SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

II. SIGNÁLY ZÁKLADNÍ POJMY

MU
IBA

SIGNÁL - DEFINICE

SIGNÁL - DEFINICE

- ☑ **Signál** je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.
- ☑ Je-li zdrojem informace živý organismus, pak hovoříme o **biosignálech** bez ohledu na podstatu **nosiče informace**.

SIGNÁLY ☼ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné signály vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) modely;
- ☑ model signálu by měl splňovat dva základní požadavky:
  - ➔ výstižnost, přesnost;
  - ➔ jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE SIGNÁLŮ

A) Spojité a diskrétní signály

Analogové a digitální (číslicové) signály

B) Reálné a komplexní signály

C) Deterministické a náhodné signály

D) Sudé a liché signály

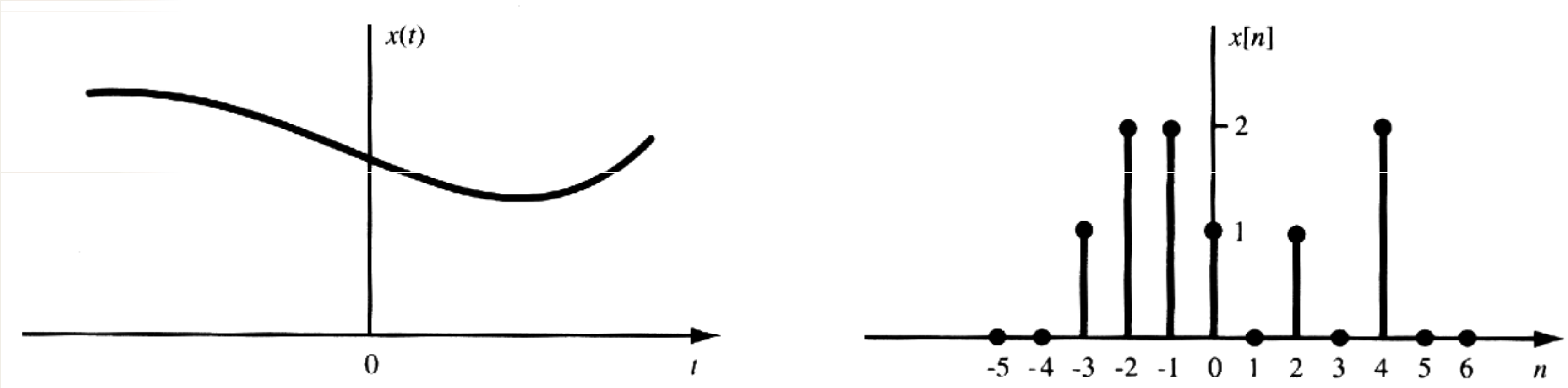
E) Periodické a neperiodické signály

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

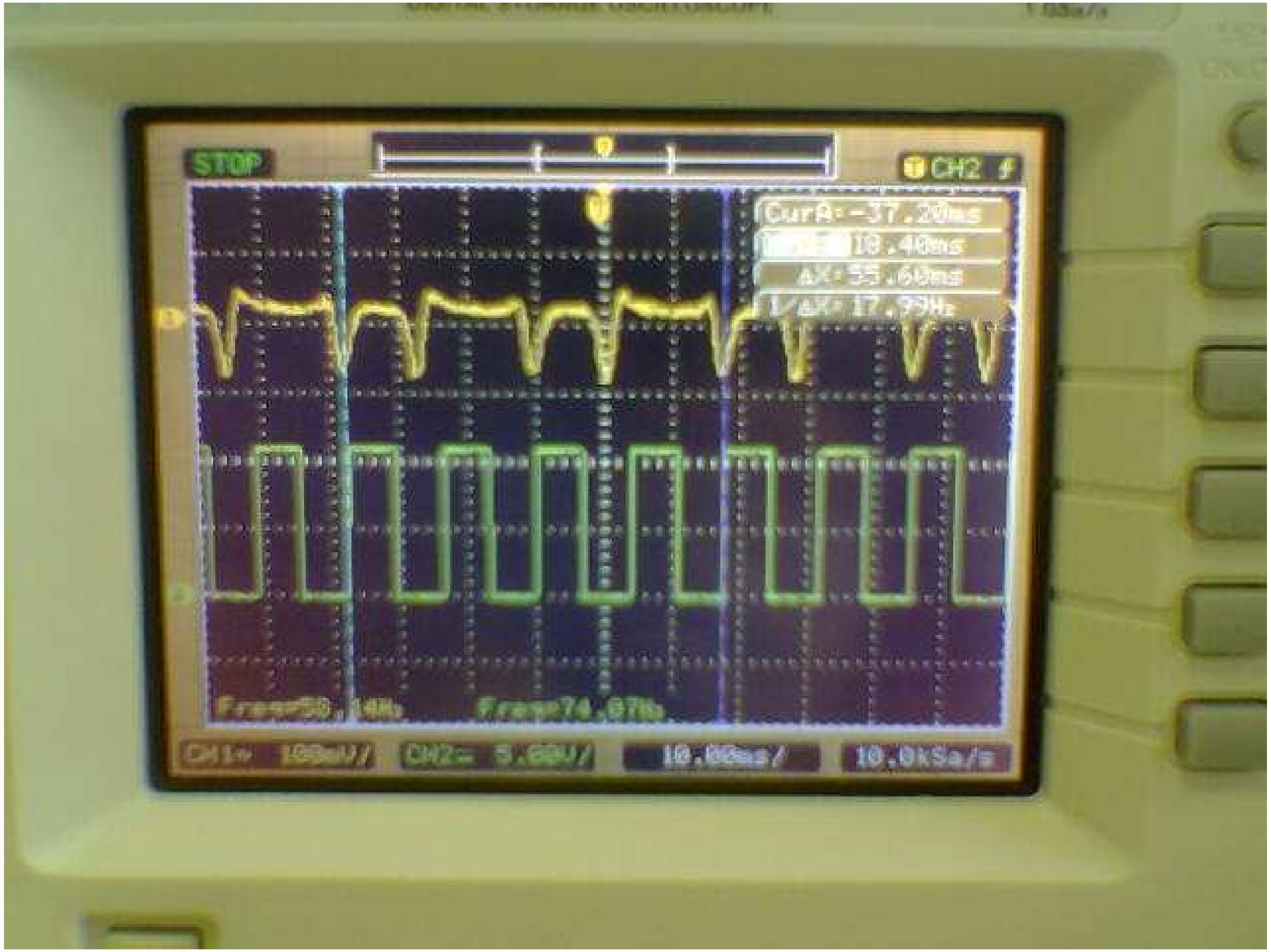
- **Spojitý signál** (přesněji **signál se spojitým časem**) je takový signál $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- **Diskrétní signál** (přesněji **signál s diskrétním časem**) je takový signál $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní signál proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. x(nT).

