

# I. Kmity

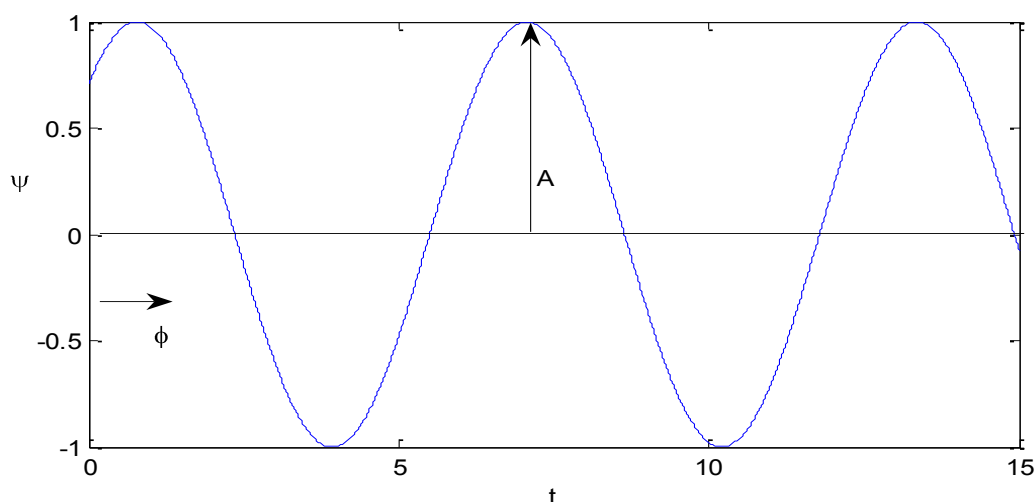
Do této kapitoly o kmitech řadíme obvykle periodický pohyb bodu nebo tělesa, případně soustavy bodů a těles, kolem rovnovážné polohy. Sledujeme především časovou závislost výchylky z této rovnovážné polohy. Kmity jsou tedy na rozdíl od vln prostorově ohraničené. Aplikace – kyvadlo, kmitající těleso na pružině, struna, hudební nástroje, hodiny, srdce atd. Charakteristika kmitů – harmonické, tlumené, volné, vynucené, složené, nelineární atd.

## 1. Harmonický oscilátor – jeden stupeň volnosti

### 1.1. Kinematika volného, harmonického netlumeného kmitu

Volné kmity, respektive vlastní kmity – po uvedení soustavy do kmitavého pohybu nepůsobí na ni žádné vnější síly, samozřejmě mimo ty, které způsobují kmitavý pohyb (gravitace, tuhost pružiny...). Uvažujeme jeden stupeň volnosti, stačí tedy k popisu jedna souřadnice. Pro harmonický, netlumený (zanedbáme tření) použijeme zápis

$$\psi(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1.1)$$



Obr.1.1.1. Harmonický kmit.

Kde  $\psi$  je výchylka (zpravidla mechanická),  $t$  je čas,  $A$  je amplituda (maximální výchylka),  $\omega$  je úhlová frekvence a  $\phi$  je fázové posunutí – viz obr.1.1.1. Dále platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega = 2\pi\nu \quad \nu = \frac{1}{T} \quad (1.1.2)$$

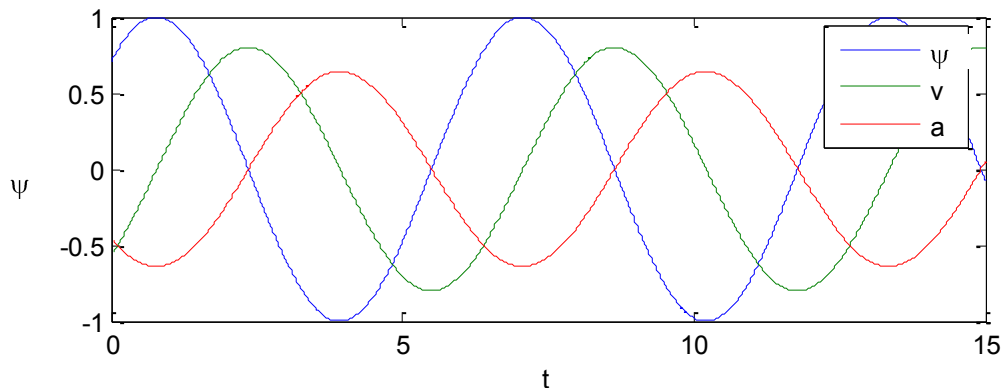
Kde  $T$  je časová perioda a  $\nu$  je frekvence. Snadno dostaneme rychlost  $v$  a zrychlení  $a$ , viz obr.

$$v = \frac{d\psi}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi), \quad (1.1.3)$$

$$a = \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 \psi \quad (1.1.4)$$

Pro úplný popis potřebujeme znát počáteční podmínky, např. pro  $t=0$  je  $\psi_0, v_0$  a platí

$$\Psi_0 = A \cos \varphi \quad v_0 = -\omega A \sin \varphi \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{\omega \Psi_0}, \quad A^2 = \Psi_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \quad (1.1.5)$$

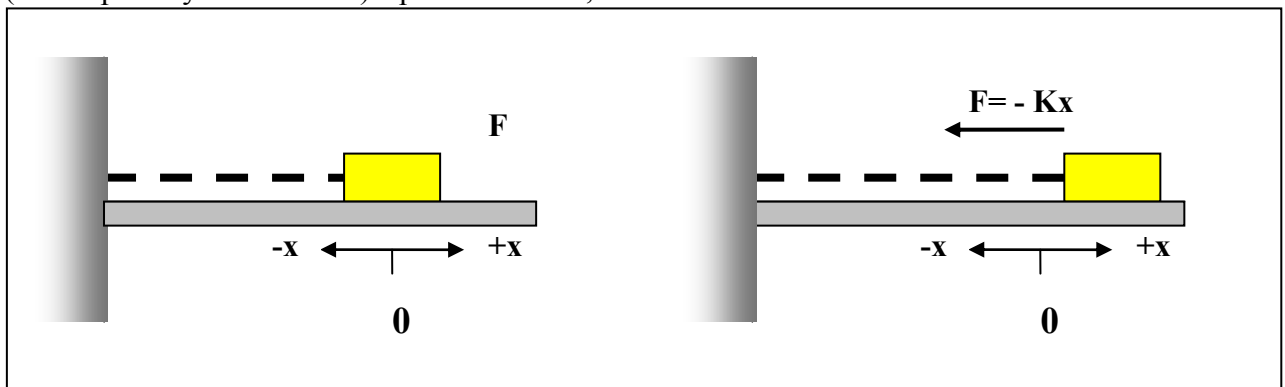


Obr.1.1.2. Výchylka, její rychlost a zrychlení harmonického kmitu.

