Výroková logika

Výroková logika I.

- Součást matematiky
  - základní stavební kámen
  - informatika stojí na matematice
- Zkoumá tvrzení, výroky, pravdivost, nepravdivost, důsledky, úsudky
- Přímé použití
  - formulace podmínek v programování (a následné optimalizaci algoritmu)
  - návrh logických obvodů (v procesorech aj.)
  - formulace databázových dotazů

Výroková logika II.

- Etymologie
  - řecké slovo logos = rozum, smysl
- Dělení logiky
  - intuitivní logika = co nám připadá „logické“ na základě zkušeností
  - formální (matematická) logika = zkoumá pouze, zda dané tvrzení vyplývá z daných předpokladů
- Osobnosti
  - G.W. Leibniz, B. Bolzano, G. Boole, G. Cantor, B. Russel, K. Gödel

Výrok

- <u>Def</u>.: **Výrok** je tvrzení (oznamovací věta v přirozeném jazyce), o němž je smysluplné prohlásit, zda je pravdivé, či nepravdivé.
- Příklady výroků
  - Hlavní město Burkiny Faso je Ouagadougou
  - Na vrcholku Mt. Everestu je právě teď teplota -8,6°C
  - 1 + 1 = 3
  - Během promítání tohoto slajdu na Zemi vyhynulo 5 biologických druhů
  - Nebude-li pršet, nezmoknem
- Věty, které nejsou výroky
  - Kolik je hodin?
  - Každé koťátko je roztomilé

Složený výrok

- Def.: **Složeným výrokem** rozumíme takový výrok, který je tvořen souvětím, tj. více výroky spojenými **logickými spojkami**.
- Příklady složených výroků
  - Nebude-li pršet, nezmoknem
  - Jestliže je to pravda, pak jsem papež
- Pozn.: Za výroky budeme prozatím považovat pouze tvrzení týkající se jednoho objektu, tj. ne tvrzení typu
  - Každé číslo dělitelné 6 je dělitelné 2 a 3
  - Kdo jinému jámu kopá, sám do ní padá

  Tato tvrzení budou předmětem zkoumání predikátové logiky

Součásti formálního jazyka VL

- Výroky označíme symboly (Atomické formule)
  - výrokové proměnné
  - logické proměnné
  - atomické výrokové formule
  - *a, b, c, p, q, r, s, x, y, z, …*
- Pro logické spojky zavedeme symboly
  - $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Pro zdůraznění priority slouží kulaté závorky
  - (,)

Definice výrokové formule

- Za **výrokovou formuli (VF)** budeme považovat takovou posloupnost symbolů jazyka VL, pro kterou platí:
  - Každý elementární výrok je (atomická) VF
  - Je-li a VF, pak také $\neg a$ je VF
  - Jsou-li a, b VF, pak také $(a \wedge b)$, $(a \vee b)$, $(a \Rightarrow b)$, $(a \Leftrightarrow b)$ jsou VF
  - Nic jiného není VF

Konstrukce formule

- ***Konstrukce formule** A z množiny atomických formulí je posloupnost formulí B_1, B_2, …, B_n = A taková, kde B_i, i=1, …, n, je buď atomická formule nebo formule, která vznikla aplikací pravidla 2 gramatiky jazyka výrokové formule*

- Konstrukcí formule $(p \vee q) \wedge \neg r \leftrightarrow (q \rightarrow r)$ je tedy posloupnost p, q, r, $\neg r$, $p \vee q$, $q \rightarrow r$, $(p \vee q) \wedge \neg r$, $(p \vee q) \wedge \neg r \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

Podformule výrokových formulí

- Def.: ***Podformule*** *je souvislá část formule, která je sama formulí. Je-li poslopnost $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nejkratší konstrukcí formule A, pak $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou všechny podformule formule A a číslo n udává* ***složitost konstrukce*** *formule A.*