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitý signál v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál.

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

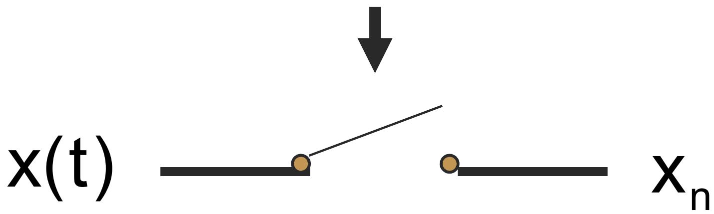


A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- U diskrétního signálu není hodnota signálu mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní signál lze také získat **vzorkováním** spojitého signálu: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$, ... (též značení x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- Diskrétní signál vyjádřený posloupností můžeme zapsat
  - funčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad n < 0 \end{cases}$$

  - explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$$

(zde se implicitně předpokládá, že prvky jsou číslovány od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

ANALOGOVÉ A DIGITÁLNÍ (ČÍSLICOVÉ) SIGNÁLY

- **Analogový signál** nabývá hodnot ze spojitého intervalu.
- **Digitální (číslicový) signál** nabývá hodnot z konečné množiny hodnot.

Příkladem analogového signálu může být např. EKG signál zaznamenaný na papír nebo hodnota napětí zobrazená na analogovém osciloskopu.

Příkladem digitálního signálu může být např. barva pixelu digitální fotografie <0;255>.

- **Kvantování** je proces, kterým se převádí spojité hodnoty veličin na diskrétní.

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ SIGNÁLY

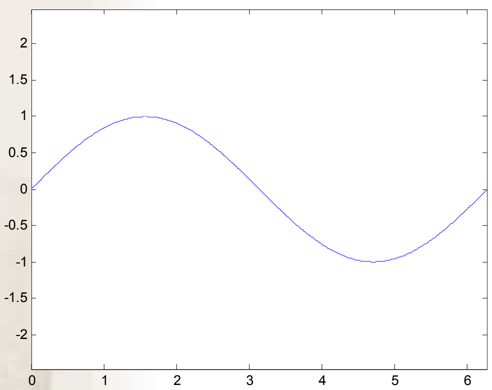
- **Reálný signál** je takový signál, který nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- **Komplexní signál** je takový signál, který nabývá komplexních hodnot. (Hypotetický, v praxi neměřitelný.)

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

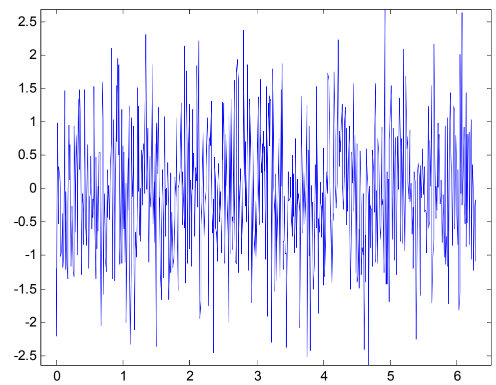
C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

- **Deterministický signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Takovýto signál může být tedy popsán analytickou funkcí času *t*.
- **Náhodný (stochastický) signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.



$x(t) = \sin t$

$N(0,1)$



C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

- **Náhodný (stochastický) signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

Náhodný (stochastický) signál (veličina) je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

