Příklady na páté cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2010

Definice otimální strategie:
Nechť v každém kroku je možno ergodický homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J = {0, 1, .., N} definovat h různými maticemi přechodu $^1\mathbf{P} = (^1p_{ij})$, ..., $^h\mathbf{P} = (^hp_{ij})$ a h různými maticemi výnosů $^1\mathbf{R} = (^1r_{ij})$, ..., $^h\mathbf{P} = (^hr_{ij})$. V každém kroku můžeme vybrat jednu matici přechodu a odpovídající matici výnosů. Možnosti 1, 2, ..., h se nazývají strategie. Označme $d_i(n)$ strategii vybranou v n-tém kroku ve stavu i. Ta strategie $d_i^*(n)$, pro kterou dosahuje střední hodnota celkového výnosu svého maxima, se nazývá optimální strategie.

Rekurentní metoda hledání optimální startegie:
Předpokládejme, že v krocích n-1, n-2, ..., 1 byla nalezena optimální strategie. Označme $v_i(n)$ maximální střední hodnotu celkového výnosu v n-tém kroku ve stavu i, tj.
$v_i(n) = \max\limits_{1\le k\le h}\left\{ {}^kq_i + \sum\limits_{j\in J} {}^kp_{ij} v_j(n-1) \right\}$. Je-li maxima dosaženo pro k = k^*, pak optimální strategie v n-tém kroku ve stavu i je $d_i^*(n) = k^*$.

Iterační metoda hledání optimální strategie
Algoritmus Howardova iteračního postupu:

1. krok: Pomocí veličin p_{ij}, q_i určíme veličiny g, v_i z rovnic $g + v_i = q_i + \sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij} v_j$, přičemž $v_N = 0$.
2. krok: Pro každý stav $i \in J$ najdeme strategii k^*, která maximalizuje výraz ${}^kq_i + \sum\limits_{j=0}^{N} {}^kp_{ij} v_j$.
3. krok: Nalezená strategie k^* poskytne hodnoty ${}^{k*}q_i, {}^{k*}p_{ij}$ pro opakování kroků 1 a 2.

Algoritmus končí, jakmile vektor strategií je stejný ve dvou po sobě následujících iteracích. (Zpravidla stačí provést jen několik málo iterací.)

Příklad 1. (na použití rekurentní metody): Je sledována výrobní linka, která se může nacházet buď v provozu (stav 0) nebo v opravě (stav 1). Ve stavu 0 je možný provoz „bez kontroly agregátů“ (strategie 1) nebo
„s kontrolou agregátů“ (strategie 2). Ve stavu 1 je možno rozlišit opravu „bez výměny agregátů“ (strategie 1) nebo „s výměnou agregátů“ (strategie 2). Matice přechodu a matice výnosů jsou následující:
$^1P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, {}^1R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}, {}^2P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}, {}^2R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$
Pro první tři kroky najděte maximální střední hodnotu celkového výnosu a optimální strategii.
Řešení:

$$^1q_0 = {}^1p_{00}\,{}^1r_{00} + {}^1p_{01}\,{}^1r_{01} = 0{,}5\cdot 2 + 0{,}5\cdot 0 = 1, {}^1q_1 = {}^1p_{10}\,{}^1r_{10} + {}^1p_{11}\,{}^1r_{11} = 0{,}2\cdot 1 + 0{,}8\cdot(-0{,}5) = -0{,}2$$

$$^2q_0 = {}^2p_{00}\,{}^2r_{00} + {}^2p_{01}\,{}^2r_{01} = 0{,}4\cdot 3 + 0{,}6\cdot 1 = 1{,}8, {}^2q_1 = {}^2p_{10}\,{}^2r_{10} + {}^2p_{11}\,{}^2r_{11} = 0{,}4\cdot 2 + 0{,}6\cdot(-2) = -0{,}4$$

$$^1\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}, {}^2\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$v_0(1) = \max\{1;1{,}8\} = 1{,}8 \Rightarrow d_0^*(1) = 2, v_1(1) = \max\{-0{,}2;-0{,}4\} = -0{,}2 \Rightarrow d_1^*(1) = 1$$

$$v_0(2) = \max\{{}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0(1) + {}^1p_{01}v_1(1); {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0(1) + {}^2p_{01}v_1(1)\} =$$
$$= \max\{1 + 0{,}5 \cdot 1{,}8 + 0{,}5 \cdot (-0{,}2); 1{,}8 + 0.4 \cdot 1{,}8 + 0{,}6 \cdot (-0{,}2)\} = \max\{1{,}8; 2{,}4\} = 2{,}4 \Rightarrow d_0^*(2) = 2$$
$$v_1(2) = \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0(1) + {}^1p_{11}v_1(1); {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0(1) + {}^2p_{11}v_1(1)\} =$$
$$= \max\{-0{,}2 + 0{,}2 \cdot 1{,}8 + 0{,}8 \cdot (-0{,}2); -0{,}4 + 0.4 \cdot 1{,}8 + 0{,}6 \cdot (-0{,}2)\} = \max\{0; 0{,}2\} = 0{,}2 \Rightarrow d_1^*(2) = 2$$