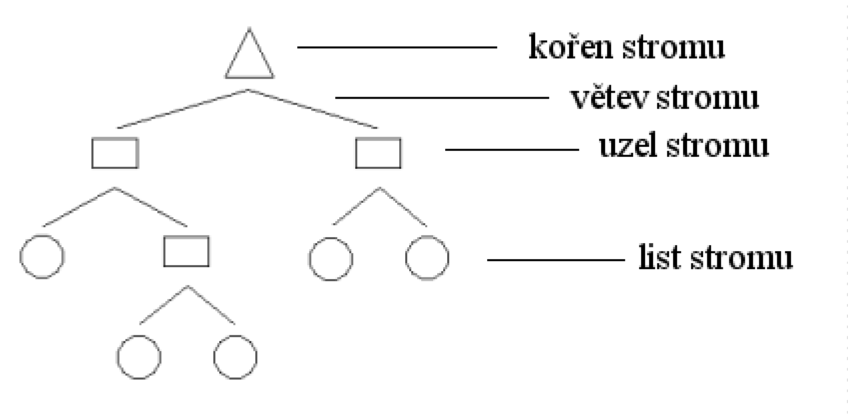
- Def.: Formule *b* se nazývá **bezprostřední podformulí** formule *c*, má-li *c* jeden z následujících tvarů:
  $\neg b$, $(a \wedge b)$, $(b \wedge a)$, $(a \vee b)$, $(b \vee a)$, $(a \Rightarrow b)$, $(b \Rightarrow a)$, $(a \Leftrightarrow b)$, $(b \Leftrightarrow a)$

- Def.: Formule *b* se nazývá (běžnou) **podformulí** formule *c*, jestliže existuje taková posloupnost formulí
  $c_1, c_2, \ldots, c_m$, $m \geq 1$,
  že $c_1 = b$, $c_m = c$ a c_{i-1} je bezprostřední podformulí formule c_i pro každé $i = 2, 3, \ldots m$.

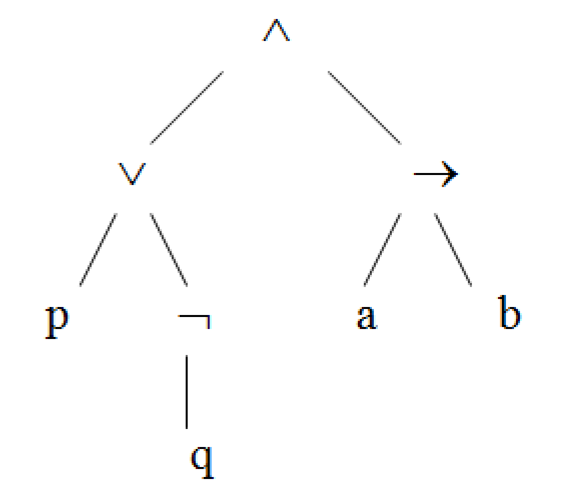
- Pozn.: Rozklad formule na podformule tvoří stromovou strukturu až k atomickým formulím

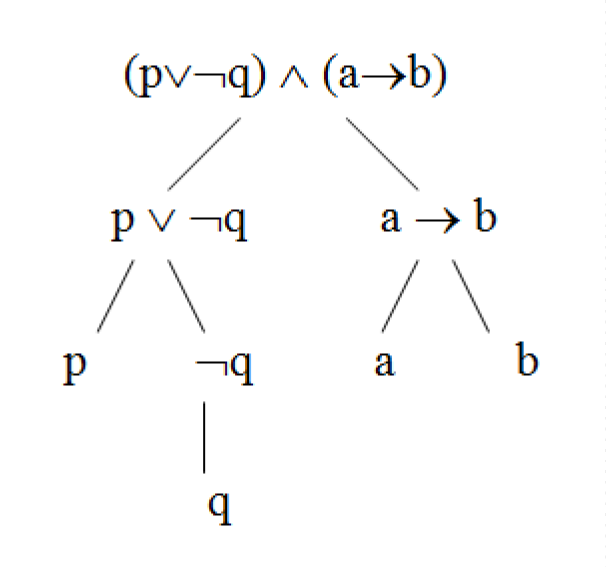
Formační strom formule

- *Pro grafickou reprezentaci se někdy používá tzv.* ***strom*** *(viz obrázek). Strukturou je podobný stromu tak jak jej známe z běžného života, je ale otočen (má kořen nahoře). Náš strom se bude skládat z uzlů. Nejvyšší uzel se nazývá* ***kořen*** *stromu. Z uzlů vycházejí* ***větve*** *(také se jim říká* ***hrany****). Uzel, ze kterého žádné větve nevycházejí, se nazývá* ***list*** *stromu.*



