PŘÍKLADY APLIKACE GEOFYZIKÁLNÍCH METOD

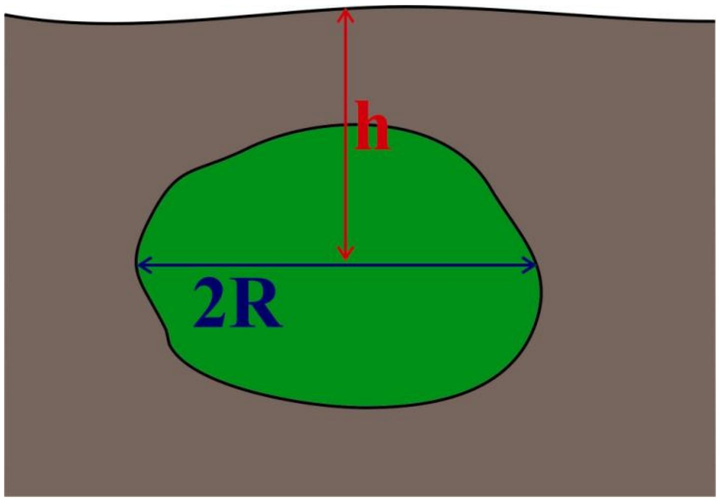
(gravimetrie, magnetometrie)

J. Havíř
Josef.Havir@ipe.muni.cz

PŘÍKLAD 1: URČENÍ VELIKOSTI A HLOUBKY PLUTONU (GRAVIMETRIE)

Problém: Byla zjištěna tíhová anomálie, způsobená dioritovým tělesem, které intrudovalo do krystalinika tvořeného převážně svory a fylity. Průměrná hustota dioritu je 2900 kg/m^3; průměrná hustota okolního krystalinika je 2650 kg/m^3. Chceme určit hloubku a velikost tělesa.

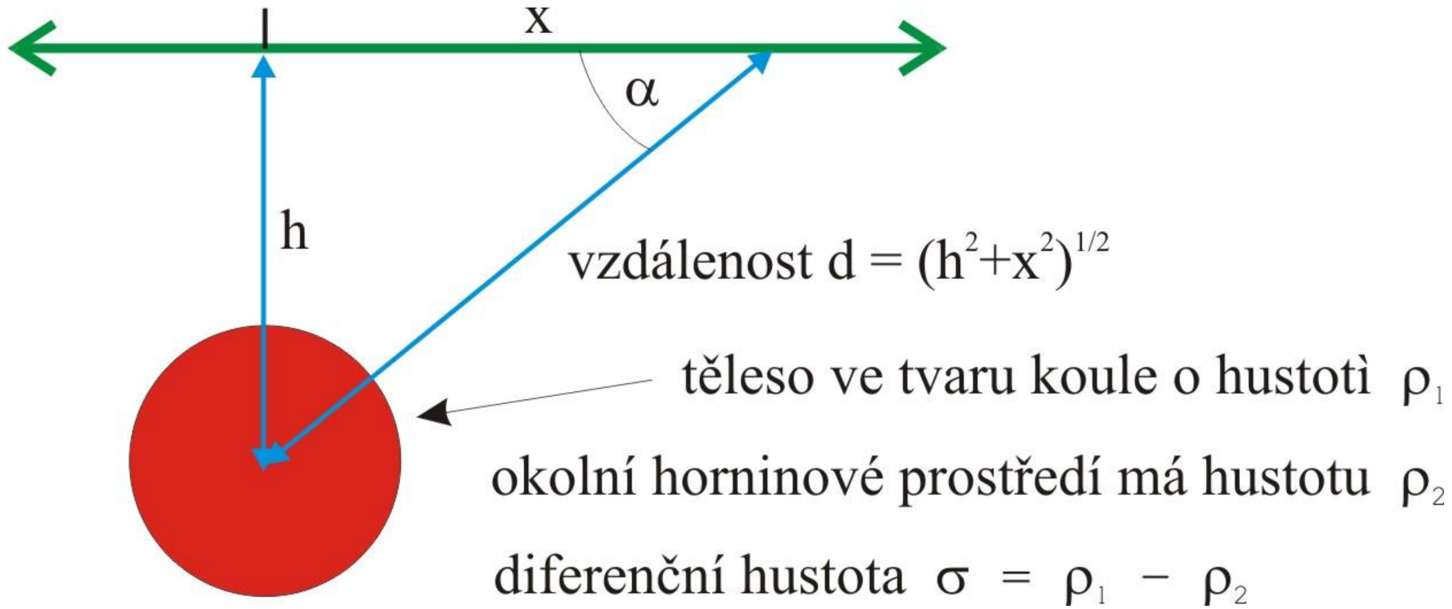
Tvar tělesa dioritu modelujeme koulí.



Účinek hmotné koule

Pro gravitační zrychlení g obecně platí: $$g = \frac{\kappa M}{d^2}$$

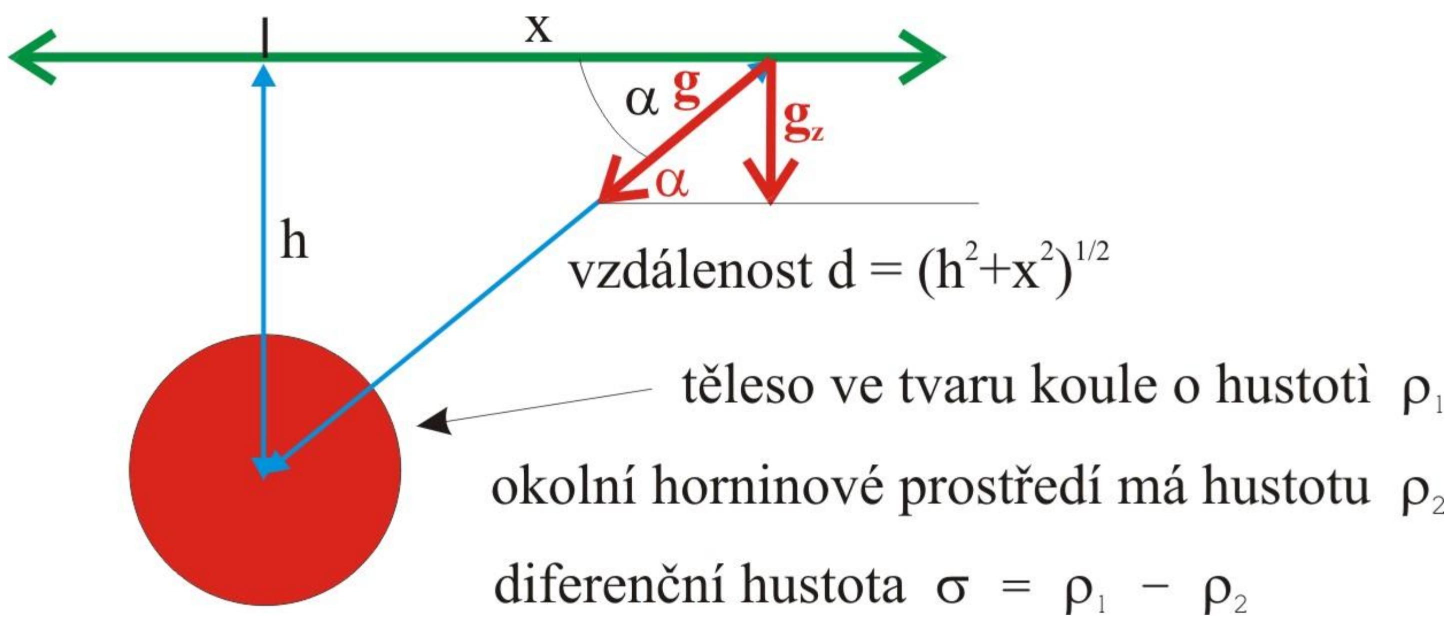
Vzdálenost je ale: $$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$