## 1.2. Dynamika

Využijeme druhý Newtonův zákon, ale musíme znát konkrétní příčinu, respektive sílu tzv. vratnou sílu, která kmitavý pohyb způsobí.

Předpokládáme těleso o hmotnosti  $m$  na vodorovné podložce (bez tření) spojené pružinou (tuhost pružiny označíme  $K$ ) s pevnou stěnou, viz. obr.1.2.1.



Obr. 1.2.1. Kmitající těleso na vodorovné podložce bez tření.

Pro malé výchylky  $\psi$  ve směru  $x$  ( $\psi = x$ ) platí Hookův zákon

$$F = -\zeta x \quad (1.2.1)$$

Znaménko – vystihuje skutečnost, že síla vrací těleso do rovnovážné polohy, působí tedy v opačném směru než měříme výchylku. Pohybová rovnice má tvar

$$m\ddot{x} = -\zeta x \quad (1.2.2)$$

Řešení předpokládáme ve tvaru harmonického pohybu (1.1.1), po dosazení dostaneme důležitý vztah pro vlastní frekvenci

$$\omega = \frac{K}{m} \quad (1.2.3)$$

Vlastní frekvence je určena jen volbou hmotnosti a tuhosti pružiny. Pohybovou rovnicí můžeme napsat ve tvaru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (1.2.4)$$

### 1.3. Energie harmonického oscilátoru

Pro potenciální energii  $E_p$  v případě síly (1.2.1) dostaneme

$$E_p = - \int F d\psi = \int K \psi d\psi = \frac{1}{2} K \psi^2 \quad (1.3.1)$$

a po dosazení z (1.1.1)

$$E_p = \frac{1}{2} K A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (1.3.2)$$

Pro kinetickou energii  $E_k$  platí

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (1.3.3)$$

Vztahy (1.3.2, 1.3.3) přepíšeme do tvaru

$$E_p = E_{p \max} \cos^2(\omega t + \varphi), \quad E_k = E_{k \max} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (1.3.4)$$

a pro vlastní frekvenci (1.2.1)

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} K A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad E_{k \max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \quad (1.3.5)$$

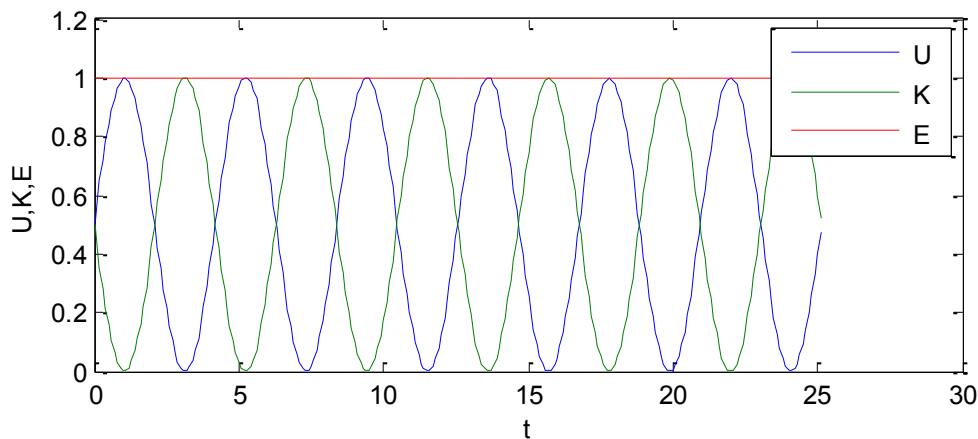
Tedy maximální hodnoty energií jsou stejné

$$E_{p \max} = E_{k \max} \quad (1.3.6)$$

Pak celková energie  $E$

$$E = E_k + E_p = E_{k \max} \sin^2(\omega t + \varphi) + E_{p \max} \cos^2(\omega t + \varphi) = E_{k \max} = \text{konst} \quad (1.3.7)$$

Podle očekávání jsme potvrdili, že celková energie oscilátoru je konstantní. Z grafu 1.3.1. je zřejmé jak se v čase přelévá jedna forma energie do druhé.

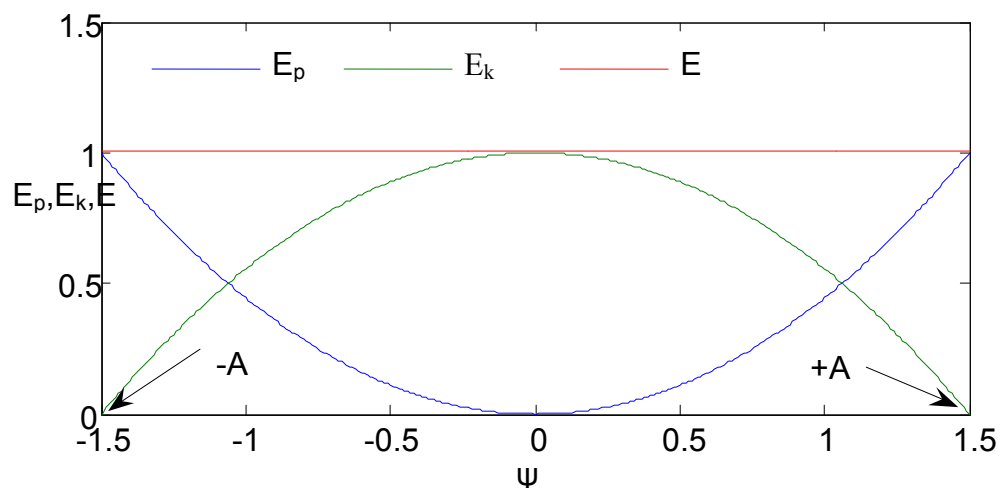


Obr. 1.3.1. Energie (v rel. jednotkách) harmonického oscilátoru v závislosti na čase.

Užitečné je rovněž sledovat závislost energií na výchylce – viz obr. 1.3.2. Pro potenciální energii máme (1.3.1) a pro kinetickou energii

$$E_k = E - E_p = \frac{1}{2} K (A^2 - \psi^2) \quad (1.3.8)$$

A podobně pro potenciální energii.



Obr. 1.3.2. Závislost energií harmonického oscilátoru na výchylce.

