3. Měření

Fyzikální veličiny
Fyzikální jednotky
Soustava SI
Jiné soustavy
Měření
- **chyby**
- **zpracování výsledků měření**
- **graf**

Pozorování – obvykle kvalitativní charakter, popis stavu, popis změn, dlouhodobá zkušenost např. popis duhy, střídání dne a noci, koloběh vody….

Měření – kvantitativní pozorování
- co měříme? definice veličiny (délka, čas, hmotnost……
- jednotky, standardy, definice…….
- zpracování měření, chyby, statistika…….

Historie – do 18 století převládá empirie, žádné obecné definice, dohody, zásadní změny v období Velké francouzské revoluce
- 1790 Francouzská akademie – zásadní ovlivnění systematiky měření
- 1875 Mezinárodní metrická konvence, zavedení desetinné soustavy, první definice (metr…), (18 států, včetně Rakouska Uherska (součást české země) ČSR od roku 1922)
- Mezinárodní ústav pro míry a váhy v Sévres u Paříže

Soustava SI – obecně závazná, mezinárodně uznaná (nevylučují se drobné odchylky), závazná pro učebnice, výuku…….

Fyzikální veličiny, fyzikální jednotky, soustava SI

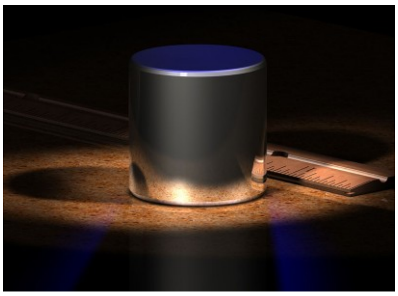
Veličina	**jednotka**	**značka**	**přesnost**
Délka	**metr**	**m**	10^{-10}
Hmotnost	**kilogram**	**kg**	10^{-7}
Čas	**sekunda**	**s**	10^{-14}
Elektrický proud	**ampér**	**A**	10^{-5}
Teplota	**kelvin**	**K**	10^{-4}
Svítivost	**kandela**	**cd**	5.10^{-3}
Látkové množství	**mol**	**mol**	10^{-6}

násobky základních jednotek

činitel	**předpona**	**značka**
10^{24}	**yotta**	**Y**
10^{21}	**zetta**	**Z**
10^{18}	**exa**	**E**
10^{15}	**peta**	**P**
10^{12}	**tera**	**T**
10^{9}	**giga**	**G**
10^{6}	**mega**	**M**
10^{3}	**kilo**	**k**
10^{2}	**hekto**	**h**

10^{-1}	**deci**	**d**
10^{-2}	**centi**	**c**
10^{-3}	**mili**	**m**
10^{-6}	**mikro**	**µ**
10^{-9}	**nano**	**n**
10^{-12}	**piko**	**p**
10^{-15}	**femto**	**f**
10^{-18}	**atto**	**a**
10^{-21}	**zepto (*dříve* banto)**	**z (*dříve* b)**
10^{-24}	**yokto**	**y**

Pro základní jednotky převažuje zadání definicí, tendence zpřesnění a realizace kdekoliv, na ústupu je určení pomocí normálu (např. kg….



Historická poznámka – délka, metr
1790 – délka kyvadla s dobou kyvu 1 sec, závislost g na místě na zeměkouli

1791 – 10^{-7} část kvadrantu poledníku Země
1799 – Pt metr
1889 – etalon (platina, iridium, Sévres, vzdálenost rysek – až do roku 1960
1960 – 1 650 763.73 vlnových délek definovaného přechodu kryptonu
1983 – délka dráhy, kterou urazí světlo za 1/299792458 sec (důsledek přesnosti určení času)

Historická poznámka – čas, sekunda
- rotace Země, 1/86400 délky středního slunečního dne
- 1/31556925,9477 délky tropického roku (10^{-9})
- atomové hodiny, 10^{-10} – 10^{-13}
- 9 192 631 770 period záření mezi dvěma energiovými hladinami cézia 133