Formační strom formule 2





Pravdivostní hodnota výroku

- Def.: **Pravdivostní hodnotou** (elementárního) výroku je zobrazení

$$\boldsymbol{v}\mathbf{:}\ \mathbf{V_0 \rightarrow \{0,1\}}$$

kde V_0 je množina výrokových proměnných

- Pozn.: Zobrazení přiřazuje každému výroku (výrokové proměnné) hodnotu PRAVDA/NEPRAVDA, TRUE/FALSE, 0/1
  - tedy jednobitovou informaci

Pravdivostní hodnota VF

- Zobrazení *v* rozšíříme na množinu všech VF. Dostáváme zobrazení

$$\boldsymbol{v'}\mathbf{: V} \rightarrow \mathbf{\{0,1\}}$$

definované takto:

- $v'(a) = v(a)$ pro $a \in V_0$
- jsou-li a,b VF, pak $v'(\neg a)$, $v'(a \wedge b)$, $v'(a \vee b)$, $v'(a \Rightarrow b)$, $v'(a \Leftrightarrow b)$ jsou definovány tabulkou:

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Pravdivostní hodnoty formule

- Určete pravdivostní hodnoty formule

$(a \vee \neg c) \rightarrow [(b \rightarrow \neg a) \leftrightarrow (a \vee c)]$

					X	Y	Z	V	
a	b	c	$\neg a$	$\neg c$	$a \vee \neg c$	$b \rightarrow \neg a$	$a \vee c$	$Y \leftrightarrow Z$	$X \rightarrow V$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

Negace ($\neg$)

- Česky: „není pravda, že“, předpona „ne“
- Anglicky: not
- Má opačnou pravdivostní hodnotu, než původní VF
  - Negace *a* je pravdivá, pokud je *a* nepravdivé
  - Negace *a* je nepravdivá, pokud je *a* pravdivé

Konjunkce ($\wedge$)

- Česky: „a zároveň“
- Anglicky: „and“
- Též logický součin
- Konjunkce $a \wedge b$ je pravdivá pouze v případě, že jsou současně pravdivé a i b
- Konjunkce $a \wedge b$ je nepravdivá, pokud je kterákoliv z komponent a,b nepravdivá

Disjunkce ($\vee$)

- Česky: „nebo"
- Anglicky: „or"
- Též logický součet
- Disjunkce $a \vee b$ je pravdivá, pokud je pravdivá kterákoliv z komponent a,b
- Disjunkce $a \vee b$ je nepravdivá pouze v případě, že neplatí ani a, ani b.

Implikace ($\Rightarrow$)

- Česky: „z toho plyne‟
- Anglicky: „if … then … ‟
- V implikaci $a \Rightarrow b$ nazýváme
  - a předpoklad (premisa)
  - b závěr (konkluze)
- Implikace je pravdivá, pokud z pravdivého předpokladu plyne pravdivý závěr, **anebo pokud neplatí předpoklad**
- Implikace je nepravdivá pouze v případě, že z pravdivého předpokladu plyne nepravdivý závěr
- Jiná vyjádření implikace $a \Rightarrow b$
  - Z a plyne b. Jestliže a, pak b. B je důsledkem a. A je postačující podmínkou pro b. B je nutnou podmínkou pro a.

Ekvivalence ($\Leftrightarrow$)

- Česky: „právě tehdy, když"
- Anglicky: „if and only if"
- Ekvi-valence = stejná hodnota
- Ekvivalence $a \Leftrightarrow b$ je pravdivá tehdy, mají-li výroky *a* a *b* stejnou pravdivostní hodnotu
  - tj. jsou oba pravdivé, **nebo oba nepravdivé**
- Ekvivalence je nepravdivá, pokud mají *a* a *b* různou pravdivostní hodnotu
- Jiná vyjádření ekvivalence $a \Leftrightarrow b$
  - A platí tehdy a jen tehdy, když b. B platí tehdy a jen tehdy, když a. A je nutnou a postačující podmínkou pro b. B je nutnou a postačující podmínkou pro a.