## 1.4. Základní typy oscilátorů

### Těleso na pružině

Těleso o hmotnosti  $m$  je zavěšeno na pružině s tuhostí  $K$ , viz obr.1. 4.1. Původně nezatížená pružina se protáhne o  $l$ . V rovnováze je celková síla, která se skládá z tíhové  $F_g$  a pružné  $F_k$ , nulová

$$F_g + F_k = mg - Kl = 0 \quad (1.4.1)$$

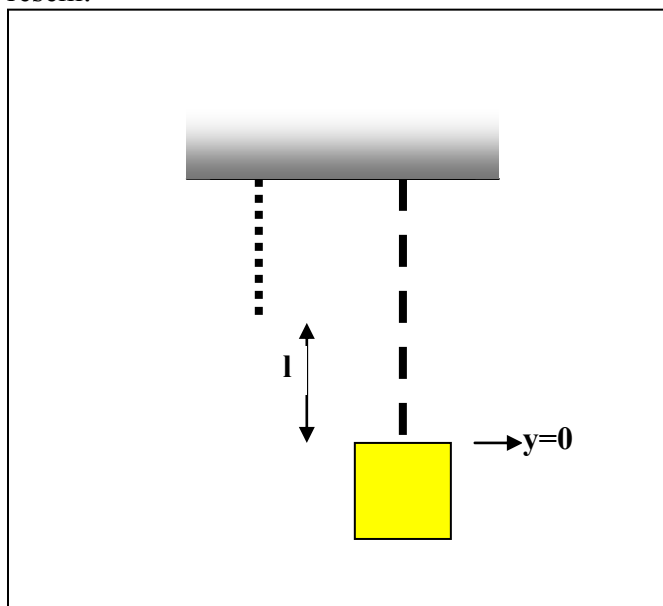
Odtud můžeme určit protažení pružiny, které určí rovněž rovnovážnou polohu tělesa ( $y=0$ )

$$l = \frac{mg}{K} \quad (1.4.2)$$

Pak při výchylce tělesa z rovnovážné polohy o  $y$  působí na něj síla

$$F = F_k + mg = -\zeta\left(y + \frac{mg}{K}\right) + mg = -\zeta y \quad (1.4.3)$$

Tedy výsledná vratná síla má stejný tvar jako v předcházejícím případě a rovněž stejné je řešení.



### Obr. 1.4.1 Těleso na pružině

## Matematické kyvadlo

Matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod (hmotnost  $m$ ) zavěšený na nehmotném závěsu o délce  $l$  - viz obr. 1.4.2. Hmotný bod se pohybuje po kruhové dráze  $l\psi$ , s rychlostí  $l\dot{\psi}$  a zrychlením  $l\ddot{\psi}$ . Vratná síla  $F$  je výslednicí gravitační síly a síly vlákna  $F_v$

$$F = -ng \sin(\psi) \quad (1.4.1)$$

Po dosazení do 2. Newtonova zákona

$$ml\ddot{\psi} = -ng \sin(\psi) \quad (1.4.2)$$

Pro řešení této pohybové rovnice je velkou nepříjemností funkce  $\sin$ , pro kterou platí

$$\sin \psi = \psi - \frac{\psi^3}{3!} + \frac{\psi^5}{5!} - \dots \quad (1.4.3)$$

Pro malé výchylky, asi do  $5^\circ$  platí

$$\sin(\psi) = \psi \quad (1.4.4)$$

A tedy pohybová rovnice dostane jednoduchý tvar

$$\ddot{\psi} = -\frac{g}{l}\psi \quad (1.4.5)$$

Předpokládáme-li harmonické řešení

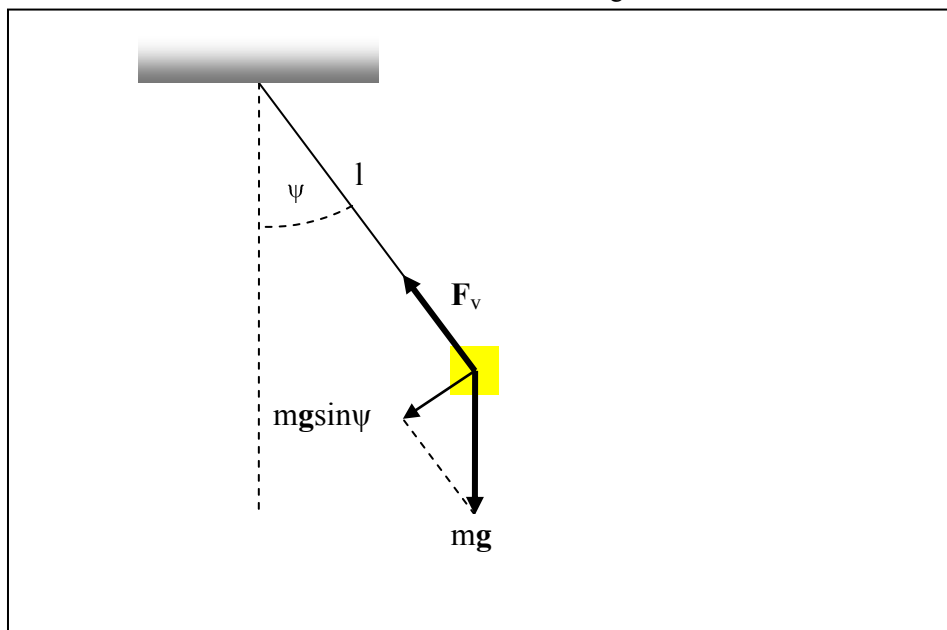
$$\psi = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.4.6)$$

Dostaneme pro vlastní frekvenci matematického kyvadla

$$\omega = \frac{g}{l} \quad (1.4.7)$$

Nebo pro dobu kmitu

$$T^2 = 4\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.4.8)$$



Obr.1.4.2. Matematické kyvadlo

## Fyzikální kyvadlo

Fyzikálním kyvadlem se rozumí zavěšené reálné těleso libovolného tvaru. Závěs je nad těžištěm. Vzdálenost závěsu od těžiště  $T$  označíme  $L$  – viz obr. 1.4.3. Vratný moment síly  $M$  je

$$M = -ngL \sin(\psi) \quad (1.4.9)$$

A ze stejných důvodů jako u matematického kyvadla se omezí na výchylky do  $5^\circ$ , pak platí