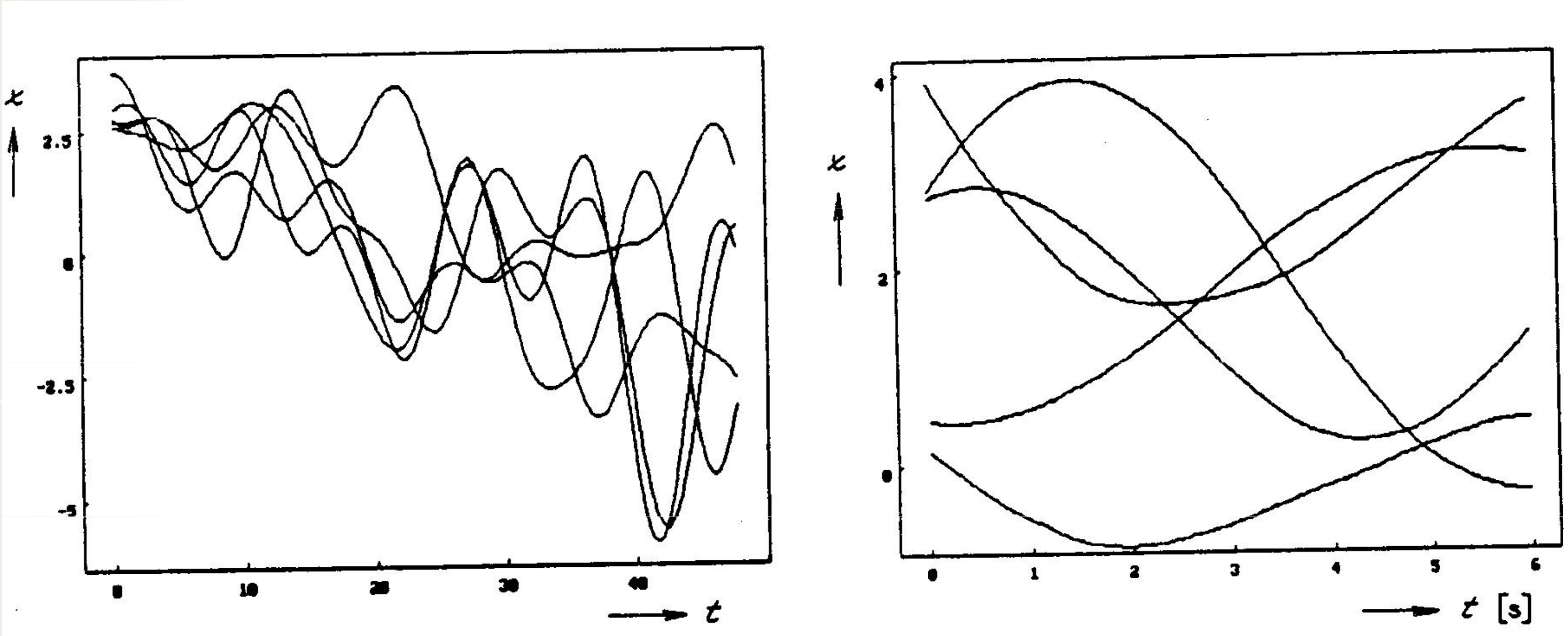
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (random process) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

- stacionarita;
- ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (stationary random process) je proces se stálým chováním



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (ergodic random process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace

D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY

- **Sudý signál** je takový, pro který platí

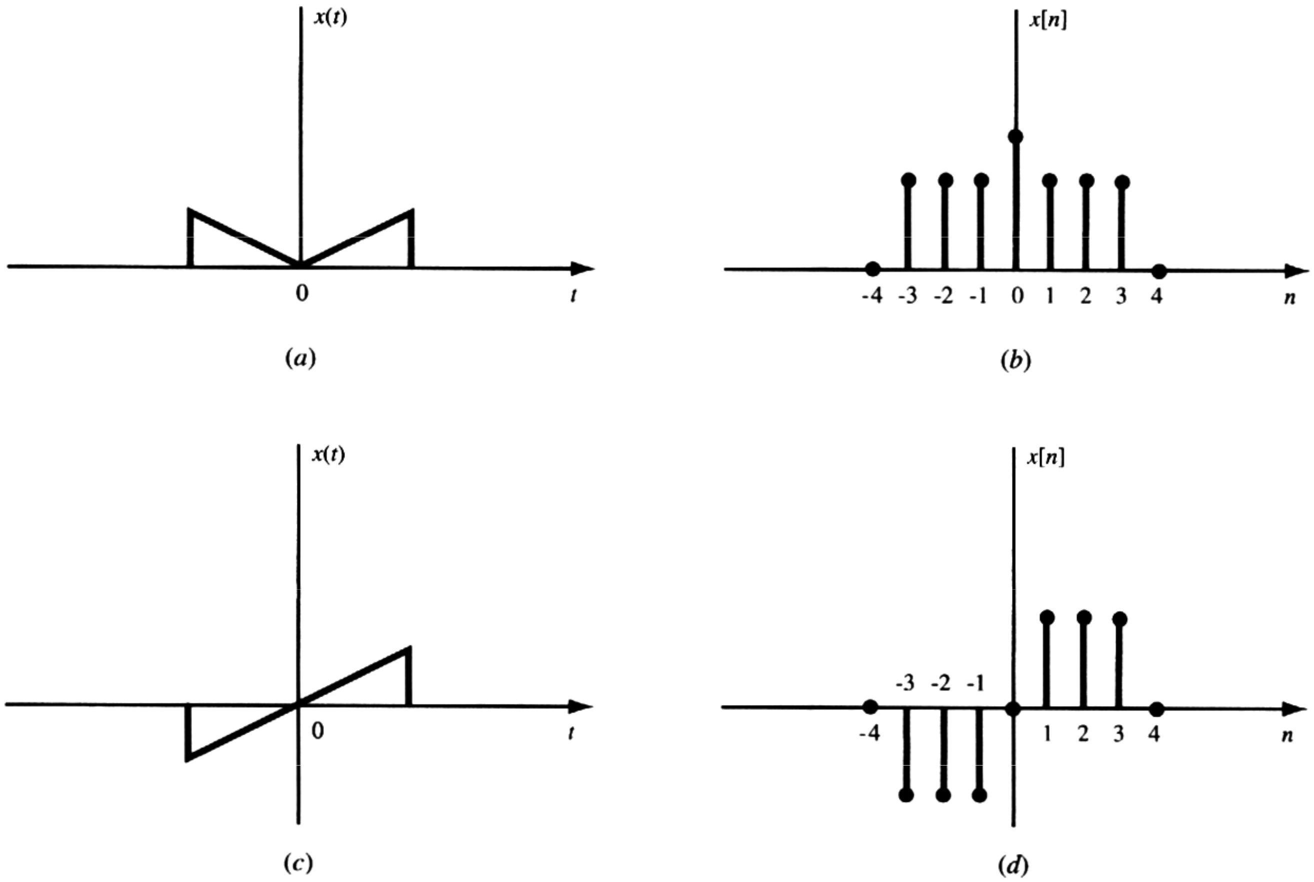
$$x(-t) = x(t), \quad x_{-n} = x_n$$

- **Lichý signál** je takový, pro který platí

$$x(-t) = -x(t), \quad x_{-n} = -x_n$$

- Součin sudého a lichého signálu je lichý signál.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých signálů je sudý signál.

