální matice absorpčního řetězce:
Matice $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$, kde **I** je jednotková matice řádu s a **Q** je matice řádu s obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy, se nazývá fundamentální matice absorpčního řetězce.

Věta o součtu prvků v řádcích fundamentální matice:
Střední hodnotu počtu kroků, které řetězec stráví v neabsorpčních stavech, když vychází z neabsorpčního stavu i a skončí v absorpčním stavu, vypočítáme jako součet prvků v i-tém řádku fundamentální matice **M**. Maticový zápis: **t** = **Me**, kde **e** je sloupcový vektor typu s x 1 ze samých jedniček.

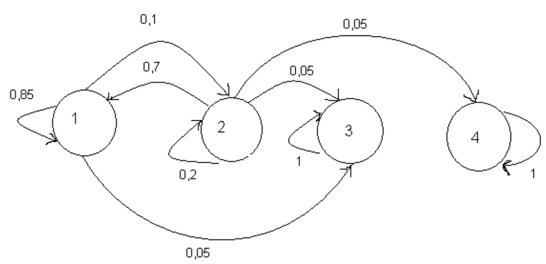
Definice matice přechodu do absorpčních stavů:
Matice **B** = **MR**, kde **M** je fundamentální matice a **R** je matice typu r x s obsahující pravděpodobnosti přechodu z neabsorpčních do absorpčních stavů, se nazývá matice přechodu do absorpčních stavů.

Upozornění: Následující příklady lze řešit s využitím funkce absorb.m

Příklad 1.: (Soustruh v kovoobráběčské firmě)
Jistá malá kovoobráběčská firma vlastní soustruh. Soustruh se může nacházet v následujících stavech, které jsou sledovány s časovým krokem jeden týden: stav 1 – bude v provozu, stav 2 – bude v opravě, stav 3 – dá se k prodeji, stav 4 – dá se do šrotu.
Situace je vyjádřena pomocí homogenního markovského řetězce $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2,3,4\}$, přičemž $X_n = j$, je–li soustruh v n-tém týdnu ve stavu j.
Máme dánu matici přechodu:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Nakreslete přechodový diagram.
Řešení:



b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.
Řešení:
Trvalé stavy jsou 3 a 4, oba jsou absorpční, řetězec je tedy absorpční. Stavy 1 a 2 jsou neabsorpční.
Kanonický tvar matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}85 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}7 & 0{,}2 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
Řešení:

$$\mathrm{M} = (\mathrm{I} - \mathrm{Q})^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Interpretace prvků matice **M**: je-li v daném týdnu soustruh v provozu, pak můžeme očekávat, že než se prodá nebo dá do šrotu, bude v průměru 16 týdnů v provozu a 2 týdny v opravě. Je-li soustruh v daném týdnu v opravě, pak můžeme očekávat, že než se prodá nebo dá do šrotu, bude v průměru 14 týdnů v provozu a 3 týdny v opravě.

d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.
Řešení:

$$\mathrm{B} = \mathrm{MR} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}85 & 0{,}15 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpretace prvků matice B: je-li soustruh v daném týdnu v provozu, pak s pravděpodobností 0,9 půjde do prodeje a s pravděpodobností 0,1 půjde do šrotu. Je-li soustruh v daném týdnu v opravě, pak s pravděpodobností 0,85 půjde do prodeje a s pravděpodobností 0,15 půjde do šrotu.

e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.
Řešení:

$$\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 16 & 2 \\ 14 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Znamená to, že když je soustruh v daném týdnu v provozu resp. v opravě, tak bude v průměru trvat 18 resp. 17 týdnů, než půjde do prodeje nebo do šrotu.

Příklad 2.: (Pracovníci ve firmě)
Jistá firma provedla dlouhodobý průzkum pohybu pracovníků v jednom odboru společnosti. V průzkumu byly specifikovány 4 stavy, a to stav 1 - propuštění ze zaměstnání, stav 2 - odchod z osobních důvodů, stav 3 - práce ve funkci referenta a stav 4 - práce v řídici funkci. Jednotkovým časovým obdobím bylo jedno čtvrtletí. Známe matici přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}03 & 0{,}07 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}08 & 0{,}01 & 0{,}03 & 0{,}88 \end{pmatrix}$$

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Částečné výsledky:

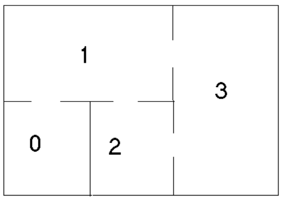
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5{,}71 & 4{,}76 \\ 1{,}43 & 9{,}52 \end{pmatrix}$$

Interpretace 2. řádku matice **M**: pracovník, který nastoupil do vedoucí funkce společnosti, bude pro společnost pracovat asi 2 roky a 9 měsíců, z toho 2 roky a 4,5 měsíce v řídicí funkci a 4,5 měsíce jako referent.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}45 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Interpretace 2. řádku matice **B**: pracovník, který pracuje ve vedoucí funkci společnosti, s pravděpodobností 0,8 bude propuštěn a s pravděpodobností 0,2 odejde sám.