$$M = -mgL \psi \quad (1.4.10)$$

Pohybová rovnice má tvar

$$-mgL \psi = I\ddot{\psi} \quad (1.4.11)$$

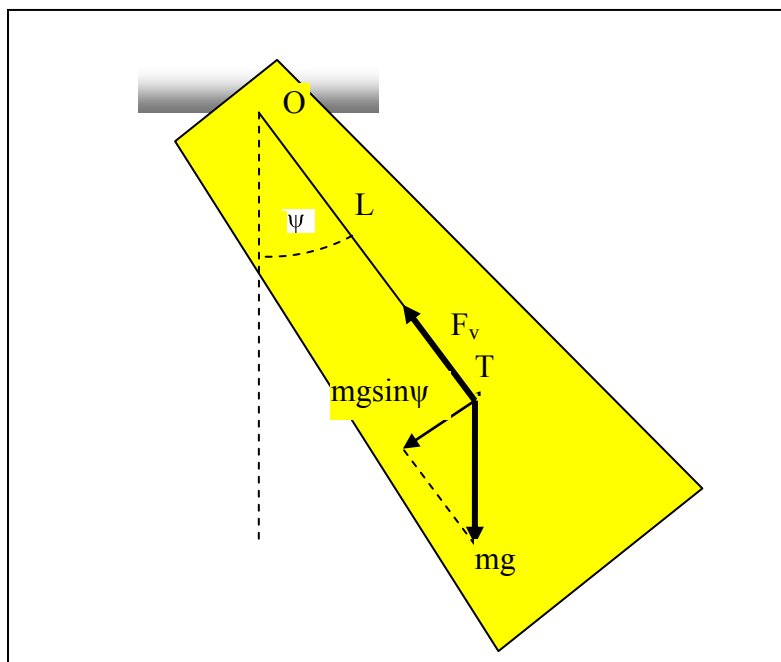
Kde  $I$  je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose, která prochází závěsem. Pak při předpokládaném řešení ve tvaru (1.4.6) dostaneme stejným postupem pro vlastní frekvenci

$$\omega = \frac{mgL}{I} \quad (1.4.12)$$

Připomeneme, že pro matematické kyvadlo platí

$$I = mL^2 \quad (1.4.13)$$

A po dosazení do dostaneme vztah (1.4.7).



Obr. 1.4.3. Fyzikální kyvadlo

### Torzní kmity

Zejména pro aplikace je zajímavá varianta oscilátoru – viz obr. 1.4.4. , kdy vratným působením je kroucení (torze), drátu. Pro malé výchylky má vratný moment tvar

$$M = -\kappa \psi \quad (1.4.14)$$

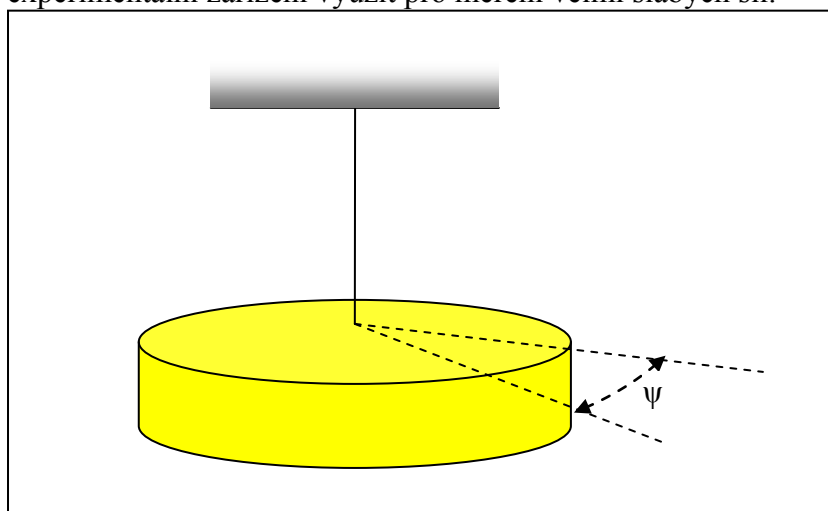
Kde  $\kappa$  je torzní tuhost. Pak pohybová rovnice má tvar

$$-\kappa \psi = I\ddot{\psi} \quad (1.4.15)$$

Kde  $I$  je moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení. Předpokládáme harmonické řešení ve tvaru (1.4.6) a obvyklým postupem dostaneme vztah pro vlastní frekvenci torzních kmitů

$$\omega = \frac{\kappa}{I} \quad (1.4.16)$$

Vzhledem k možnosti volby velmi tenkého drátu s malou torzní tuhostí lze toto experimentální zařízení využít pro měření velmi slabých sil.



Obr. 1.4.4. Torzní kyvadlo

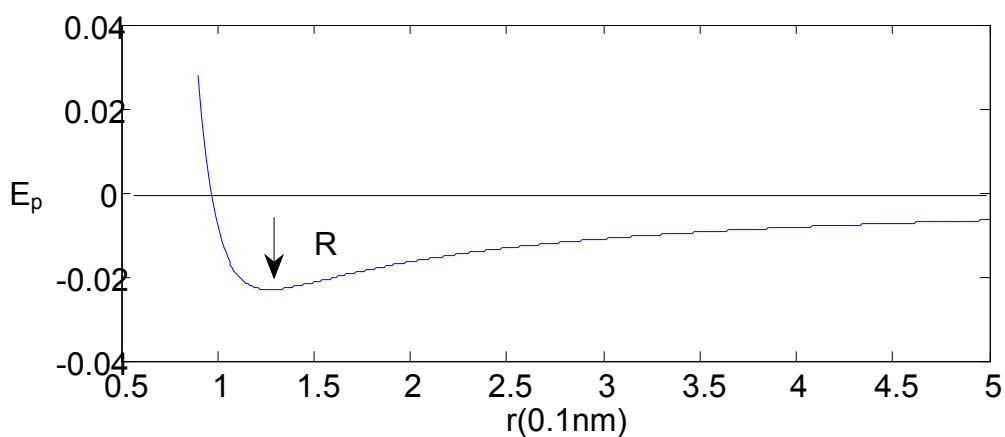
### 1.5. Další typy oscilátorů

Existuje celá řada kmitajících soustav, příklady se najdou v akustice, elektřině, atomové a molekulární fyzice atd. Postup řešení je velmi často podobný uvedeným jednoduchým příkladům.

#### **Kmity dvouatomové molekuly**

Jako zástupce oscilátoru z mikrosvěta uvedeme kmity molekuly typu AB s iontovou vazbou, např. HCl.

Průběh potenciální energie je na obr. 1.5.1.



Obr. 1.5.1. Průběh potenciální energie ( $E_p$  v rel. jednotkách) molekuly HCl na vzdálenosti atomů.