D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY



E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- ☑ Spojitý signál $x(t)$ je **periodický s periodou** T, jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

$$x(t+T) = x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota T, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

$$x(t+kT) = x(t),$$

kde k je celé číslo.

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- **Pozor!** Pro konstantní signál není definována základní perioda. Konstantní signál je periodický pro každou hodnotu T.
- Spojitý signál, který není periodický se nazývá **neperiodický** nebo **aperiodický**.
- Reálné biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních signálech**.

Pohov!

řečový signál – samohláska „e“

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- Pro diskrétní signál definujeme periodický signál s periodou N obdobně

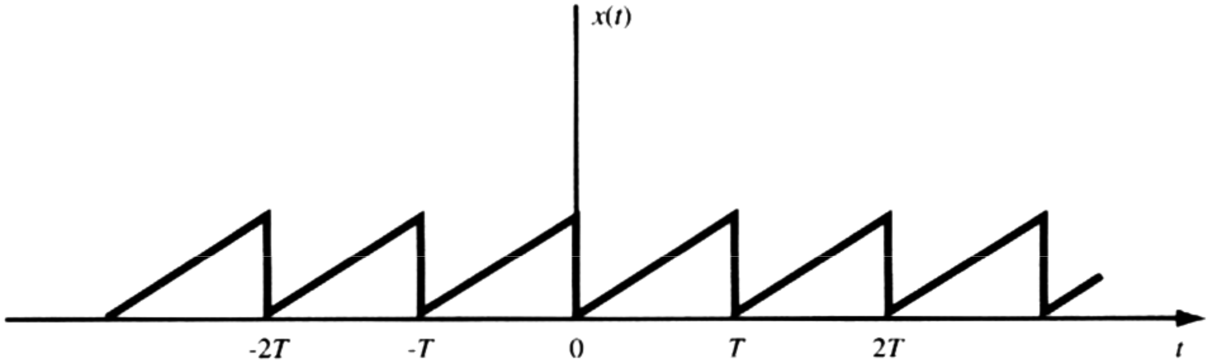
$$x_{n+N} = x_n \qquad \text{a} \qquad x_{n+kN} = x_n$$

Pozor!

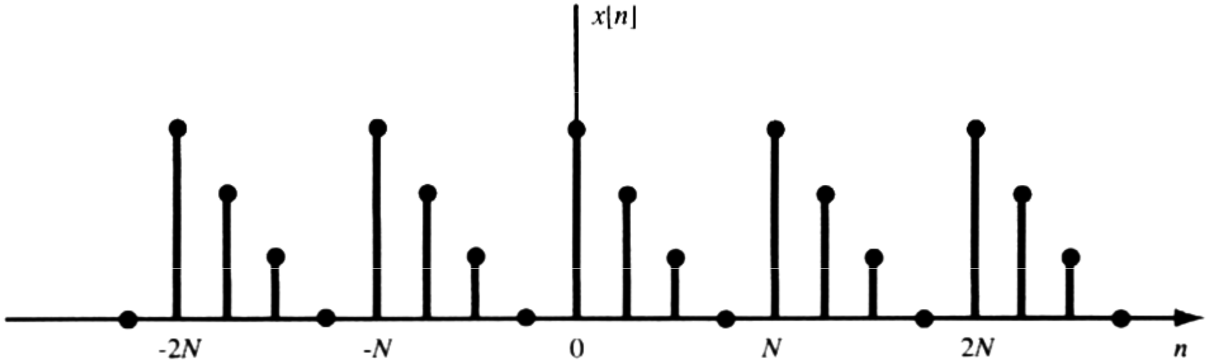
- ☑ Diskrétní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

Pohov!

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY



(a)

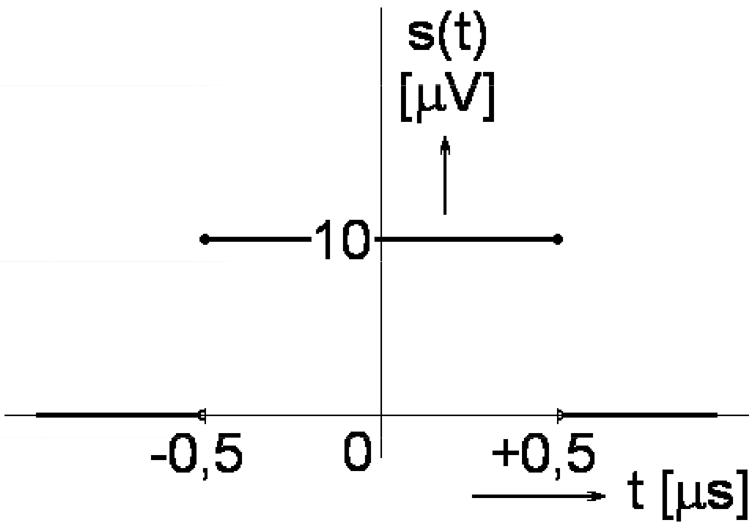


(b)