$$v_0(3) = \max\{{}^1q_0 + {}^1p_{00}v_0(2) + {}^1p_{01}v_1(2); {}^2q_0 + {}^2p_{00}v_0(2) + {}^2p_{01}v_1(2)\} =$$
$$= \max\{1 + 0{,}5 \cdot 2{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}2; 1{,}8 + 0.4 \cdot 2{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}2\} = \max\{2{,}3; 2{,}88\} = 2{,}88 \Rightarrow d_0^*(3) = 2$$
$$v_1(3) = \max\{{}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0(2) + {}^1p_{11}v_1(2); {}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0(2) + {}^2p_{11}v_1(2)\} =$$
$$= \max\{-0{,}2 + 0{,}2 \cdot 2{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}2; -0{,}4 + 0.4 \cdot 2{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}2\} = \max\{0{,}44; 0{,}68\} = 0{,}68 \Rightarrow d_1^*(3) = 2$$

Závěr: V prvním kroku je vektor optimálních strategií $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ve druhém a třetím kroku $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Návod na řešení v MATLABu:
Zadáme matice $^1\mathbf{P}$, $^1\mathbf{R}$, $^2\mathbf{P}$, $^2\mathbf{R}$:
P1=[0.5 0.5;0.2 0.8]; R1=[2 0;1 -0.5]; P2=[0.4 0.6;0.4 0.6]; R2=[3 1;2 -2];
Vypočteme pomocné matice Q1=P1*R1’; Q2=P2*R2’;
Diagonála matice Q1 je vektor q1=diag(Q1)
Diagonála matice Q2 je vektor q2=diag(Q2)
Vypočteme vektor v1=max(q1,q2)
(Protože první složka vektoru v1 odpovídá první složce vektoru q2, znamená to, že když je linka v provozu, je optimální strategie v 1. kroku strategie 2.
Protože druhá složka vektoru v1 odpovídá druhé složce vektoru q1, znamená to, že když je linka v opravě, je optimální strategie v 1. kroku strategie 1.)
Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:
v2_provoz_s1= q1(1)+P1(1,1)*v1(1)+P1(1,2)*v1(2)
a totéž pro strategii 2:
v2_provoz_s2= q2(1)+P2(1,1)*v1(1)+P2(1,2)*v1(2)
Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 2. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:
v2_oprava_s1= q1(2)+P1(2,1)*v1(1)+P1(2,2)*v1(2)
a totéž pro strategii 2:
v2_oprava_s2= q2(2)+P2(2,1)*v1(1)+P2(2,2)*v1(2)
Vypočítáme vektor v2:
v2=[max(v2_provoz_s1, v2_provoz_s2); max(v2_oprava_s1, v2_oprava_s2)]
(Vidíme, že první složka vektoru v2 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)
Spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v provozu:
v3_provoz_s1= q1(1)+P1(1,1)*v2(1)+P1(1,2)*v2(2)
a totéž pro strategii 2:
v3_provoz_s2= q2(1)+P2(1,1)*v2(1)+P2(1,2)*v2(2)
Dále spočítáme střední hodnotu celkového výnosu ve 3. kroku pro strategii 1, je-li linka v opravě:
v3_oprava_s1= q1(2)+P1(2,1)*v2(1)+P1(2,2)*v2(2)
a totéž pro strategii 2:
v3_oprava_s2= q2(2)+P2(2,1)*v2(1)+P2(2,2)*v2(2)
Vypočítáme vektor v3:
v3=[max(v3_provoz_s1, v3_provoz_s2); max(v3_oprava_s1, v3_oprava_s2)]
(Vidíme, že první složka vektoru v3 odpovídá strategii 2 a druhá složka rovněž.)

Upozornění: Uvedené řešení je pouze jedním z možných, zajisté lze vytvořit lepší.

Příklad 2. (na použití Howardova algoritmu): Závod produkuje nějaký spotřební výrobek, u něhož lze rozeznat dva stavy: stav 0 – výrobek je úspěšný s dobrým odbytem a cenou, stav 1 – výrobek je neúspěšný, odbyt vázne a cena je nízká. Při 1. strategii vedení závodu neinvestuje ani do technického rozvoje ani do reklamy. Při této strategii je matice přechodu ${}^{1}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ a matice výnosů ${}^{1}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$. Při 2. strategii vedení závodu zajistí technický rozvoj a investuje do reklamy. Matice přechodu: ${}^{2}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$, matice výnosů: ${}^{2}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -19 \end{pmatrix}$. (Při 2. strategii se vyšší náklady promítnou do zisku, proto výnos ${}^{2}r_{00}$ musí být nižší než ${}^{1}r_{00}$, stejně tak ${}^{2}r_{11}$ musí být nižší než ${}^{1}r_{11}$.) Pomocí iterační metody je třeba zjistit, jakou strategii doporučit vedení závodu, aby střední hodnota celkového výnosu byla maximální.