Jiné soustavy

Přirozené soustavy jednotek – tendence volby základních fyzikálních konstant
Např.
1901 Max Planck : c – rychlost světla, h – Planckova konstanta, G – gravitační konstanta, k – Boltzannova konstanta
důsledek:
$l_0=(Gh/c^3)^{1/2} = 4.10^{-35}$ m Planckova délka
$m_0=(hc/G)^{1/2} = 5.10^{-8}$ kg Planckova hmotnost
$t_0=(Gh/c5)^{1/2} = 4.10^{-43}$ s Planckův čas

Např.:
Hartree 1926: a_0 – Bohrův poloměr, m_0 – klidová hmotnost elektronu, e – elementární náboj elektronu, h – Planckova konstanta

Relativistická kvantová mechanika: c, h, k, m_0

Poznámka :
další fyzikální veličiny – jednotky jsou kombinací základních
např.. rychlost
v=délka/ čas….m/s….$m.s^{-1}$
a=….$m.s^{-2}$

Kontrola rovnic stanovením rozměru:
např. $l=l_0+v.t+1/2.g.t^2$…….$[m]=[m]+[m.s^{-1}.s]+[m.s^{-2}.s^2]$

Měření

Fyzika – snaha po přesnosti, realistický postup
Cíl – stanovení hodnoty dobře definované fyzikální veličiny s vysokou a definovanou přesností (chybou)

Možnosti – přímé měření (srovnání objektu s měřidlem....   např. měření délky skládacím metrem
- pomocí přístroje (měření a převod na číslo... měření proudu a čtení výchylky na stupnici ampérmetru, měření teploty z roztažnosti rtuti....

Vzájemné ovlivňování objektu měření a přístroje
- oprava el. napětí na konečný odpor voltmetru
- ochlazení lázně teploměrem
- principiální – vztah neurčitosti (h....

Metody měření – dobře definovaný postup

přímé – proud, napětí odpor z definice R=V/J
nepřímé – optická absorpce....koncentrace roztoku

absolutní – v absolutních jednotkách ....energie, vzdálenost
relativní – relativní jednotky...odrazivost, index lomu

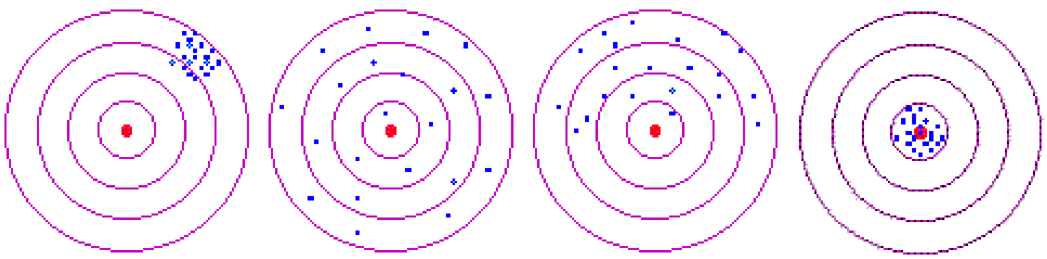
statické – měření ustálené veličiny .... teplota v rovnováze
dynamické – měření teploty v závislosti na čase

Chyby

$\Delta x = x - x^*$ Δx –absolutní chyba, x- naměřená hodnota, x^* - „správná hodnota“

$\Delta r = \Delta x / x^*$ Δr – relativní chyba, (někdy v procentech)

Druhy chyb:
- systematické – jsou součástí metody, nedokonalých přístrojů..... možnost odstranění, kalibrace, atd....
- náhodné – náhodné vlivy, možnost statistického zpracování
- hrubé – omyly..... nutno vypustit