Gravitační zrychlení tedy je dáno: $$g = \frac{\kappa M}{x^2 + h^2}$$

Podle zadání nás ale zajímá pouze vertikální složka gravitačního zrychlení g_z:

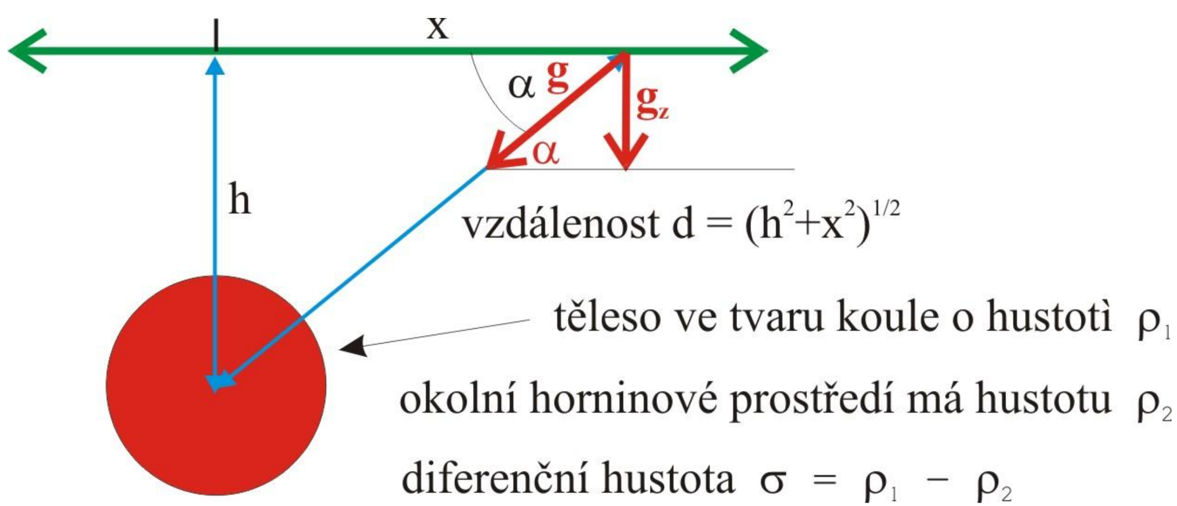
$$g_z = g \sin\alpha$$



Současně ale vidíme, že sin α si můžeme vyjádřit jako:

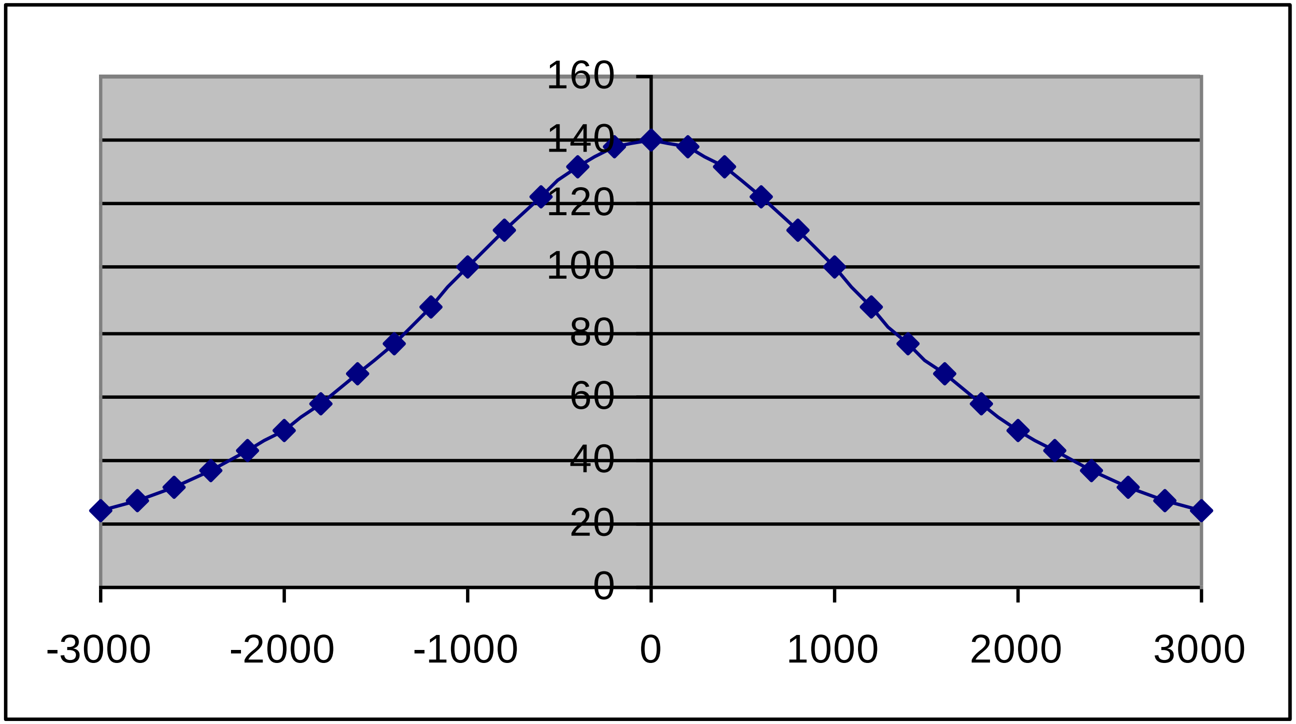
$$\sin\alpha = \frac{h}{d}$$

$$d = \sqrt{x^2 + h^2}$$



Tedy:

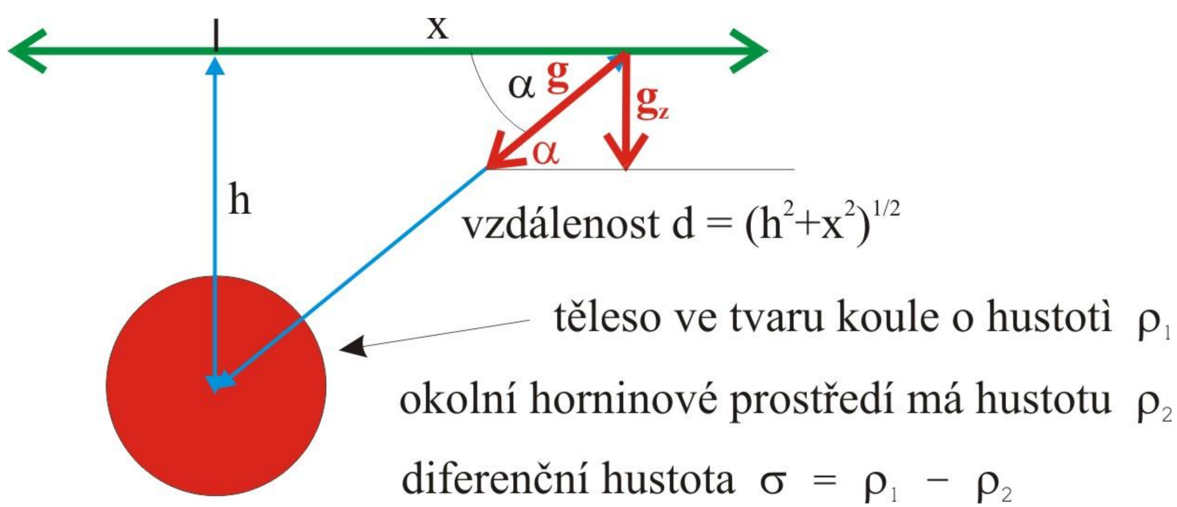
$$g_z = g\sin\alpha = \frac{\kappa M}{x^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\kappa Mh}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}$$



Tedy:

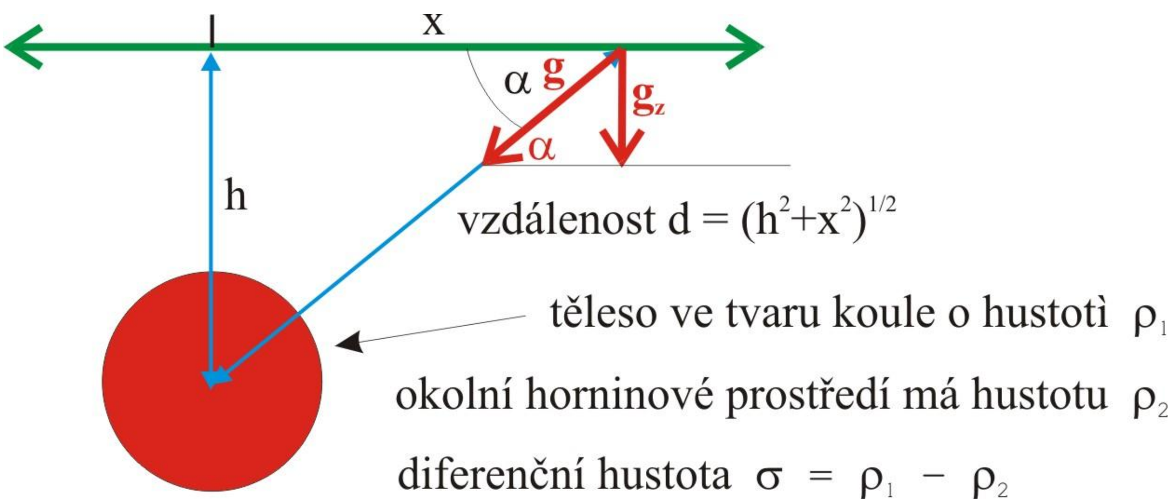
$$g_z = g\sin\alpha = \frac{\kappa M}{x^2+h^2}\,\frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2+h^2\right)^3}}$$

Neznáme hmotnost M a hloubku těžiště h.



Hmotnost M je v našem případě nutno chápat nikoli jako celou hmotnost koule, ale jako diferenční hmotnost (oč je hmotnost odlišná od hmotnosti okolního prostředí o stejném objemu). M tedy závisí na objemu a na diferenční hustotě σ:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma$$

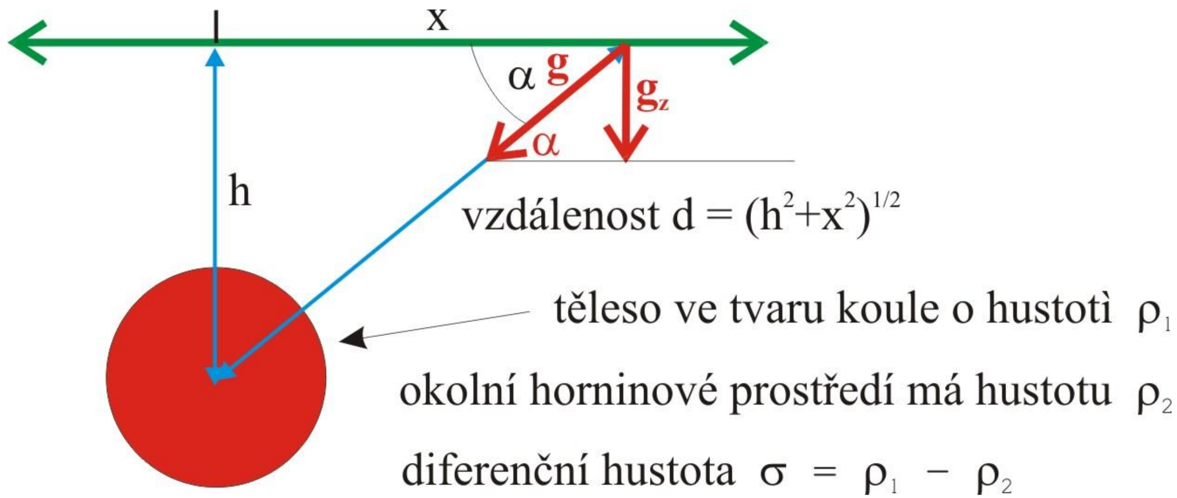


Diferenční hustota σ je v našem případě

$$\sigma = \rho_{dioritu} - \rho_{krystalinika} = 2900 - 2650 = 250 kg/m^3$$

Neznáme velikost tělesa (poloměr R)