Příklad

- Určete pravdivostní hodnoty formule

$[(a \to (b \vee c)] \leftrightarrow [(a \to b) \vee (a \to c)]$

Příklad - tautologie

$[(a \rightarrow (b \vee c)] \leftrightarrow [(a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)]$

			X	Y	Z	U	V	
a	b	c	$b \vee c$	$a \rightarrow b$	$a \rightarrow c$	$a \rightarrow X$	$Y \vee Z$	$U \leftrightarrow V$
0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tautologie a kontradikce

- Def.: Výrokovou formuli nazveme **tautologie**, pokud je vždy pravdivá bez ohledu na pravdivostní hodnotu výrokových proměnných, které obsahuje.
- Označení: $\models [(a \to (b \vee c)] \leftrightarrow [(a \to b) \vee (a \to c)]$
- Def.: Výrokovou formuli nazveme **kontradikce**, pokud je vždy nepravdivá bez ohledu na pravdivostní hodnotu výrokových proměnných, které obsahuje

Věta o substitucích

- Nechť $T(x_1, x_2, \ldots x_n)$ je tautologie. Jestliže za libovolnou z proměnných x_i dosadíme libovolnou formuli, potom výsledná formule je opět tautologií.
- Analogické tvrzení platí i pro kontradikce

Význačné tautologie

- Zákon sporu: $\neg(p\wedge\neg p)$
- Zákon vyloučení třetího: $p\vee\neg p$
- Zákon totožnosti: $p\Leftrightarrow p$
- Zákon dvojí negace: $\neg\neg p\Leftrightarrow p$
- Claviův zákon (reductio ad absurdum):
  - $(\neg p\Rightarrow p)\Rightarrow p$
  - $(p\Rightarrow\neg p)\Rightarrow\neg p$
- Zákon Dunse Scota: $(p\wedge\neg p)\Rightarrow q$
- Př. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ – *ekvivalentní formule*

Operace s implikací

- Obměna implikace
  - $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$
- Obrácení implikace
  - $(a \Rightarrow b)$ není totéž jako $(b \Rightarrow a)$!!!
  - Implikace **není komutativní**
- Tranzitivita implikace
  - Zákon hypotetického sylogismu
  - $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Konjunkce a disjunkce

- Konjunkce implikuje každý ze svých členů
  - $(p \wedge q) \Rightarrow p$
  - $(p \wedge q) \Rightarrow q$
- Disjunkce je implikována každým ze svých členů
  - $p \Rightarrow (p \vee q)$
  - $q \Rightarrow (p \vee q)$

Komutativní zákony

- Operace je **komutativní**, pokud nezáleží na pořadí operandů.
- Komutativní jsou konjunkce, disjunkce a ekvivalence.
  - NE implikace!
- $(a \wedge b) \Leftrightarrow (b \wedge a)$
- $(a \vee b) \Leftrightarrow (b \vee a)$
- $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow a)$

Asociativní zákony

- Operace je **asociativní**, pokud nezáleží na uzávorkování
- Asociativní jsou konjunkce, disjunkce a ekvivalence.
  - NE implikace!
- $((a \wedge b) \wedge c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \wedge c))$
- $((a \vee b) \vee c) \Leftrightarrow (a \vee (b \vee c))$
- $((a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow c) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow (b \Leftrightarrow c))$

Distributivní zákony

- „roznásobování“ logických spojek

- $(a \wedge (b \vee c)) \Leftrightarrow ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$
- $(a \vee (b \wedge c)) \Leftrightarrow ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$

Dualita konjunkce a disjunkce

- deMorganovy zákony
  - negace konjunkce je disjunkce negací
  - negace disjunkce je konjunkce negací

- $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$
- $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$