Příklad 3.: Myš je vložena do bludiště tvaru:



V každém okamžiku si myš vybere náhodně jedny z dveří přihrádky, v níž se právě nachází a přejde do příslušné přihrádky. Předpokládáme, že v přihrádce 3 je potrava a myš tuto přihrádku neopustí, jakmile do ní jednou vstoupí. Pohyb myši v bludišti lze modelovat pomocí HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů stavů J = {0,1, 2, 3}, přičemž $X_n = j$, když v okamžiku n je myš v j-té přihrádce.

Matice přechodu:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešte tytéž úkoly jako v příkladu 1.

Částečné výsledky:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1{,}67 & 2 & 0{,}67 \\ 0{,}67 & 2 & 0{,}67 \\ 0{,}33 & 1 & 1{,}33 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku matice **M**: Myš, která vychází z přihrádky 0, stráví v průměru 1,67 kroku v přihrádce 0 resp. 2 kroky v přihrádce 1 resp. 0,67 kroku v přihrádce 2 než dospěje k potravě.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Znamená to, že když myš vychází z kterékoli přihrádky, tak s pravděpodobností 1 dospěje k potravě.

Příklad 4.: Jistá firma třídí svoje pohledávky po termínu splatnosti do třicetidenních intervalů. Pohledávky, které jsou nad 90 dnů po době splatnosti, jsou považovány za nedobytné. K popisu situace zavedeme homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {1, 2, 3, 4, 5}, kde stav 1 znamená pohledávky 0 – 30 dní po době splatnosti, stav 2 pohledávky 31 – 60 dní po době splatnosti, stav 3 pohledávky 61 – 90 dní po době splatnosti, stav 4 splacené pohledávky a stav 5 nedobytné pohledávky. Dlouhodobou analýzou doby splatnosti jednotlivých pohledávek bylo zjištěno, že pravděpodobnosti přechodu jsou: p_{12} = 0,77, p_{14} = 0,23, p_{23} = 0,34, p_{24} = 0,66, p_{34} = 0,73 a p_{35} = 0,27.
a) Sestavte matici přechodu.
b) Klasifikujte stavy na absorpční a neabsorpční a najděte kanonický tvar matice přechodu.
c) Vypočtěte fundamentální matici a interpretujte její prvky.
d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů a interpretujte její prvky.
e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.
f) Předpokládejme, že objem pohledávek po termínu splatnosti v jednotlivých třicetidenních intervalech je (4 030 000 Kč, 9 097 000 Kč, 3 377 000 Kč). Jaká je průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek?

Řešení:

ad a) $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 & 0{,}66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ad b) Řetězec má tři přechodné stavy, a to 1, 2, 3 a dva trvalé stavy, a to 4 a 5. Oba jsou absorpční, tedy řetězec je absorpční.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}23 & 0 & 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0{,}66 & 0 & 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0{,}73 & 0{,}27 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 0{,}23 & 0 \\ 0{,}66 & 0 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}77 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad c) $$M = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}77 & 0{,}26 \\ 0 & 1 & 0{,}34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 v něm v průměru stráví 1 x 30 = 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,77 x 30 = 23,1 dne ve stavu 2 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky. Pohledávka zařazená do stavu 1 stráví v průměru 0,26 x 30 = 7,8 dne ve stavu 3 než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad d) $B = MR = \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix}.$

Interpretace 1. řádku: pohledávka zařazená do stavu 1 bude s pravděpodobností 0,9293 splacena a s pravděpodobností 0,0707 se stane nedobytnou.

ad e) $t = Me = \begin{pmatrix} 2{,}03 \\ 1{,}34 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interpretace:
2,03 x 30 = 60,9 – pohledávce zařazené do stavu 1 bude v průměru trvat 60,9 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.
1,34 x 30 = 40,2 – pohledávce zařazené do stavu 2 bude v průměru trvat 40,2 dne než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.
1 x 30 = 30 – pohledávce zařazené do stavu 3 bude v průměru trvat 30 dnů než bude splacena nebo zařazena mezi nedobytné pohledávky.

ad f) Průměrná hodnota splacených a nedobytných pohledávek:

$$\begin{pmatrix} 4030000 & 9097000 & 3377000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9293 & 0{,}0707 \\ 0{,}9082 & 0{,}0918 \\ 0{,}73 & 0{,}27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14472184 & 2031816 \end{pmatrix}$$

Průměrná hodnota splacených pohledávek je tedy 14 472 184 Kč a nedobytných pohledávek je 2 031 816 Kč.