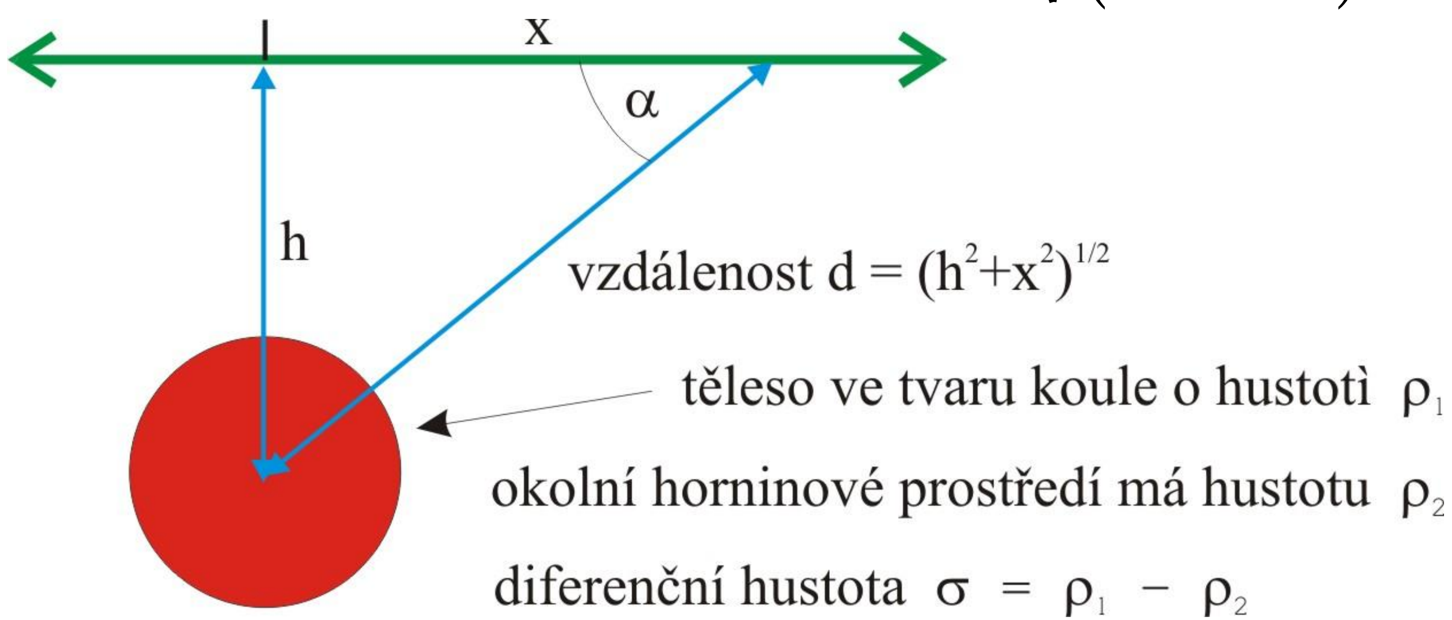
$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 . \sigma$$



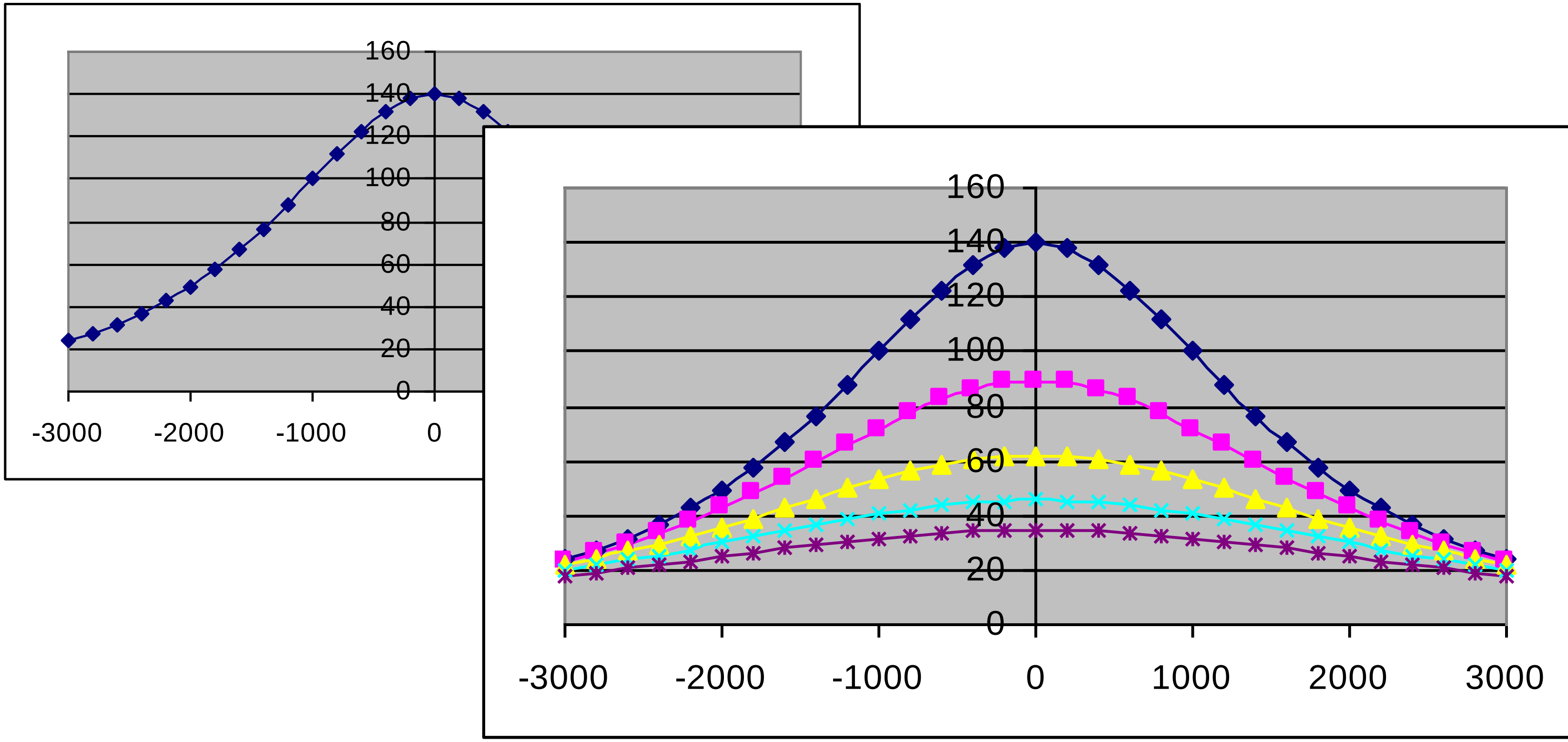
Vztah hloubky těžiště a šířky tíhové anomálie

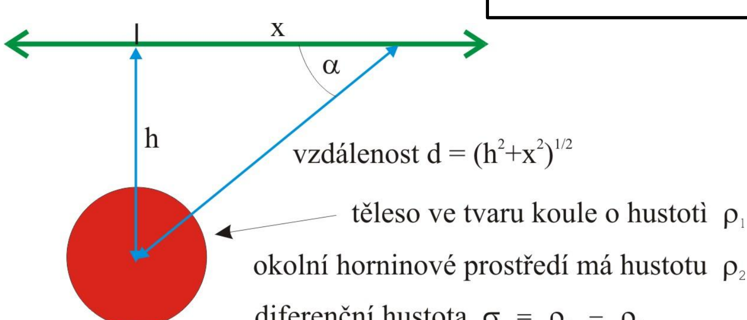
Zkusíme sestavit graf tíhové anomálie s využitím vzorce:

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$



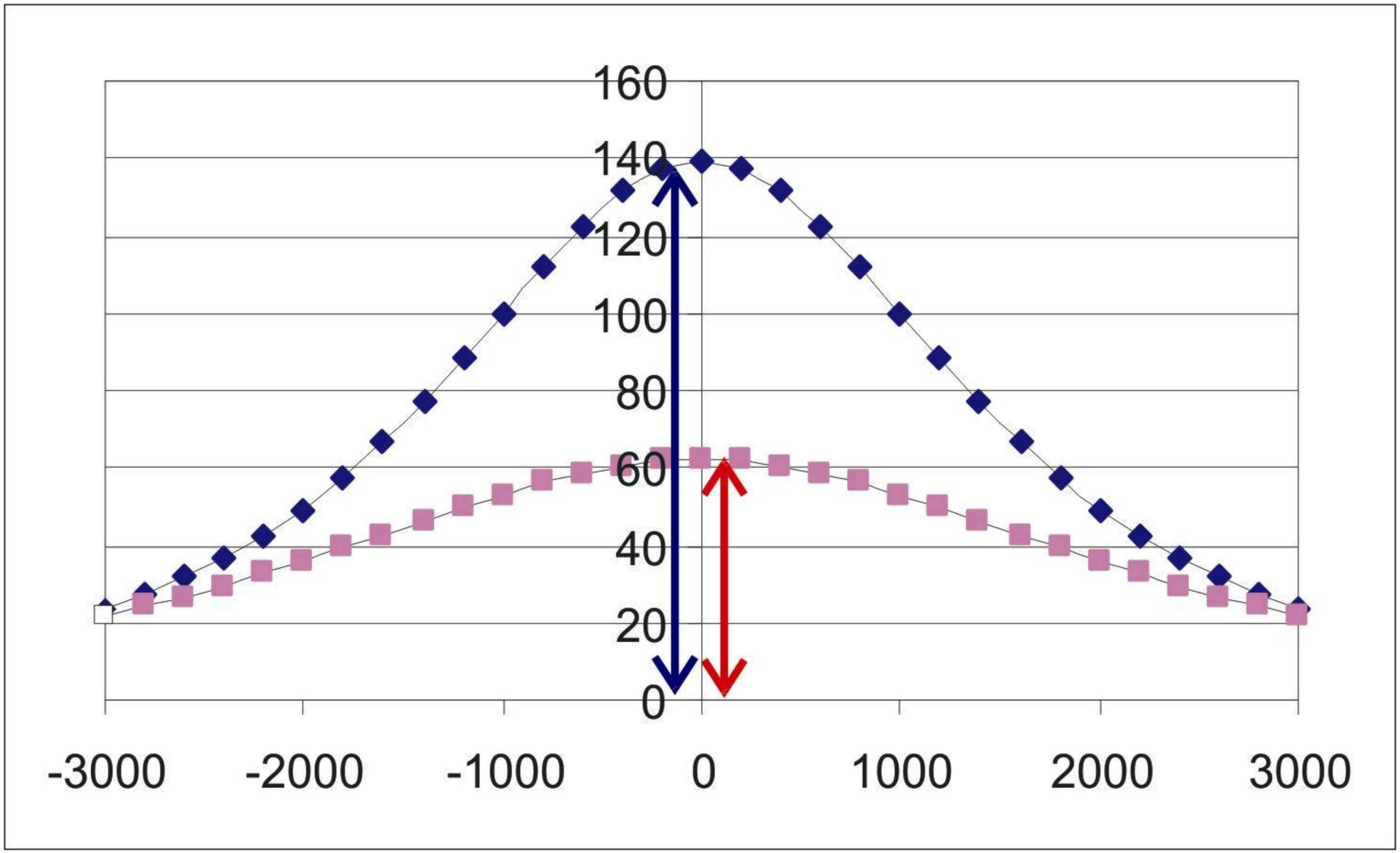
Nyní budeme zvětšovat hloubku těžiště a sledovat změny v grafu





$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

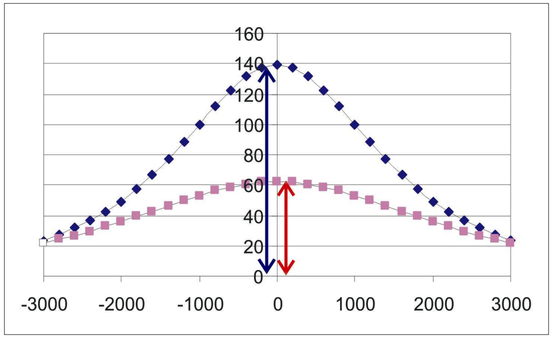
S rostoucí hloubkou klesá maximální hodnota tíhové anomálie.



Maximální hodnota tíhové anomálie je dosažena v místě nad těžištěm hmotné koule (x=0).

$$g_z = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(x^2 + h^2\right)^3}}$$

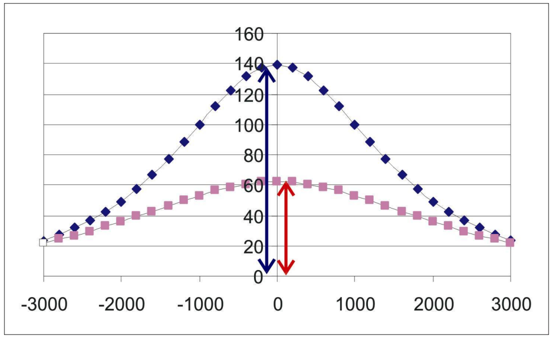
$$g_{z-\max} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(0^2 + h^2\right)^3}} = \frac{\kappa M h}{\sqrt{\left(h^2\right)^3}} = \frac{\kappa M h}{h^3} = \frac{\kappa M}{h^2}$$



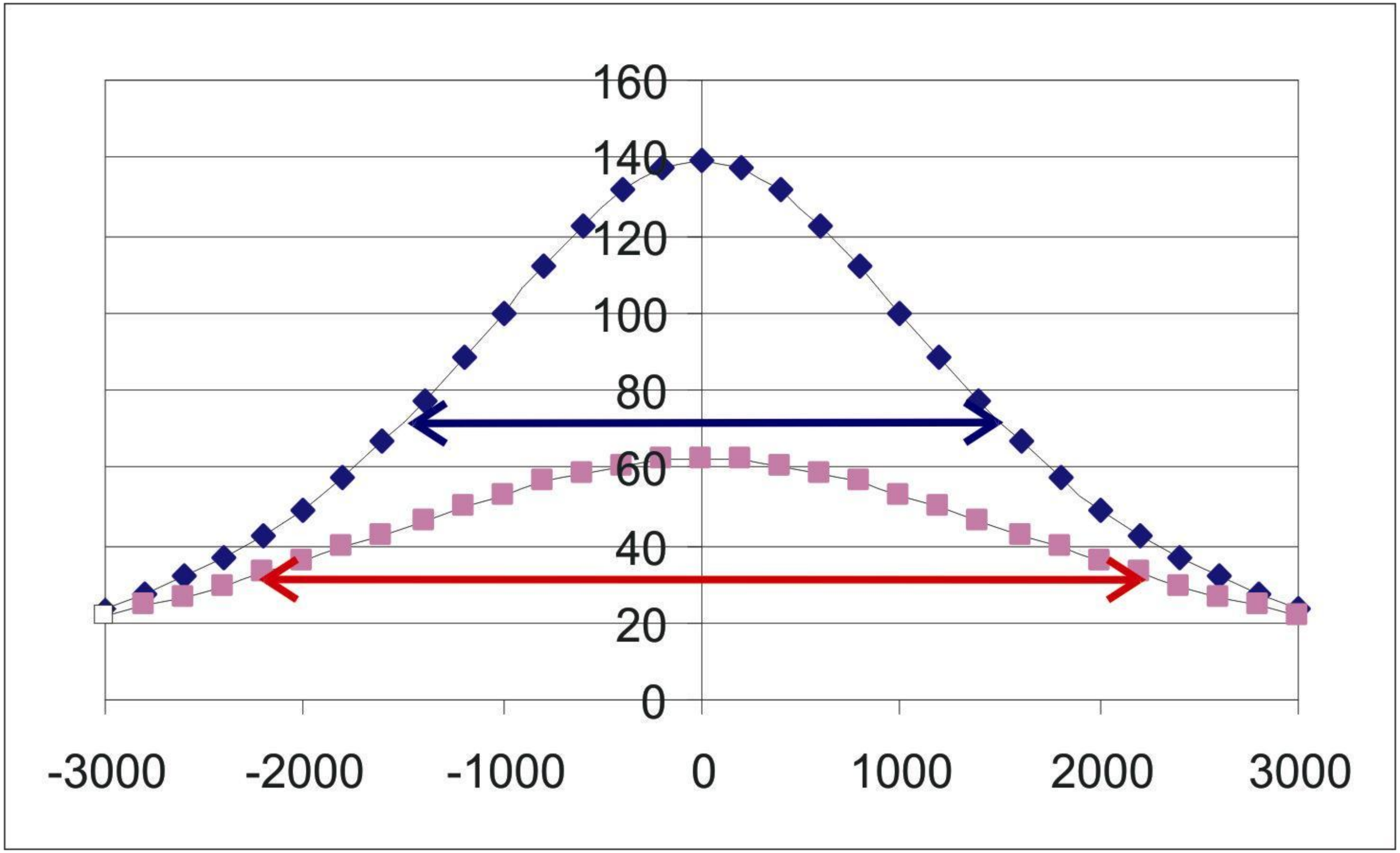
Maximální hodnota tíhové anomálie je nepřímo úměrná druhé mocnině hloubky těžiště hmotné koule a současně přímo úměrná její hmotnosti.