Pak kolem rovnovážné polohy má potenciální energie tvar

$$E_p(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\beta}{r^9} \quad (1.5.1)$$

První člen je výsledkem přitahování dvou různě nabitých iontů s nábojem  $e$ , druhý člen vyjadřuje odpuzování obou iontů při překryvu jejich elektronových obalů (skutečný tvar je složitější, ale tato aproximace je vyhovující). Konstantu  $\beta$  vypočítáme z podmínky rovnovážné polohy a pro  $r=R$

$$\frac{dE_p}{dr} = 0 \quad (1.5.2)$$

$$\beta = \frac{e^2 R^8}{36 \pi \epsilon_0} \quad (1.5.3)$$

Tuhost vazby  $K$  určíme z druhé derivace  $U$  a ze vztahu pro tuhost (1.3.1)

$$E_p = \frac{1}{2} K r^2 \rightarrow \frac{d^2 E_p}{dr^2} = K \rightarrow \zeta = \frac{4e^2}{9 \pi \epsilon_0 R^3} \quad (1.5.4)$$

Tuhost závisí pouze na rovnovážné poloze  $R$  (pro HCl  $R=0.13\text{nm}$ ), po dosazení standardních konstant dostaneme  $K \cong 200 \text{ Nm}^{-1}$  (což odpovídá pružině, která se protáhne asi o 50mm se závažím 1kg). Vzhledem k tomu, že Cl má asi 35 krát větší hmotnost proti H, můžeme si molekulu představit jako kmitající atom H kolem pevného centra Cl ( $m_H=1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ ). Vlastní frekvence oscilátoru

$$\omega = \sqrt{K/m_H} \quad (1.5.5)$$

Je po dosazení  $\omega \cong 3.5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , respektive  $\nu \cong 0.5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , ve skutečnosti lze naměřit z optických vlastností  $\nu = 3.9 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$  což je vzhledem k primitivnosti našeho modelu velmi dobrý souhlas.

## 5. Reálný oscilátor

### 5.1. Tlumený oscilátor, vynucené kmity

Dosud jsme popisovali oscilátor bez vnitřního tření a bez působení dalších vnějších sil, ovšem s výjimkou vratné síly. V reálných případech tření nelze zanedbat, výsledkem jsou tlumené kmity nebo dokonce nepřítomnost kmitavého pohybu. Rovněž působení vnějších sil a tedy vznik vynucených kmitů je velmi časté.

Předpokládáme pro jednoduchost těleso o hmotnosti  $m$ , zavěšené na spirále s tuhostí  $K$  a kmitající ve směru  $x$ . Pohybová rovnice pro netlumený oscilátor s vlastní frekvencí  $\omega_0$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \quad \text{nebo} \quad m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = 0 \quad (5.1.1)$$

Pohybová rovnice v obecnějším případě má tvar

$$m\ddot{x} + m\Gamma \dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t) \quad (5.1.2)$$

Kde nový člen  $m\Gamma \dot{x}$  je síla tření, ukazuje se v praxi, že je dobře úměrná rychlosti,  $\Gamma$  je koeficient tření,  $F(t)$  je obecná vnější síla.

Pro jednoduchost zvolme případ bez vnější síly, pak

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.1.3)$$

Předpokládejme řešení ve tvaru

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega + \varphi) \quad (5.1.4)$$

Názorně můžeme rovnici řešit substitucí

$$x = ze^{-\gamma t/2} \quad (5.1.5)$$

Po dosazení a úpravě dostaneme



$$\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4})z \quad \text{nebo} \quad \ddot{z} = -\omega_1^2 z \quad (5.1.6)$$

Což je rovnice podobná netlumenému oscilátoru s frekvencí  $\omega_1$ . Po dosazení

$$x(t) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) \quad (5.1.7)$$

Máme tedy kmit s tlumenou amplitudou  $Ae^{-\Gamma t/2}$  a s frekvencí

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{4\omega_0^2}} \quad (5.1.8)$$

Místo veličiny  $\Gamma$  se někdy používá  $\tau = 1/\Gamma$ , což je doba za kterou amplituda klesne e krát.

Rozlišme tři možné případy:

1. Slabě tlumený oscilátor :  $\Gamma/2 \ll \omega_0$ , pak

$$\omega_1 \approx \omega_0 \quad x(t) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.1.9)$$

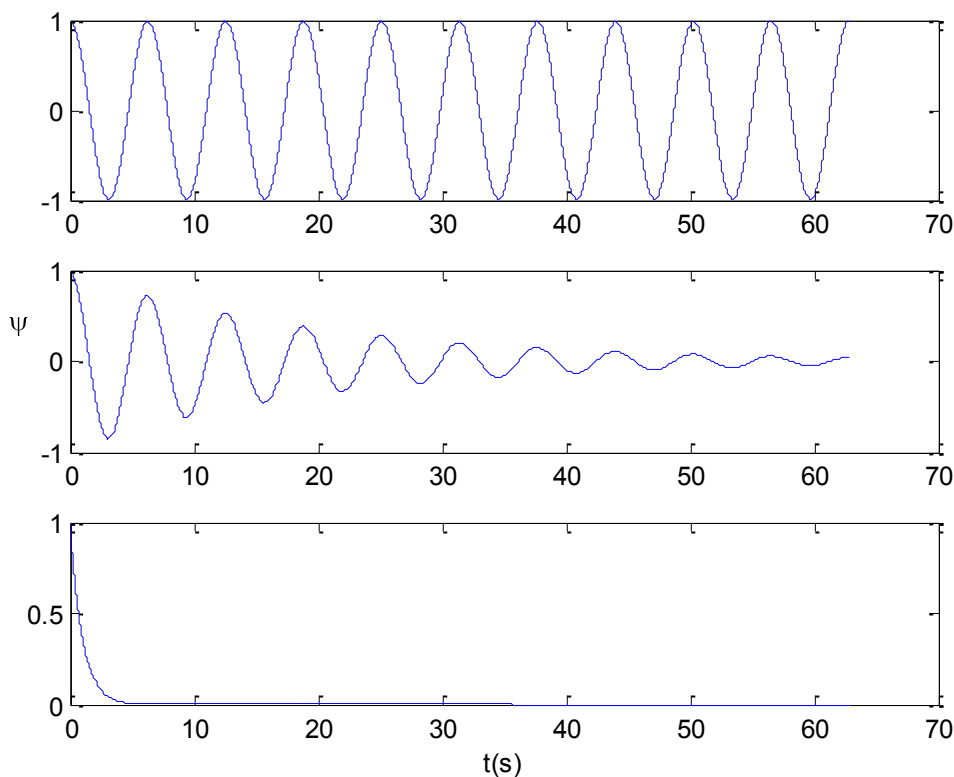
Jedná se o kmit se slabě klesající amplitudou s časem a kmitající s frekvencí netlumeného oscilátoru  $\omega_0$ , viz obr.5.1.1.

2. Kriticky tlumený oscilátor :  $\Gamma/2 = \omega_0$ , pak

$$\omega_1 = 0 \quad x(t) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\varphi_0) = Ae^{-\Gamma t/2} \cos(\varphi_0) \quad (5.1.10)$$

Pak oscilátor přestává kmitat a amplituda klesá k nule, jedná se o tzv. kritický kmit, viz obr. . Tyto podmínky mají dobrý smysl pro zastavení kmitající soustavy.