SIGNÁLY

matematické modely - příklady

☑ jednorázový deterministický signál



$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0{,}5\ \mu s;\ 0{,}5\ \mu s \rangle$

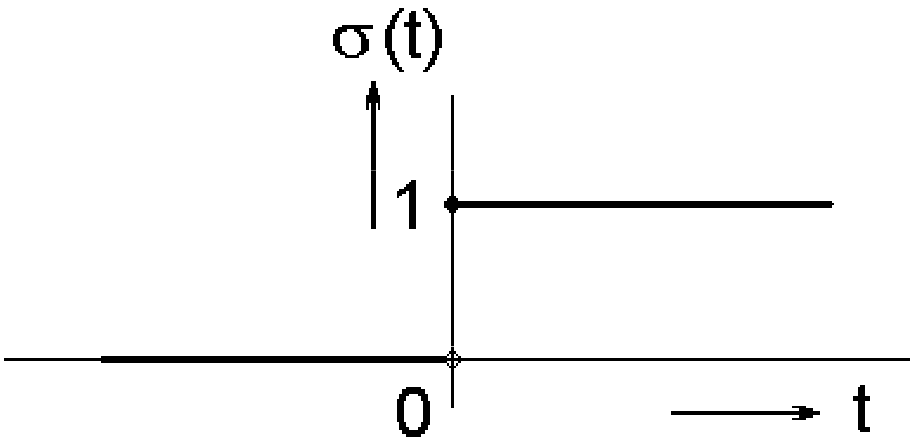
$s(t) = 0$ V pro $t \in (0{,}5\ \mu s;\ \infty \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty;\ -0{,}5\ \mu s\ )$

JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$

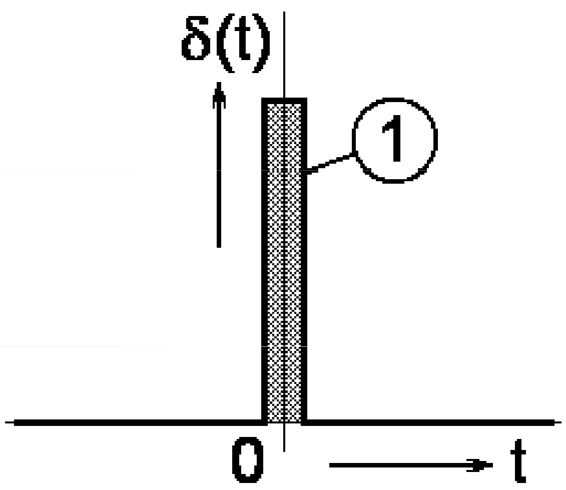


JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- ☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

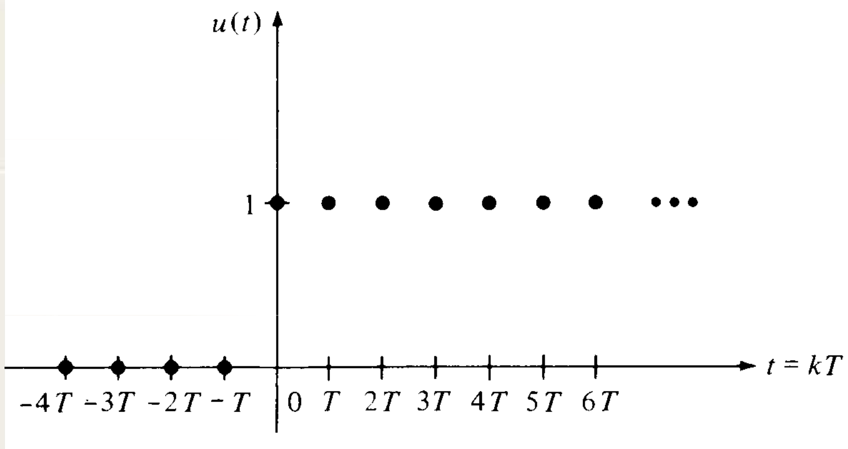
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t).\delta(t-\tau)dt = s(\tau)$$



zjednodušeně:

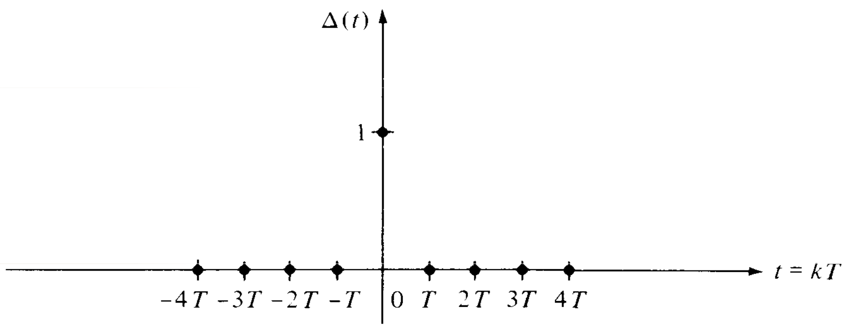
jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky $\Rightarrow$ mohutnost je jednotková

JEDNORÁZOVÉ DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



- ☑ jednotkový skok

$$\Sigma(t) = \begin{cases} 0, & t = kT, k = \ldots, -2, -1, \\ 1, & t = kT, k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$



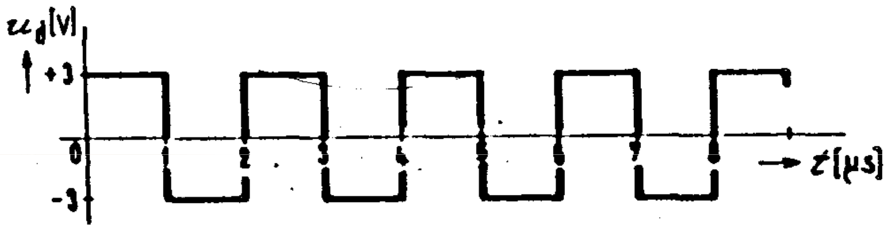
- ☑ jednotkový impuls

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = kT, k \neq 0 \end{cases}$$