Hmotnost ale neznáme,protože neznáme velikost.

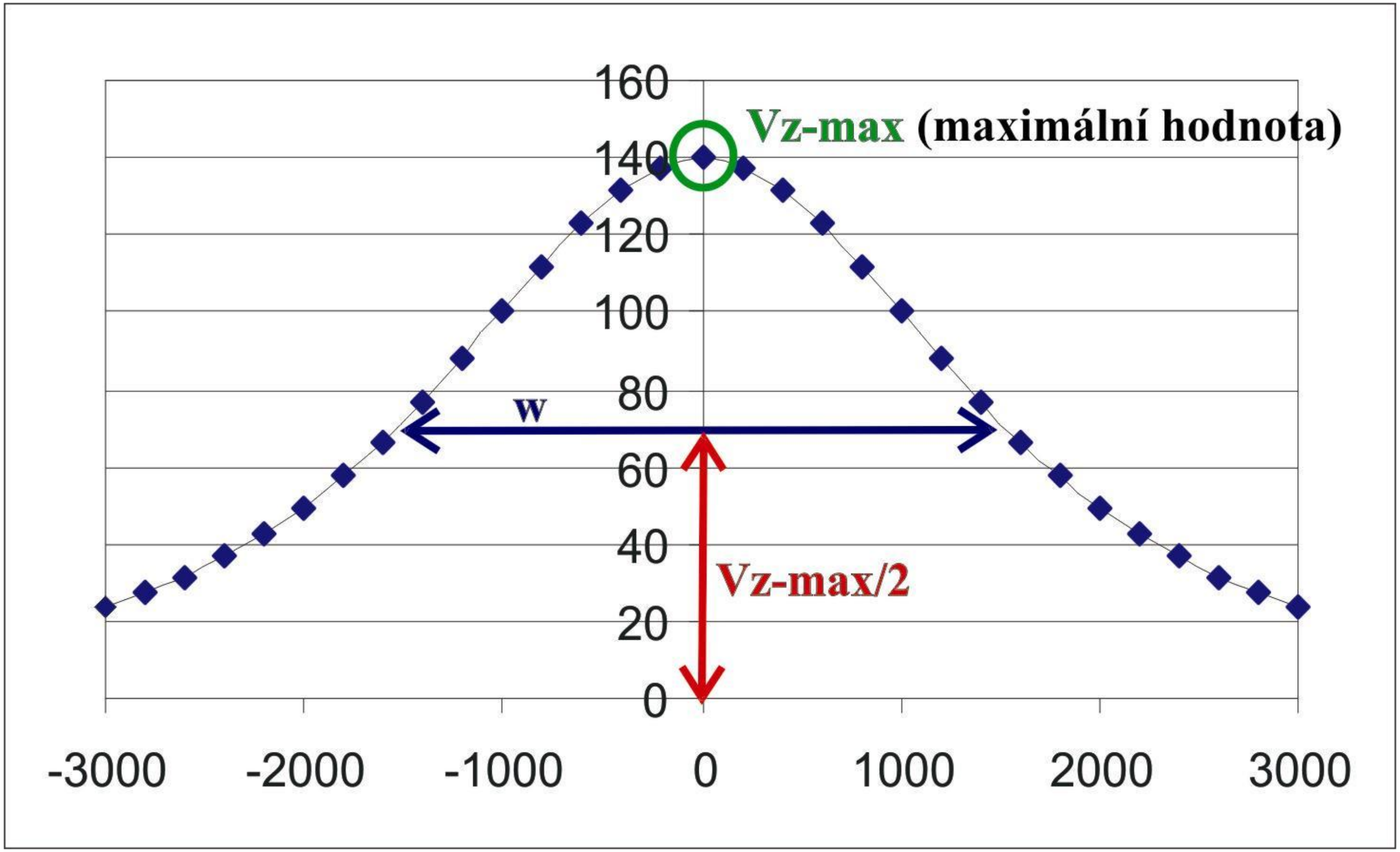
$$g_{z-\max} = \frac{\kappa M}{h^2}$$



S rostoucí hloubkou klesá roste šířka křivky tíhového účinku v úrovni odpovídající polovině maximální hodnoty tíhové anomálie.



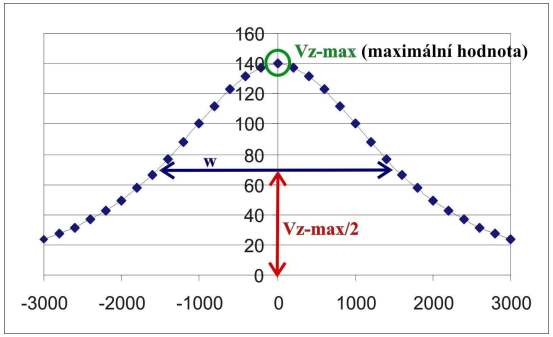
Šířku křivky tíhového účinku v úrovni odpovídající polovině maximální hodnoty tíhové anomálie označíme jako **w**.