3. Silně tlumený oscilátor :  $\Gamma/2 \gg \omega_0$ . Řešení je v oboru komplexních čísel, zřejmě se jedná o nekmitající případ se silně tlumenou amplitudou. Z pohledu studia kmitů je to ne příliš zajímavý případ.



Obr. 5.1.1. Oscilátor: netlumený  $\omega_0 = 1s^{-1}$ ,  $\Gamma = 0$ , slabě tlumený  $\Gamma = 0.1s$ , kriticky tlumený  $\Gamma = 2s$ .

## II. Vlny

Vlnami rozumíme šíření změny fyzikální veličiny v čase a prostoru. Na rozdíl od kmitů, které do jisté míry můžeme považovat za speciální případ vln, je vlna zpravidla nelokalizovaná.

V této souvislosti je možné připomenout, že za základní fyzikální objekty můžeme považovat částice a vlny. Ty se liší zpravidla právě představou, že částice je silně lokalizovaná a naopak vlna zcela delokalizována. Ve skutečnosti mezi nimi existuje velmi těsný vztah a dokonce v kvantové fyzice představa jejich vzájemné ekvivalence. U vln je vždy podstatné co se vlní, může to být např. intenzita elektrického pole, hustota prostředí, poloha částice atd. Tvar vln může být velmi různý, ale zpravidla se snažíme vlnové jevy popsat harmonickou vlnou, případně sumou harmonických vln.

V kapitole I. Kmity jsme v případě soustav o více stupních volnosti již zavedli pojem vlny, respektive stojaté vlny. Studovali jsme však především ohraničený systém. Kmity takového systému lze popsat jako superpozici stojatých vln. Tvar a vlastnosti takových vln jsou především určeny okrajovými podmínkami a disperzními vztahy. Základní vlastností stojatých vln je, že všechny elementy soustavy kmitají se stejnou fází a jejich energie je lokalizována uvnitř tohoto systému.

V případě vln nebo přesněji v případě pohybujících se vln, používá se termín postupná vlna, volíme zpravidla neohraničený systém. Pro takové vlny je typické, že jednotlivé elementy soustavy mají různé fáze. Lze ukázat, že příslušné disperzní vztahy zůstávají stejné pro oba typy vln. Postupná vlna přenáší energii a impuls v prostoru, ve kterém se šíří.

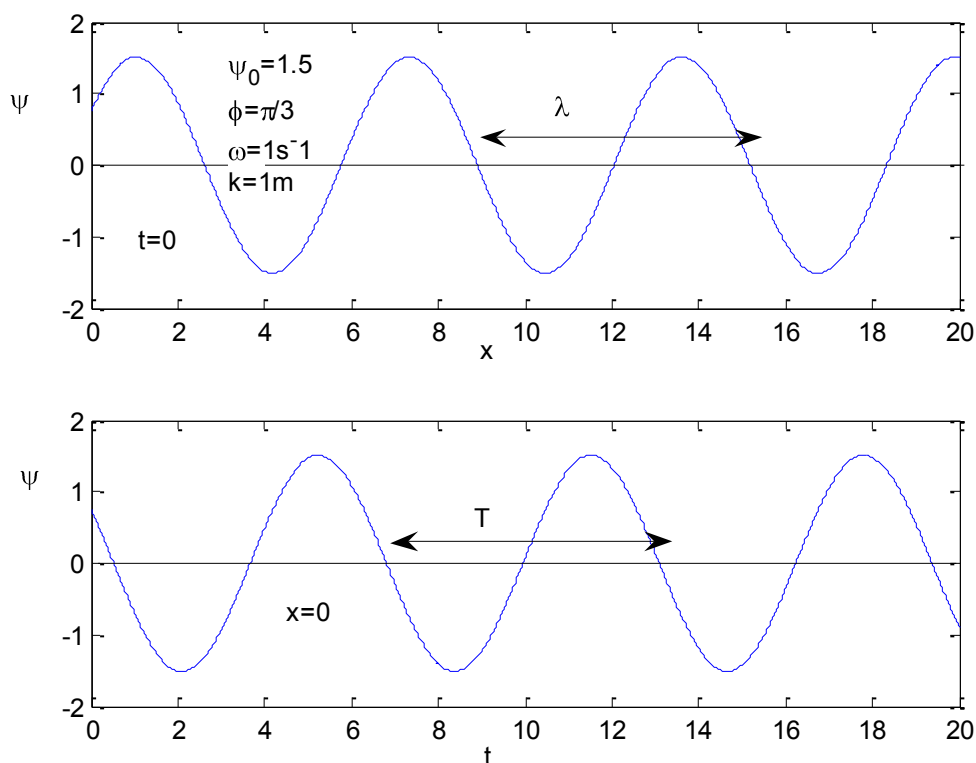
### 1. Harmonické vlny v 1dm

#### 1.1. Základní vlastnosti harmonické vlny

Harmonickou vlnou rozumíme vlnu, kterou lze popsat pomocí funkcí typu sin a cos. Její základní matematický popis v 1dm má tvar

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \cos(\omega t - kx + p), \quad (1.1.1)$$

Tvar velmi připomíná funkci při popisu kmitů.



Obr. 1.1.1. Harmonická vlna, prostorová a časová závislost.