Statistical:	Small	Large	Large	Small
Systematic:	Large	Small	Large	Small

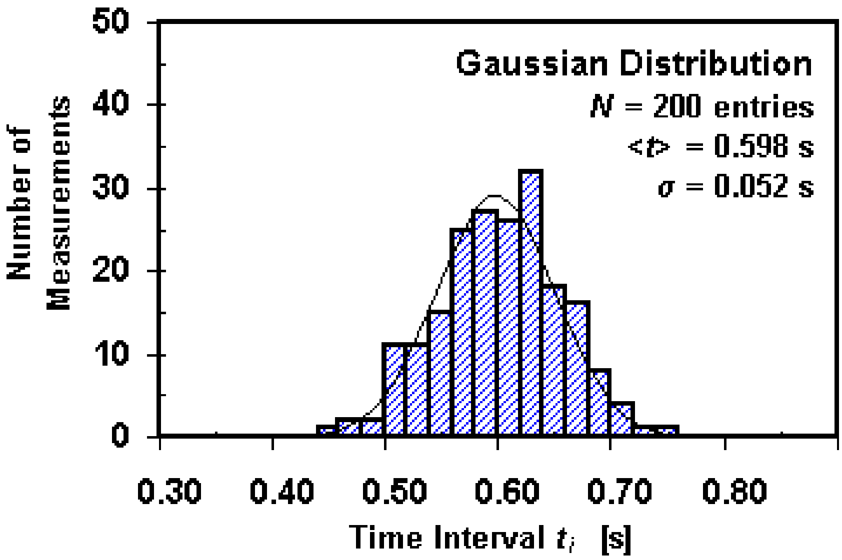
Zdroje chyb
Např.: měřený objekt (jeho stabilita....), prostředí (atmosférické vlivy.....), metoda (čtení na stupnici, paralaxa....), přístroj (šum, rušení....),pozorovatel (subjektivní vlastnosti....), metodika zpracování (metoda, zaokrouhlování....)....

Náhodné chyby

Předpoklady – skutečně náhodné, větší množství měření….

Rozdělovací funkce a hustota pravděpodobnosti

Měříme veličinu x, jednotlivá měření x_n, N celkový počet měření, rozdělíme osu x na intervaly Δx_n, na osu y vyneseme počet měření Q v příslušném intervalu, respektive četnost měření q=Q/N, dostaneme tzv. histogram



Pro velká N dostaneme rozdělovací funkci f(x), respektive hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{P(x, x+\Delta)}{\Delta},$$

kde P je pravděpodobnost, že x padne do Δx. Pravděpodobnost, že měření padne do intervalu (a,b) je

$$P(a,b) = \int_a^b f(x)dx$$

pro celý interval musí platit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Distribuční funkce F(x) (někdy nahrazuje rozdělovací funkci) je pravděpodobnost, že měření padne do intervalu (-∞, x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \quad \text{nebo} \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Pro střední hodnotu měřené veličiny x platí

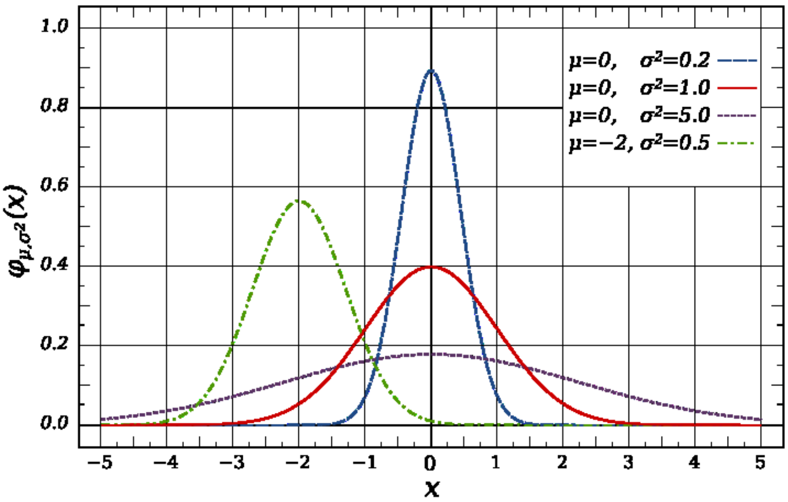
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