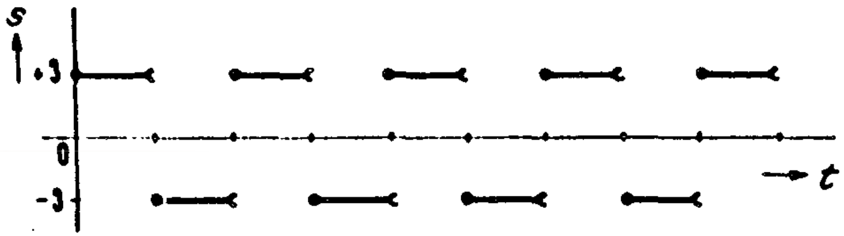
SIGNÁLY

matematické modely - příklady

☑ periodický deterministický signál



Deterministický fyzikální model datového signálu.



Graf matematického modelu signálu

$s(t) = 3$ pro $t \in \langle 0\ s;\ 10^{-6}\ s \rangle$

$s(t) = -3$ pro $t \in \langle\ 10^{-6}\ s;\ 2.10^{-6}\ s \rangle$

$\forall n \in \Re$: $s(t+n.2.10^{-6}) = s(t)$

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- ☑ **změna časového měřítka**

$$s(t) \sim s(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- ☑ **změna časového měřítka**

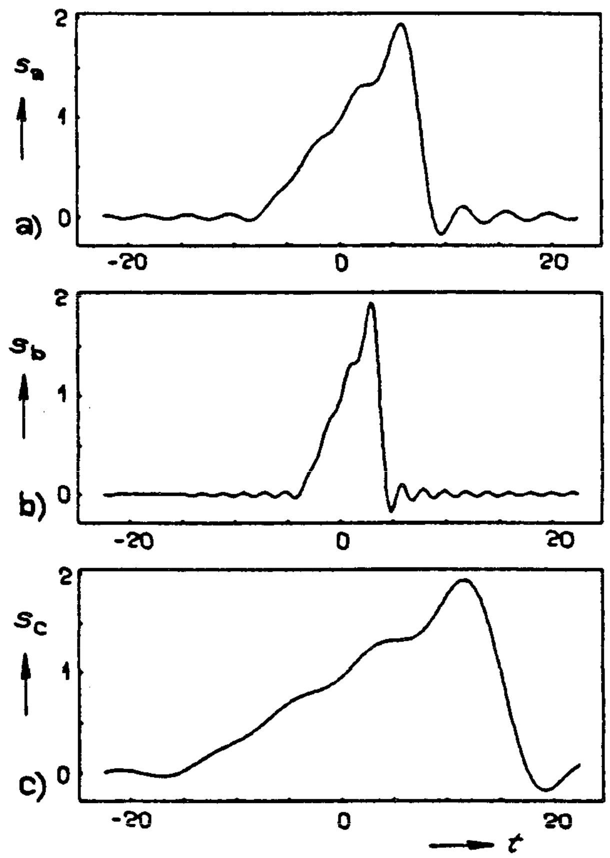
$$s(t) \sim s(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

m > 1 – časová komprese;

m < 1 – časová expanze

m = 1 – nic se neděje



Změna časového měřítka: a) původní signál; b) stlačený signál, $m = 2$; c) roztažený signál, $m = 0{,}5$.

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- **posunutí v čase**

$$s(t) \sim s(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

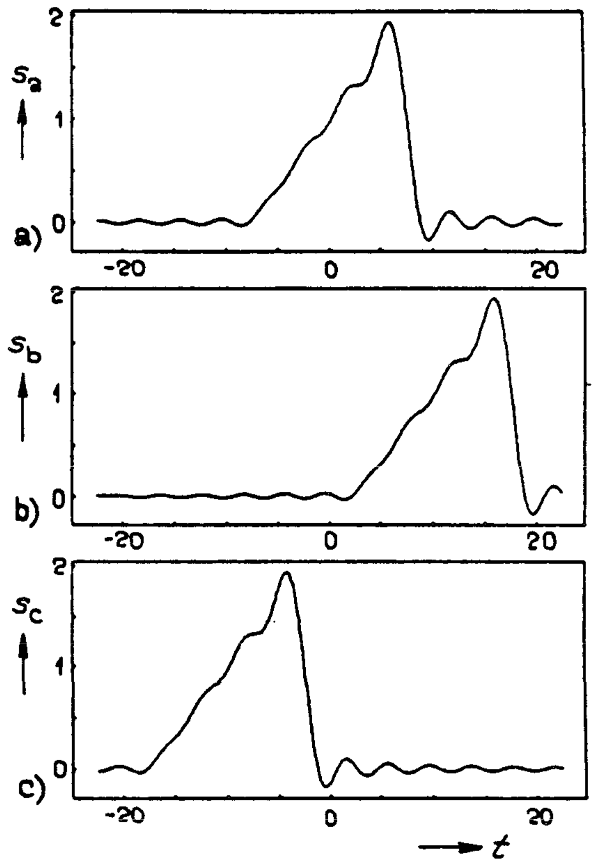
ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- ☑ **posunutí v čase**