Logická ekvivalence výroků

- Def.: Řekneme, že výroky p a q jsou **logicky ekvivalentní**, jestliže výroková formule $a \Leftrightarrow b$ je tautologie
- Logicky ekvivalentní výroky mají tedy vždy stejnou pravdivostní hodnotu
- Příklady logicky ekvivalentních výroků
  - $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r))) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r))$
  - $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

Negování složených výroků

- Pozn.: Negovat složený výrok znamená formulovat výrok, který je logicky ekvivalentní s negací původního výroku a neobsahuje negaci složeného výroku jako svoji podformuli
- Pravidla pro negování logických spojek
  - $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$
  - $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$
  - $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$
  - $\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow ((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a))$
- Příklad: Negujte výrokovou formuli $(a \Rightarrow (b \vee c) \vee ((\neg a \wedge c) \Leftrightarrow b)$

Úplný systém logických spojek

- Def.: Řekneme, že množina logických spojek L tvoří **úplný systém logických spojek**, jestliže ke každé formuli existuje formule, která je s ní logicky ekvivalentní, a která obsahuje pouze spojky z L.
- Úplný systém log. spojek tvoří:
  - negace a implikace
  - negace a konjunkce
  - negace a disjunkce
- Otázka: Kolik různých (binárních) logických spojek můžeme definovat?
  - Netvoří některá z nich sama o sobě úplný systém?

Piercova a Shefferova spojka

- Shefferova spojka (NAND)
  - $(a \uparrow b) \Leftrightarrow \neg(a \wedge b)$
- Piercova spojka (NOR)
  - $(a \downarrow b) \Leftrightarrow \neg(a \vee b)$
- Všechny logické spojky je možné vyjádřit pouze pomocí Shefferovy/Piercovy spojky

Způsoby zápisu výrazů

- Infixový zápis
  - Klasický způsob – operátor je mezi operandy
  - $3 + 5$, $a \wedge b$
- Prefixový zápis
  - Operátor je před operandy
  - $+ \ 3 \ 5$, $\wedge \ a \ b$
- Postfixový zápis
  - Operátor je za operandy
  - $3 \ 5 \ +$, $a \ b \ \wedge$
- Jedná se o různý zápis téhož výrazu
  - Jiná syntaxe, jiný způsob vyhodnocení
  - Stejná sémantika, stejný výsledek
- Prefix a postfix nepotřebují závorky

Převod z infixu do prefixu

- Pomocí stromového rozkladu
  - Nakreslíme si rozklad výrazu
  - Přečteme kořen, pak rekurzivně levý podstrom a rekurzivně pravý podstrom
- Jednodušší výrazy lze intuitivně
- Příklad: Vyjádřete prefixovou notací formuli $(a \Rightarrow (b \vee \neg c)) \wedge (\neg a \Leftrightarrow b)$

Převod z infixu do postfixu

- Předpokládejme „dobře uzávorkovaný" výraz
- Algoritmus slepé koleje
  - Čteme výraz v infixu zleva doprava
  - Proměnná pokračuje na výstup
  - Operátor padá do zásobníku (slepé koleje)
  - Levá závorka padá do zásobníku (slepé koleje)
  - Pravá závorka vyráží ze zásobníku vše až po levou závorku. Závorky na výstup nepíšeme
  - Na konci vyprázdníme zásobník
- Příklad: Vyjádřete postfixovou notací formuli $(a \Rightarrow (b \vee \neg c)) \wedge (\neg a \Leftrightarrow b)$

Vyhodnocení výrazu v postfixu

- Pomocí zásobníkového automatu
  - Čteme výraz zleva doprava
  - Přečteme-li operand, uložíme jej na zásobník
  - Přečteme-li operátor, vybereme ze zásobníku tolik operandů, kolik je arita operátoru, aplikujeme na ně operátor a výsledek uložíme na zásobník
  - Po dočtení výrazu je na zásobníku pouze výsledek výrazu
- Stejným způsobem lze převádět z postfixu do infixu
- Příklad: Převeďte z postfixu do infixu formuli ab$\neg\vee$ca$\neg\wedge$b$\Leftrightarrow\Rightarrow$
- Příklad: Vyhodnoťte postfixově zapsaný aritmetický výraz 16 4 + 2 3 2 + * / 1 -