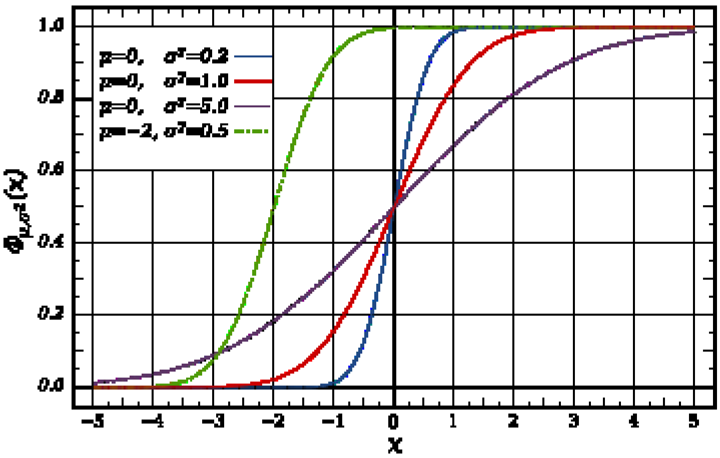
Normální rozdělení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Pro velké množství měření s náhodnými chybami platí tzv. Gaussovo rozdělení

kde parametr σ souvisí se šířkou křivky a parametr μ se blíží „správné hodnotě“.





Některé vlastnosti Gaussova rozdělení:

1. Platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

2. Maximum funkce f je pro x=μ, vypočítá se z podmínky

$$\frac{df}{dx} = 0$$

max. hodnota funkce je $f_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

3.funkce f je sudá, platí

$$f(\mu + x) = f(\mu - x)$$

4.Poloha maxima je rovna střední hodnotě

$$\overline{x} = \mu$$

5. Předpokládáme, že platí

$$\mu = x^*$$

protože pravděpodobnost ze strany + a – je stejná.

6. parametr σ určuje šířku křivky – viz obr. Často se používá rovněž FWHM (full with of half maximum) nebo HWHM(half …)

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_{1,2}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\left[-\frac{(x_{1,2}-\mu)^2}{2\sigma}\right] = \ln 2 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} - \mu = \pm\sigma\sqrt{2\ln 2}$$

tedy

$$HWHM = \sigma\sqrt{2\ln 2} \cong 1.18\sigma$$

$$FWHM = 2\sigma\sqrt{2\ln 2} \cong 2.36\sigma$$

dále, pro $x = \mu \pm \sigma$ dostaneme

$$f(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \quad \rightarrow \quad \frac{f(\mu \pm \sigma)}{f(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cong 0.61$$

7. Dále

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad \text{pro} \quad x - \mu = \pm\sigma$$

v tomto bodě je inflexní bod

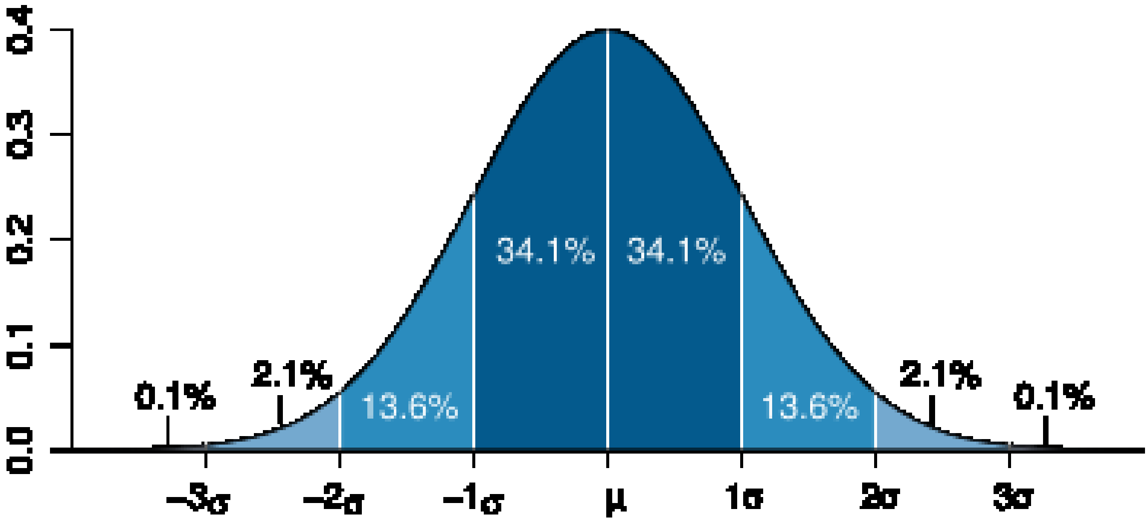
8. σ je tzv. směrodatná odchylka, respektive chyby měření. Pravděpodobnost, že hledaná hodnota je v intervalu:

$$P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx \cong 0.6827 \quad \text{tj. } 68\,\%$$

$$P(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = \int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx \cong 0.9545 \quad \text{tj. } 95\,\%$$

$$P(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = \int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx \cong 0.9973 \quad \text{tj. } 99\,\%$$

9. atd.