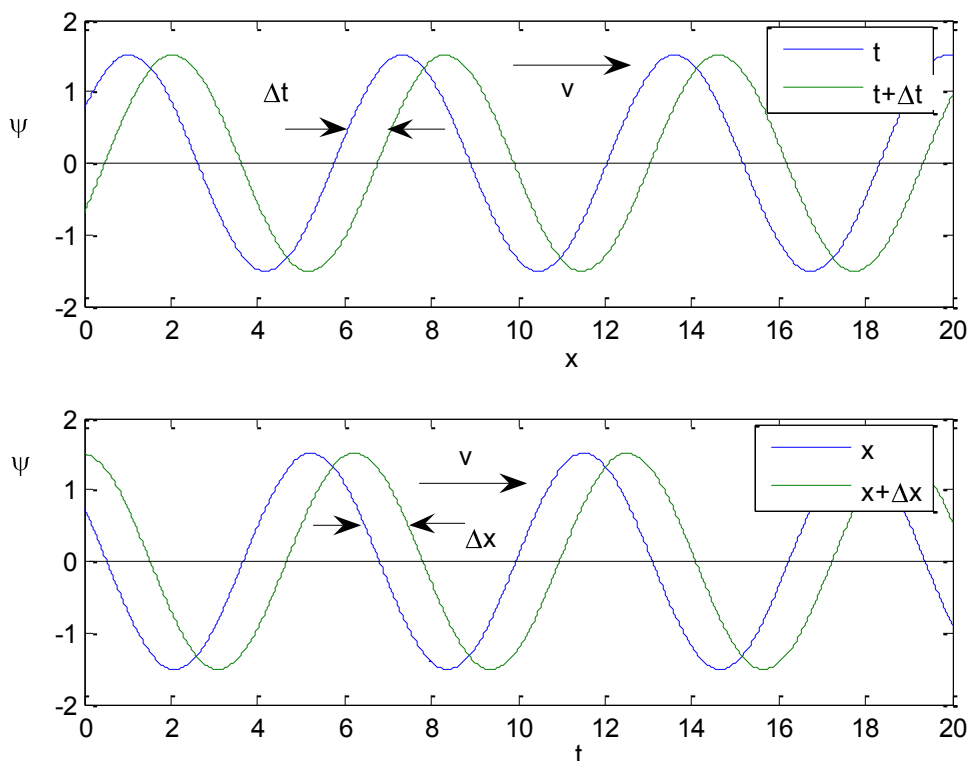
Příslušná fyzikální veličina  $\psi$  (např. mechanická výchylka) je funkcí dvou proměnných  $x$  a  $t$  (viz. obr. 1.1.1.),  $\psi_0$  je amplituda,  $\omega$  je časová frekvence (úhlová frekvence) s časovou periodou  $T$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.1.2)$$

a  $k$  je prostorová frekvence (úhlový vlnčet) s prostorovou periodou  $\lambda$  (vlnová délka)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.1.3)$$

$\phi$  je posuv fáze, výraz  $(\omega t - kx + \phi)$  se nazývá fáze vlny.



Obr.1.1.2. Posuv harmonické vlny v prostoru a čase.

Chceme-li určit rychlost posuvu takové vlny je nutné sledovat jeden bod vlnění (např. maximum) a pro ten platí

$$\omega - kx + \varphi = \text{konst} \quad (1.1.4)$$

Pak

$$\omega - kdx = 0 \quad (1.1.5)$$

Rychlost tohoto bodu, označujeme ji jako fázovou rychlost  $v_f$ , je

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (1.1.6)$$

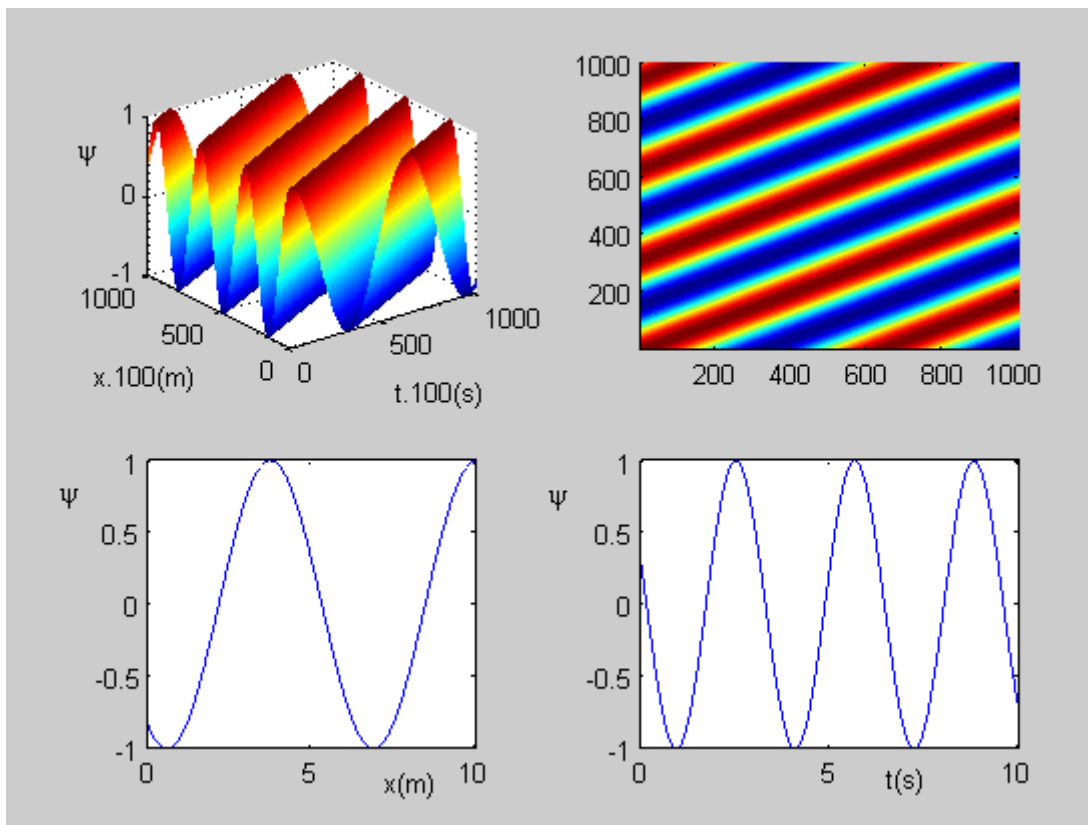
Vlna se pohybuje touto rychlostí ve směru osy  $x$ , pro fázi

$$\omega + kx + \varphi = \text{konst} \quad (1.1.7)$$

bude rychlost záporná a vlnění se šíří na opačnou stranu.

V kapitole o kmitech jsme zjistili, že obecně vztah mezi  $\omega$  a  $k$  (disperzní vztah) může být složitá funkce. Pokud platí vztah (1.1.6) jedná se o nedisperzní vlny, pokud je závislost složitější, mluvíme o disperzních vlnách. (Příkladem jsou systémy s více stupni volnosti studované v kapitole I. Kmity nebo prostředí, kdy index lomu závisí na vlnové délce,  $n(\lambda)$ , protože  $n=c/v$ , je  $v(\lambda)$ , respektive  $v(k)$ ).

Podobně jako u kmitů, může být vlnění podélné (výhybka  $x$  je směru šíření vlny) nebo příčné (výhybka  $x$  je kolmo na směr šíření).



Obr. 1.1.3. Zobrazení harmonické vlny v časoprostoru (osy horních obrázků jsou stejné, spodní obrázky jsou řezy v polovině stupnice).

## 1.2. Princip superpozice

Podobně jako v případě kmitů předpokládáme platnost principu superpozice, který dovoluje sčítání jednotlivých vln. Platí

$$\Psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) \quad (1.2.1)$$

Jeho platnost je dána experimentální zkušeností a neplatí vždy samozřejmě. V prostoru a čase, kde se vyskytují dvě nebo více vln, dojde ke vzniku nové vlny, jako součtu jednotlivých částí. Velkou výhodou, jak uvidíme později, je možnost vyjádřit i velmi složité formy vln pomocí Fourierovy analýzy, jako součet harmonických vln o různých amplitudách a fázích.