Disjunktivní normální forma

- Výroková formule je v **disjunktivním normálním tvaru** (DNF), je-li disjunkcí formulí, pro které platí:
  - každá je konjunkcí atomických výrokových formulí a jejich negací
  - v žádné se nevyskytuje žádná atomická formule současně se svou negací
- DNF je úplná, pokud jsou ve všech konjunkcích stejné atomické formule

Disjunktivní normální forma 2

- Příkladem formule v DNF je

$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$

- Př.: Najděte úplnou disjunktivní normální formu formule

$A = (b \vee \neg c) \rightarrow (a \wedge \neg b)$

Disjunktivní normální forma př.

$A = (b \vee \neg c) \rightarrow (a \wedge \neg b)$

				X		Y	
A	b	c	$\neg c$	$b \vee \neg c$	$\neg b$	$a \wedge \neg b$	$X \rightarrow Y$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0

$(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)$

Konjunktivní normální forma

- Výroková formule je v **konjunktivním normálním tvaru** (KNF), je-li konjunkcí formulí, pro které platí:
  - každá je disjunkcí atomických výrokových formulí a jejich negací
  - v žádné se nevyskytuje žádná atomická formule současně se svou negací
- KNF je <u>úplná</u>, pokud jsou ve všech konjunkcích stejné atomické formule

DNF a KNF

- <u>Ke každé</u> výrokové formuli lze nalézt ekvivalentní formuli v úplném DNF a KNF
- Úplný DNF/KNF je určen jednoznačně až na volbu a pořadí proměnných
- I prázdná disjunkce (disjunkce prázdné množiny konjunkcí) je v DNF a v KNF
- Jaký je algoritmus převodu do DNF/KNF?
  - Pomocí pravdivostní tabulky
  - Pomocí pravidel pro úpravy logických formulí
- Převeďte do (úplné) DNF a KNF formuli $(a \Rightarrow (b \vee \neg c)) \wedge (\neg a \Leftrightarrow b)$

Pravidla při převodu do DNF

1) Nahrazení výrokových spojek $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$ pomocí funkčně úplné množiny $\{\neg, \&, \vee\}$, tedy pomocí ekvivalencí

$|= (X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\neg X \vee Y)$

$|= (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow [(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)] \leftrightarrow [(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)]$

2) Převedení negací dovnitř závorek pomocí de Morganových pravidel

$|= \neg(X \wedge Y) \leftrightarrow (\neg X \vee \neg Y)$

$|= \neg(X \vee Y) \leftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y)$

3) Odstranění dvojí negace pomocí ekvivalence

$|= \neg(\neg X) \leftrightarrow X$

4) Použití distributivních zákon

$|= (\mathrm{X} \wedge (\mathrm{Y} \vee \mathrm{Z})) \leftrightarrow((\mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}) \vee (\mathrm{X} \wedge \mathrm{Z}))$

$|= (\mathrm{X} \vee (\mathrm{Y} \wedge \mathrm{Z})) \leftrightarrow((\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}) \wedge (\mathrm{X} \vee \mathrm{Z}))$

Pravidla při převodu do KNF

Převedení formule do ekvivalentní konjunktivní normální formy lze provést též přímo úpravami bez pomoci tabulky. Používáme k tomu následující ekvivalentní úpravy:

1) nahrazení spojky $\leftrightarrow$ spojkami $\rightarrow$ a $\wedge$ podle ekvivalence

2) Přepis spojky $\rightarrow$ spojkami $\neg$ a $\vee$ podle ekvivalence

3) Použití podle potřeby De Morganových zákonů a distributivních zákonů.