Lze ukázat, že pro šířku w platí jednoduchý vztah:

$$h = 0{,}65.w$$

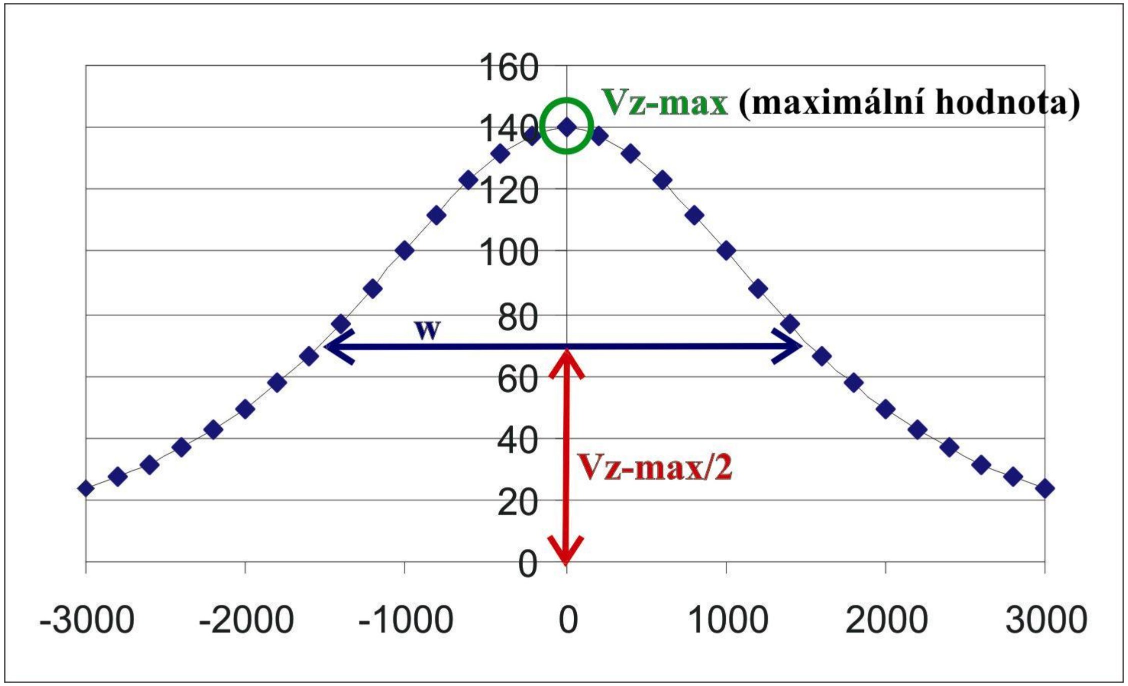
Z šířky křivky tíhového účinku v úrovni odpovídající polovině maximální hodnoty tíhové anomálie tedy snadno určíme hloubku těžiště hmotné koule, která daný tíhový účinek způsobuje.



Maximální hodnota tíhového účinku je cca 140 $\mu m/s^2$

Šířka křivky tíhového účinku v úrovni odpovídající polovině maximální hodnoty tíhové anomálie je cca 3060 m.

Hloubka těžiště hmotné koule je cca 1989 m $\approx$ 2000 m.



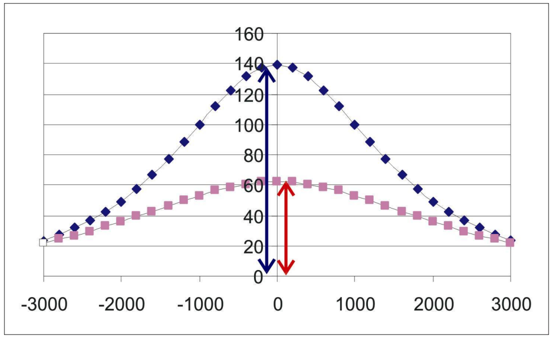
$$h = 0{,}65.w$$

Vrátíme se ke vztahu pro maximální hodnotu tíhové anomálie.

Maximální hodnota tíhové anomálie je nepřímo úměrná druhé mocnině hloubky těžiště hmotné koule a současně přímo úměrná její hmotnosti.

Neznáme hmotnost, protože neznáme velikost. Ale již známe hloubku. Můžeme tedy dopočítat hmotnost a velikost.

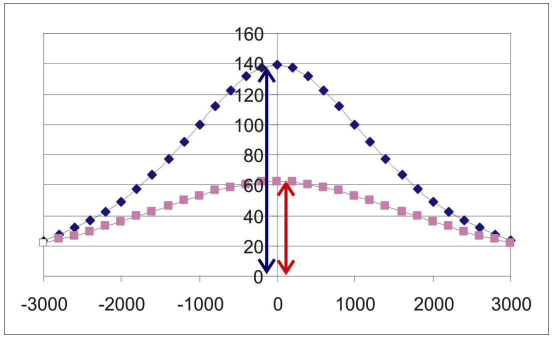
$$g_{z-\max} = \frac{\kappa M}{h^2}$$



Vyjádříme diferenční hmotnost a dosadíme.

$$g_{z-\max} = \frac{\kappa M}{h^2} \Leftrightarrow M = \frac{h^2 . g_{z-\max}}{\kappa}$$

Jaká je hodnota κ?

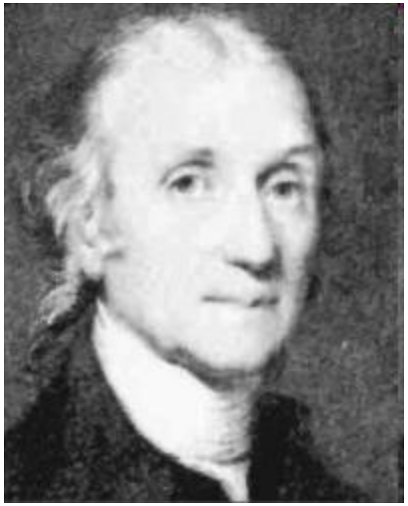


Newtonova gravitační konstanta κ

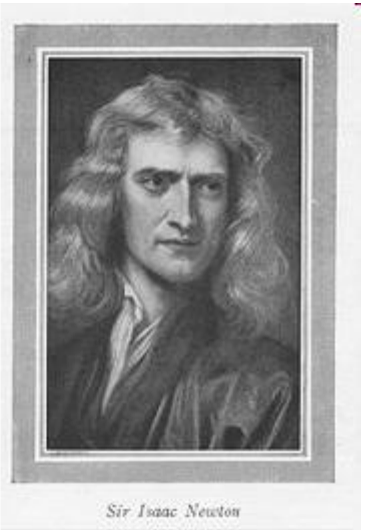
První experimentální odvození provedl H. Cavendish v roce 1798.

Později byla konstanta upřesňována.