$$s(t) \sim s(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

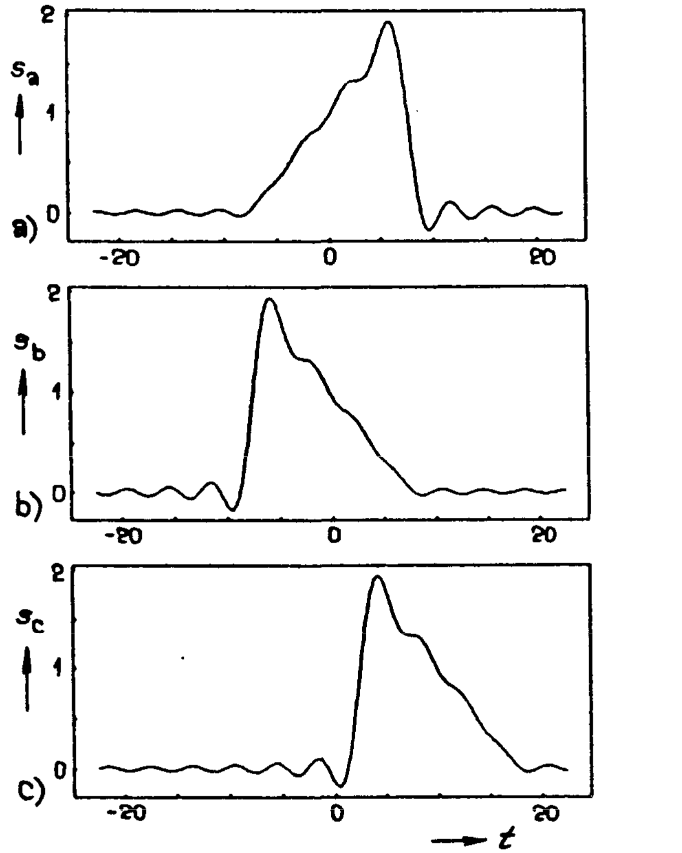


Posunutí v čase: a) původní signál $s(t)$, b) signál $s(t - 10)$, c) signál $s(t + 10)$.

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

- ☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$s(t) \sim s(-t) \,,$$



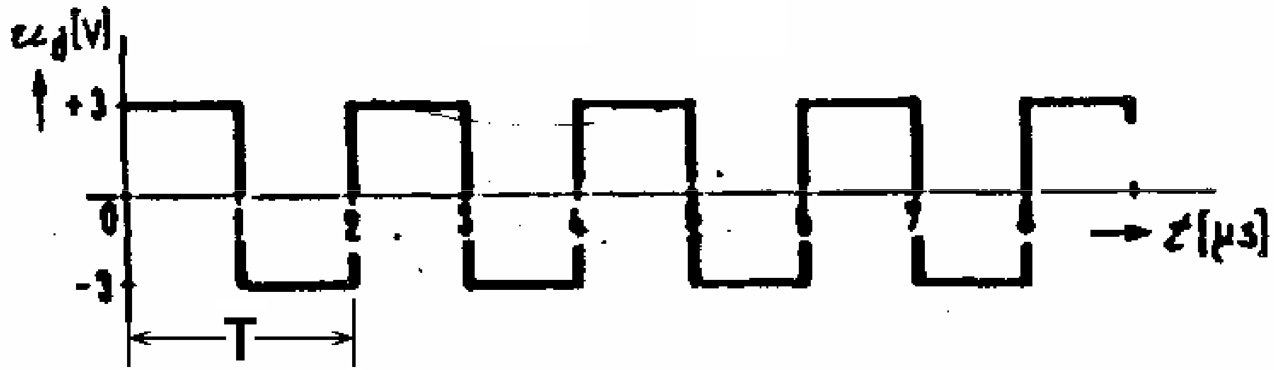
Reversace s translací: a) signál $s(t)$, b) signál obrácený, $s(-t)$, c) signál obrácený i posunutý, $s(10 - t)$.

PERIODICKÉ SIGNÁLY

- ☑ pro průběh periodického signálu platí vztah

$$s(t+nT) = s(t), \text{ pro } t \in \langle 0, T)$$

kde n je celé číslo a T nazýváme **periodou** (T je nejmenší kladné číslo, pro které výše uvedený vztah platí)



HARMONICKÝ SIGNÁL

- **harmonický signál** je definován funkcí

$$s(t) = C_1.\cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$

kde

$C_1>0$ je amplituda harmonického signálu

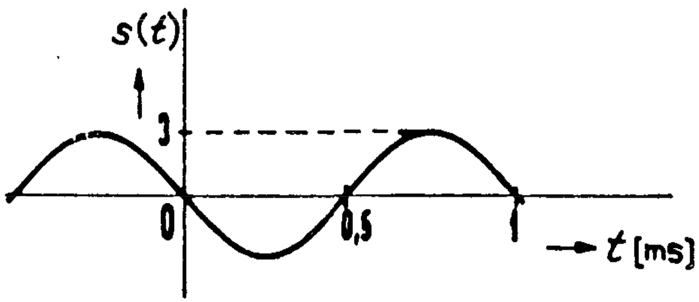
$\omega_1 >0$ je úhlový kmitočet h.s.