Příklad převodu

Převeďte ekvivalentními úpravami do DNF formuli

$[(a \rightarrow b) \wedge a] \vee [\neg(a \vee b)]$

Budeme postupně formuli přepisovat pomocí ekvivalencí:

$[(a \rightarrow b) \wedge a] \vee [\neg(a \vee b)]$	použijeme ekvivalence
$[(\neg a \vee b) \wedge a] \vee (\neg a \wedge \neg b)$	ekvivalence
$[(\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a)] \vee (\neg a \wedge \neg b)$	ekvivalence
$[\text{false} \vee (b \wedge a)] \vee (\neg a \wedge \neg b)$	ekvivalence
$(b \wedge a) \vee (\neg a \wedge \neg b)$	

Další:

$(a \wedge \neg(b \rightarrow a))$ do DNF

$(\neg a \rightarrow c) \rightarrow [b \wedge (\neg c \rightarrow a)]$ do KNF

Příklad řešení

$(\neg a \rightarrow c) \rightarrow [\, b \wedge (\neg c \rightarrow a)\,]$	přepis $(\neg a \rightarrow c)$ na $(a \vee c)$
$(a \vee c) \rightarrow [\, b \wedge (\neg c \rightarrow a)\,]$	přepis $(\neg c \rightarrow a)$ na $(c \vee a)$
$(a \vee c) \rightarrow [\, b \wedge (c \vee a)\,]$	přepis $\rightarrow$
$\neg(a \vee c) \vee [\, b \wedge (c \vee a)\,]$	$\neg(a \vee c)$ na $(\neg a \wedge \neg c)$
$(\neg a \wedge \neg c) \vee [\, b \wedge (c \vee a)\,]$,	úprava $\vee$
$[\,(\neg a \wedge \neg c) \vee b\,] \wedge [\,(\neg a \wedge \neg c) \vee (c \vee a)\,]$	$(\neg a \wedge \neg c)$ na $\neg(a \vee c)$
$[\,(\neg a \wedge \neg c) \vee b] \wedge [\,\neg(a \vee c) \vee (c \vee a)\,]$	[...] na true
$[\,(\neg a \wedge \neg c) \vee b] \wedge$ true	[...] $\wedge$ true
$[\,(\neg a \wedge \neg c) \vee b]$	podle
$(\neg a \vee b) \wedge (\neg c \vee b)$	

Deduktivní soustava výrokové logiky

- Správnost a nesprávnost úsudků
- Jak rozhodnout, zda je úsudek správný?

Formální definice úsudku I.

Nechť $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots P_m}$ jsou výrokové formule v proměnných $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots x_k}$. Nechť rovněž $\boldsymbol{Z}$ je výroková formule.

Říkáme, že z formulí $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots P_m}$ vyplývá závěr Z a píšeme

$$\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots P_m \models Z}$$

právě tehdy, když pro libovolné pravdivostní hodnoty proměnných $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots x_k}$ platí, že nabývá-li pravdivostní funkce formulí $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots P_m}$ současně hodnoty 1, pak nabývá i pravdivostní funkce formule $\boldsymbol{Z}$ hodnoty 1.

Formální definice úsudku II.

- $P_1, P_2, \dots P_m \models Z$
  právě tehdy, když
- $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_m) \models Z$

- $P \models Z$ právě tehdy, když $\models (P \Rightarrow Z)$,
  tj. když implikace $P \Rightarrow Z$ je tautologie

Ověření správnosti úsudku

Úsudek

$$P_1, P_2, \ldots P_m \vdash Z$$

je správný, jestliže formule

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_m) \Rightarrow Z$$

je tautologie.

Úsudek je tedy správný, jestliže implikace důsledku z konjunkce premis je tautologie.

Příklad: Ověření správnosti úsudku

- Předpoklady:
  - Jestliže prší a mrzne, vzniká náledí
  - Jestliže vzniká náledí, v této zatáčce se vždy někdo vyboura
  - V této zatáčce se nikdo nevyboural
- Závěr:
  - Usuzujeme, že nepršelo.