Zpracování výsledků měření

Předpokládáme, že máme velký soubor měření hodnot x_i, celkový počet je N. Lze ukázat, že střední hodnota měření, nejblíže správnému výsledku je aritmetický průměr všech hodnot

$$\bar{x} = \mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

a střední kvadratická odchylka hodnota jednoho měření

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

a střední kvadratická odchylka aritmetického průměru

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \qquad s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}}$$

Tak zvaný **interval spolehlivosti** je

$\bar{x} \pm k\,s(\bar{x})$

kde pro k=1,2,3 platí P=0.68 , 0.954, 0.997.

Pro malý počet měření (velmi častý případ) je třeba postup modifikovat. Pak interval spolehlivosti je

$\bar{x} \pm s(\bar{x})t_N$

Parametr t_N je tzv. Studentův koeficient a pro k=1 (68%) platí

N	2	3	10	30	∞
t_N	1.839	1.322	1.053	1.018	1.000

Praktický postup

Máme soubor měření x_i,
- vyloučíme hrubé chyby
- pokusíme se odstranit systematickou chybu

- vypočítáme aritmetický průměr
- střední kvadratickou odchylku aritmetického průměru – viz
- zvolíme úroveň spolehlivosti (k)
- případně najdeme příslušný Studentův koeficient, pak chyba je

$\delta = ks(\bar{x})t_N$

V případě neodstranitelnosti systematické chyby m je celková chyba

$\delta_c = \sqrt{\delta + m^2}$

V případě více proměnných

$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

je výsledek

$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots \bar{x}_n)$

a chyba (resp. střední kvadratická odchylka….)

$s(\bar{y}) = \sqrt{\sum_i (\frac{\partial \bar{y}}{\partial x_i})^2 s(\bar{x}_i)^2}$

tzv. zákon šíření chyb.
Podobně se postupuje jako dříve v případě systematických chyb, volby Studentových koeficientů, volby úrovně spolehlivosti.

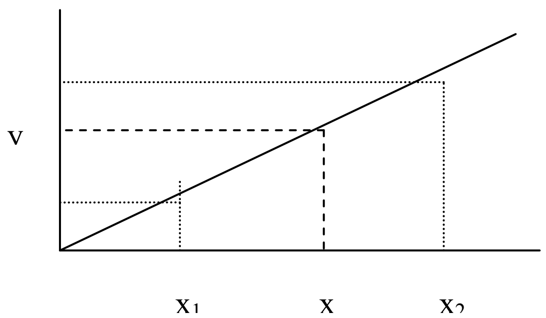
Funkční závislosti – y=f(x)

Interpolace a extrapolace
(extrapolaci je třeba se vyhnout)
lineární interpolace :

$x_i \leq x \leq x_{i+}$ pak

$y = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

podobně kvadratická interpolace a dále.



Metoda nejmenších čtverců

- máme naměřené dvojice bodů (x_i ,y_i). Zvolíme funkci y=f(x) zadanou vzorcem s parametry (a,b,c…) tak, aby suma čtverců byla minimální

$$S = \sum_{i=1} [f(x_i) - y_i]^2$$

požadujeme

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0,....$$

Např.:

y=ax

$$S = \sum (ax_i - y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum (ax_i - y_i)x_i = 0 \quad \to a\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \quad \to a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Např.:

y=ax+b

$$S = \sum (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum (ax_i + b - y_i) = 0$$

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Grafy

Grafické vyjádření funkce y=f(x), vždy vyjádření fyz. veličin, rozměry, měřítko, případně exp. body s chybou atd.…

Grafika, velké množství možností, 2dm, 3dm,……