## 1.3. Interference vln

Princip superpozice dovoluje studovat sečítání – interferenci dvou a více vln ve velmi různých situacích. Tento jednoduchý postup má celou řadu vynikajících aplikací. Podrobně probereme tyto jevy v akustice a optice. Pro dvě vlny obecně platí

$$\Psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{01} \cos(\omega_1 t - \kappa_1 x + \varphi_1) + \psi_{02} \cos(\omega_2 t - \kappa_2 x + \varphi_2) \quad (1.3.1)$$

Pro jednoduchost se omezíme na diskusi dvou speciálních, ale důležitých případů.

1. Dvě vlny se stejnými amplitudami, frekvencemi, vlnovými délkami, lišící se pouze fázovým posuvem.

$$\Psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = \psi_{01} \cos(\omega_1 t - \kappa_1 x + \varphi_1) + \psi_{01} \cos(\omega_1 t - \kappa_1 x + \varphi_2) \quad (1.3.2)$$

Pak platí

$$\Psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2\psi_{01} \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega_1 t - \kappa_1 x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (1.3.3)$$

Označíme

$$\Delta = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (1.3.4)$$

Pak výsledek silně závisí na tomto rozdílu fází viz. obr.1.3.1. Pro

$$\frac{\Delta}{2} = n\pi \quad \text{je amplituda maximální – konstruktivní interference} \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\Delta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{je amplituda nulová – destruktivní interference.} \quad (1.3.6)$$

kde  $n$  je celé číslo. Podobně budeme postupovat i ve složitějších případech.

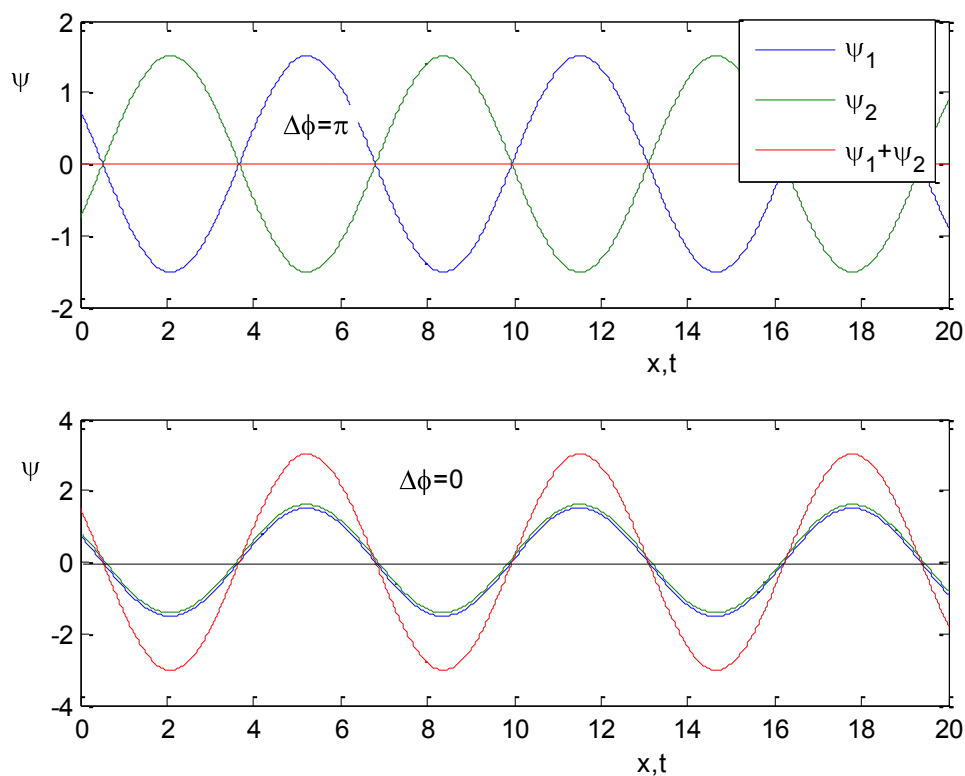
2. Dvě stejné vlny lišící se pouze směrem postupu. Pak analogicky k (1.3.2)

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = \Psi_{01} \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + \Psi_{01} \cos(\omega_1 t + k_1 x + \varphi_1) \quad (1.3.7)$$

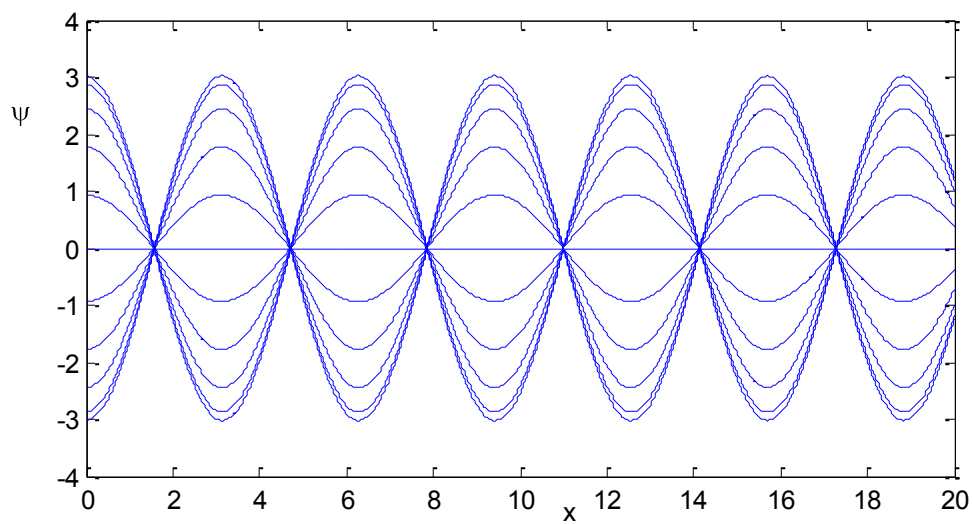
A po úpravě

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = 2\Psi_{01} \cos(k_1 x) \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (1.3.8)$$

Dostáváme vlnu, která se nepohybuje, tedy tzv. stojatou vlnu (obr.1.3.2.), kterou jsme podrobně studovali v kapitole o kmitech v souvislosti se strunou.



Obr. 1.3.1. Destruktivní a konstruktivní interference.



*Obr. 1.3.2. Stojaté vlnění v prostoru pro různé časové okamžiky.*