- Formalizujeme předpoklady a závěr
  - $(p \wedge m) \Rightarrow n; \quad n \Rightarrow b; \quad \neg b$
  - $\neg p$
- Ověříme, zda je tautologií formule
  - $(((p \wedge m) \Rightarrow n) \wedge (n \Rightarrow b) \wedge (\neg b)) \Rightarrow \neg p$

Pravidlo odloučení (modus ponens)

- Nechť X a Y jsou formule.
- Potom platí $(X, X \Rightarrow Y) \vdash Y$.
- Tedy z platnosti formulí X a $X \Rightarrow Y$ můžeme odvodit platnost formule Y.
- Důkaz plyne z pravdivostní tabulky formule $(X \wedge (X \Rightarrow Y)) \Rightarrow Y$

Příklad: Ověření správnosti úsudků

- Předpoklady:
  - Jestliže Jarda nepřišel ke snídani, je nemocný
  - Jarda přišel ke snídani
- Co z toho plyne?
  - Jarda je unavený
  - Jarda je doma
  - Jarda přišel ke snídani
  - Jarda je nemocný
  - Jarda není nemocný

Substituční pravidlo pro proměnnou

- Buď X formule a q její proměnná.
- Jestliže do X za q dosadíme formuli A, pak formuli vzniklou touto substitucí označíme S(A/q, X)
- Pak platí

$$\mathbf{X, A \Leftrightarrow q \vdash S(A/q, X)}$$

Substituční pravidlo pro proměnnou v tautologii

- Buď T tautologie a q její proměnná.
- Jestliže do T za q dosadíme formuli A, pak formuli vzniklou touto substitucí označíme S(A/q, T)
- Pak platí

$$\mathbf{T} \models \mathbf{S(A/q,\ T)}$$

Substituční pravidlo pro formuli

- Buď X formule a B její podformule.
- Jestliže do X za B dosadíme formuli A, pak formuli vzniklou touto substitucí označíme S(A/B, X)
- Pak platí

$$\mathbf{X, A \Leftrightarrow B \vdash S(A/B, X)}$$

Odvození formule

- Formule Z je důsledkem formulí P_1, P_2, … P_m právě tehdy, když existuje posloupnost formulí X_1, X_2, … X_n taková, že X_n = Z a pro každé i platí:
  - $X_i = P_j$ pro vhodné j
  - $X_i = S(A/t, T)$ nebo $X_i = S(A/B, T)$
    - kde T je libovolná tautologie
  - X_i je důsledkem aplikace pravidla modus ponens na některé z předchozích formulí
- Tato posloupnost formulí se nazývá ***odvození formule*** Z z formulí P_1, P_2, … P_m.

Příklad odvození

- Dokažte odvozením, že platí

  $(a \vee b), (a \Rightarrow c), (b \Rightarrow d) \vdash (c \vee d)$

- Odvození:
  - $a \Rightarrow c$ *(P_2)*
  - $c \Rightarrow (c \vee d)$ *(disjunkce je implikována...)*
  - $a \Rightarrow (c \vee d)$ *(tranzitivita implikace)*
  - $\neg(c \vee d) \Rightarrow \neg a$ *(obměna implikace)*
  - $b \Rightarrow d$ *(P_3)*
  - $d \Rightarrow (c \vee d)$ *(disjunkce je implikována...)*
  - $b \Rightarrow (c \vee d)$ *(tranzitivita implikace)*
  - $\neg(c \vee d) \Rightarrow \neg b$ *(obměna implikace)*
  - $\neg(c \vee d) \Rightarrow (\neg a \wedge \neg b)$ *(důsledek výše uvedeného)*
  - $(\neg a \wedge \neg b) \Rightarrow \neg(a \vee b)$ *(pravidla pro negování)*
  - $\neg(c \vee d) \Rightarrow \neg(a \vee b)$ *(tranzitivita implikace)*
  - $(a \vee b) \Rightarrow (c \vee d)$ *(obměna implikace)*
  - $(c \vee d)$ *(modus ponens)*

Další vlastnosti úsudků

- Jestliže $\vdash a$, pak $b \vdash a$ pro lib. b
  - Tautologie je důsledkem libovolné formule
- Jestliže $\vdash a$, $a \vdash b$, pak také $\vdash b$
  - Důsledkem tautologie je opět tautologie
- Nechť P,Q jsou množiny formulí, a, b formule:
  - Jestliže $P \vdash a$, $Q \vdash b$, pak $P \cup Q \vdash a \wedge b$
  - Jestliže $P \vdash a \wedge b$, pak $P \vdash a$, $P \vdash b$
  - Jestliže $(P, a) \vdash b$, pak $P \vdash a \Rightarrow b$
  - …