Řešení: Nejprve vypočítáme vektory ${}^{1}\mathbf{q} = ({}^{1}q_0, {}^{1}q_1)$ a ${}^{2}\mathbf{q} = ({}^{2}q_0, {}^{2}q_1)$.

${}^{1}q_0 = {}^{1}p_{00}\,{}^{1}r_{00} + {}^{1}p_{01}\,{}^{1}r_{01} = 0{,}5\cdot 9 + 0{,}5\cdot 3 = 6, {}^{1}q_1 = {}^{1}p_{10}\,{}^{1}r_{10} + {}^{1}p_{11}\,{}^{1}r_{11} = 0{,}4\cdot 3 + 0{,}6\cdot(-7) = -3$

${}^{1}\mathbf{q} = (6, -3)$

${}^{2}q_0 = {}^{2}p_{00}\,{}^{2}r_{00} + {}^{2}p_{01}\,{}^{2}r_{01} = 0{,}8\cdot 4 + 0{,}2\cdot 4 = 4, {}^{2}q_1 = {}^{2}p_{10}\,{}^{2}r_{10} + {}^{2}p_{11}\,{}^{2}r_{11} = 0{,}7\cdot 1 + 0{,}3\cdot(-19) = -5$

${}^{2}\mathbf{q} = (4, -5)$

1. iterace: zvolíme $d_0(1) = 1$, $d_1(1) = 1$ a vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$g + v_0 = {}^{1}q_0 + {}^{1}p_{00}v_0 + {}^{1}p_{01}v_1 : g + v_0 = 6 + 0{,}5\cdot v_0$

$g + v_1 = {}^{1}q_1 + {}^{1}p_{10}v_0 + {}^{1}p_{11}v_1 : g = -3 + 0{,}4\cdot v_0$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10$, $g = 1$.

2. iterace:

$i = 0$, $k = 1$: ${}^{1}q_0 + {}^{1}p_{00}v_0 + {}^{1}p_{01}v_1 = 6 + 0{,}5\cdot 10 = 11$

$k = 2$: ${}^{2}q_0 + {}^{2}p_{00}v_0 + {}^{2}p_{01}v_1 = 4 + 0{,}8\cdot 10 = 12$

$\max\{11, 12\} = 12$, tedy $d_0(2) = 2$

$i = 1$, $k = 1$: ${}^{1}q_1 + {}^{1}p_{10}v_0 + {}^{1}p_{11}v_1 = -3 + 0{,}4\cdot 10 = 1$

$k = 2$: ${}^{2}q_1 + {}^{2}p_{10}v_0 + {}^{2}p_{11}v_1 = -5 + 0{,}7\cdot 10 = 2$

$\max\{1, 2\} = 2$, tedy $d_1(2) = 2$

Výsledek 2. iterace dává vektor strategií (2, 2).

S tímto vektorem vyřešíme systém rovnic (přitom položíme $v_1 = 0$)

$g + v_0 = {}^{2}q_0 + {}^{2}p_{00}v_0 + {}^{2}p_{01}v_1 : g + v_0 = 4 + 0{,}8\cdot v_0$

$g + v_1 = {}^{2}q_1 + {}^{2}p_{10}v_0 + {}^{2}p_{11}v_1 : g = -5 + 0{,}7\cdot v_0$

Řešením tohoto systému obdržíme $v_0 = 10$, $g = 2$.

3. iterace:

$i = 0$, $k = 1$: ${}^{1}q_0 + {}^{1}p_{00}v_0 + {}^{1}p_{01}v_1 = 6 + 0{,}5\cdot 10 = 11$

$k = 2$: ${}^{2}q_0 + {}^{2}p_{00}v_0 + {}^{2}p_{01}v_1 = 4 + 0{,}8\cdot 10 = 12$

max{11, 12} = 12, tedy $d_0(3) = 2$
i = 1, k = 1: ${}^1q_1 + {}^1p_{10}v_0 + {}^1p_{11}v_1 = -3 + 0{,}4 \cdot 10 = 1$
k = 2: ${}^2q_1 + {}^2p_{10}v_0 + {}^2p_{11}v_1 = -5 + 0{,}7 \cdot 10 = 2$
max{1, 2} = 2, tedy $d_1(3) = 2$
Výsledek 3. iterace dává vektor strategií (2, 2).

Protože ve dvou po sobě jdoucích iteracích jsme dostali stejný vektor strategií, výpočet končí.
Interpretace: Kromě počátečního kroku přinese větší zisk ta strategie, která zahrnuje náklady na technický rozvoj a reklamu výrobku.

Návod na řešení v MATLABu:
Použití funkcí uložených v ISu v Učebních materiálech
howard.m (vytvořil Pavel Mizera),
howard1.m (vytvořil Ondřej Petřík)
howard2.m (vytvořil Pavel Hellebrand)