φ_1 je počáteční fáze, tj. fáze v čase t=0

$\omega_1 t + \varphi_1$ je fáze harmonického signálu

Perioda harmonického signálu je dána vztahem

$$T_1 = 2\pi/\omega_1$$



HARMONICKÝ SIGNÁL

- další definice

$$s(t) = \mathit{Re}\{\hat{S}(t)\} = \mathit{Re}\{C_1.\exp[j(\omega_1 t + \varphi_1)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

HARMONICKÝ SIGNÁL

kupodivu lze použít i vztah

$$s(t) = \mathcal{Re}\{C_1.\exp[j(-\omega_1 t - \varphi_1)]\} = \mathcal{Re}\{\hat{S}^*(t)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to

HARMONICKÝ SIGNÁL

Protože platí

$$s(t) = Re\{\hat{S}(t)\} = Re\{\hat{S}^*(t)\} \text{ a } Im\{\hat{S}(t)\} = -Im\{\hat{S}^*(t)\}$$

je i

$$s(t) = ½.\{\hat{S}(t) + \hat{S}^*(t)\}$$

$$s(t) = ½.\{C_1 \exp(j\varphi_1).\exp(j\omega_1 t)\} + \\ + ½.\{C_1 \exp(-j\varphi_1).\exp(-j\omega_1 t)\}$$

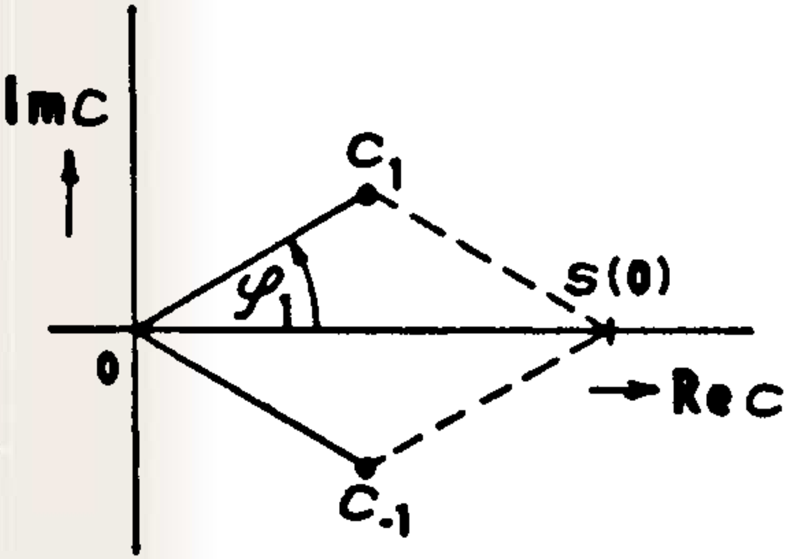
Označíme-li

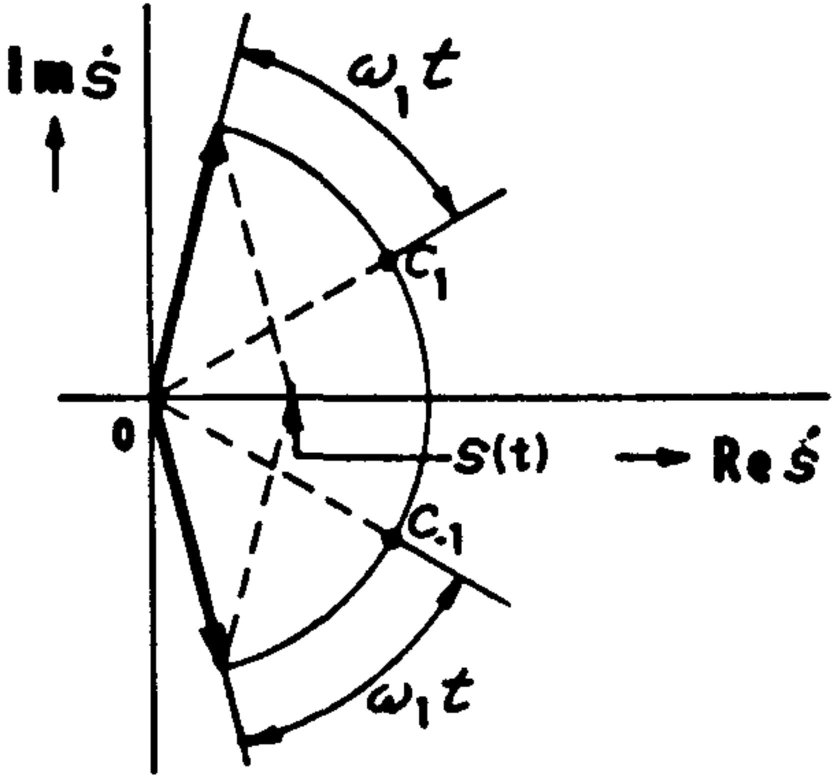
$$c_1 = ½.C_1 \exp(j\varphi_1) \quad \text{a} \quad c_{-1} = ½.C_1 \exp(-j\varphi_1)$$

je

$$s(t) = c_1.\exp(j\omega_1 t) + c_{-1}.\exp[j(-\omega_1)t]$$

HARMONICKÝ SIGNÁL

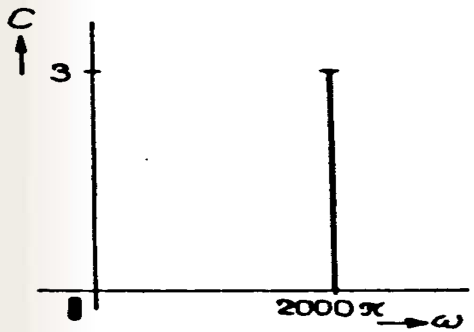




HARMONICKÝ SIGNÁL

- třiparametrický harmonický signál lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách
  amplituda x úhlový kmitočet a počáteční fáze x úhlový kmitočet:

$$C_1 = C_1(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \varphi_1(\omega);$$



spektrum amplitud

spektrum počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

SHRNUTÍ

- Jaké typy signálů známe (dle vlastností)?
- Stacionarita, ergodicita
- Definice základních signálů (jednotkový skok, impuls, harmonický signál)
- Základní operace se signály
- Různé formy vyjádření harmonického signálu
- Co je frekvenční spektrum?