Počátkem 20.století byla stanovena hodnota 6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2



Henry Cavendish
(1731-1810)



Isaac Newton
(1643-1727)

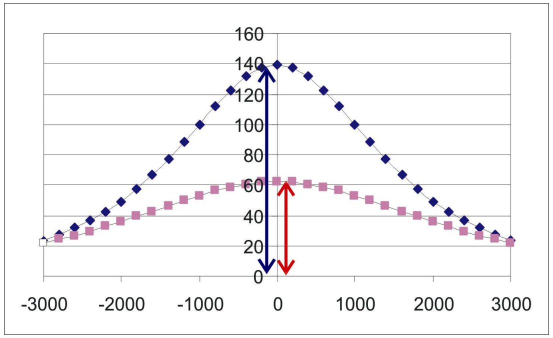
Vyjádříme diferenční hmotnost a dosadíme.

$$g_{z-\max} = \frac{\kappa M}{h^2} \Leftrightarrow M = \frac{h^2 . g_{z-\max}}{\kappa}$$

Maximální tíhový účinek $g_{z\text{-}max} \approx 140\ \mu m/s^2$

Hloubka $h \approx 2000$ m

Gravitační konstanta $\kappa = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$



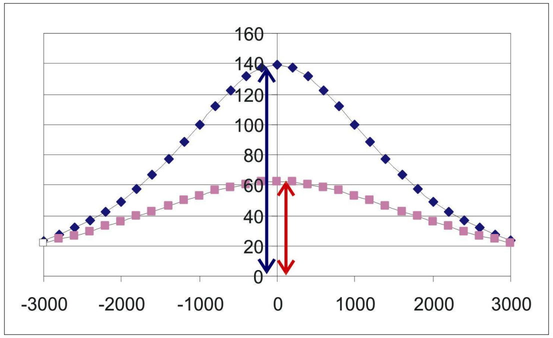
Vyjádříme diferenční hmotnost a dosadíme.

$$M = \frac{h^2 . g_{z-\max}}{\kappa} = \frac{2000^2 . 140 \times 10^{-6}}{6,67 \times 10^{-11}} = 8,4 \times 10^{12} kg$$

Maximální tíhový účinek $g_{z\text{-max}} \approx 140\ \mu m/s^2$

Hloubka $h \approx 2000$ m

Gravitační konstanta $\kappa = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

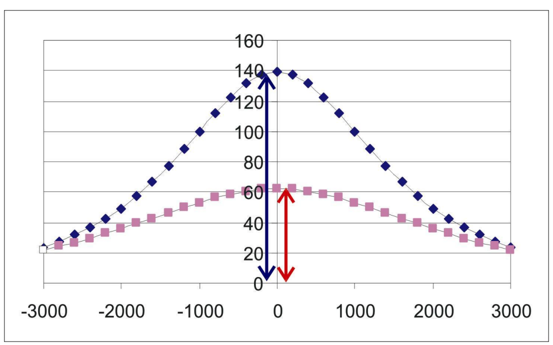


Vztah mezi diferenční hmotností a velikostí tělesa je:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3.\sigma$$

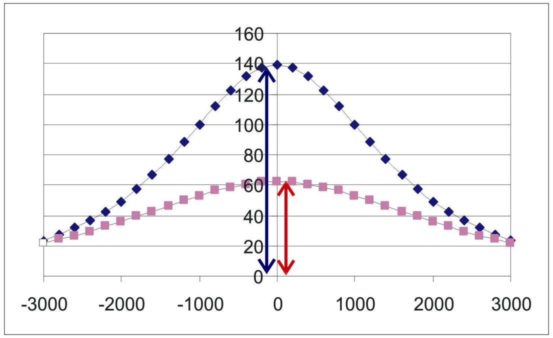
Tj.

$$\mathrm{M} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{R}^3.\sigma \Leftrightarrow \mathrm{R} = \sqrt[3]{\frac{3\mathrm{M}}{4\pi\sigma}}$$



Dosadíme a vypočteme poloměr hmotné koule:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\sigma}} = \sqrt[3]{\frac{3.8,4\times10^{12}}{4.3,14.250}} = 2000m$$

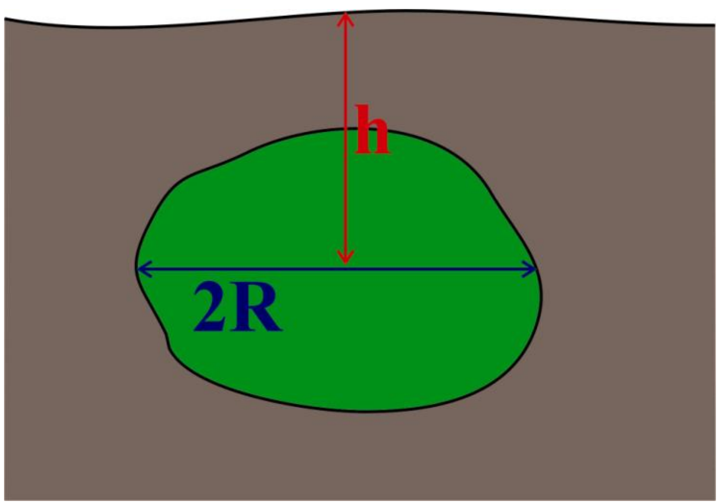


Závěr:

Hloubka těžiště dioritového tělesa je cca 2000 m.

Poloměr tělesa je cca 2000m.

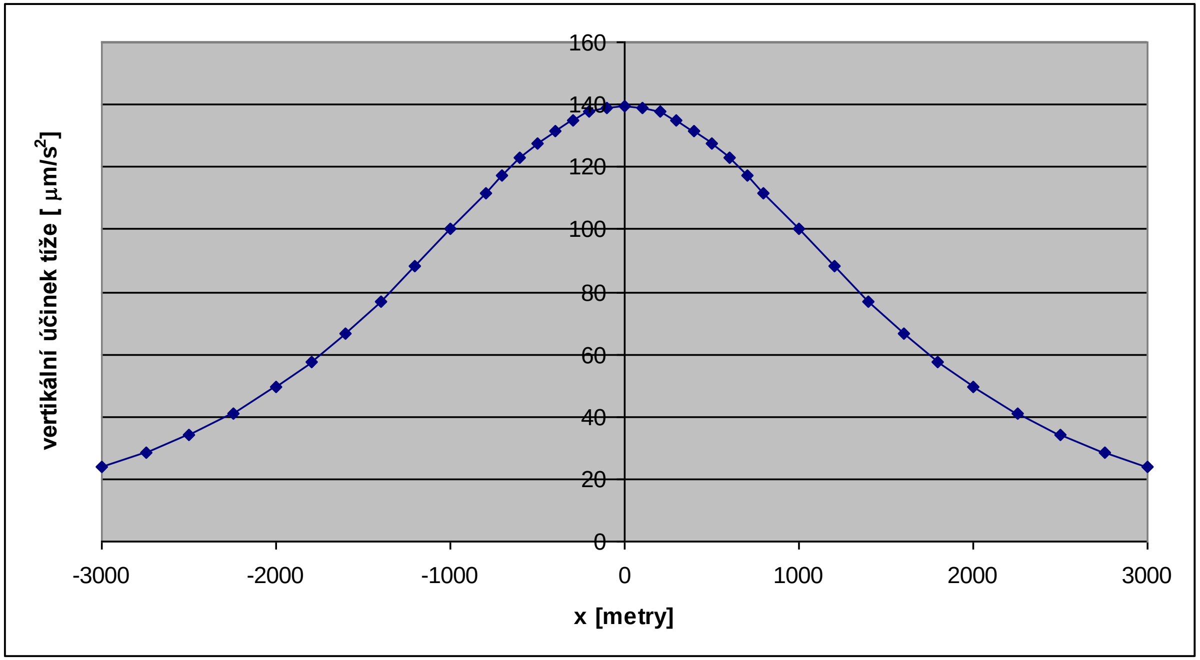
Tj. těleso se v horní partii dotýká povrchu a sahá do hloubky přibližně 4000 m.



Typy možných praktických otázek pro závěrečný test:

hloubka objektu:

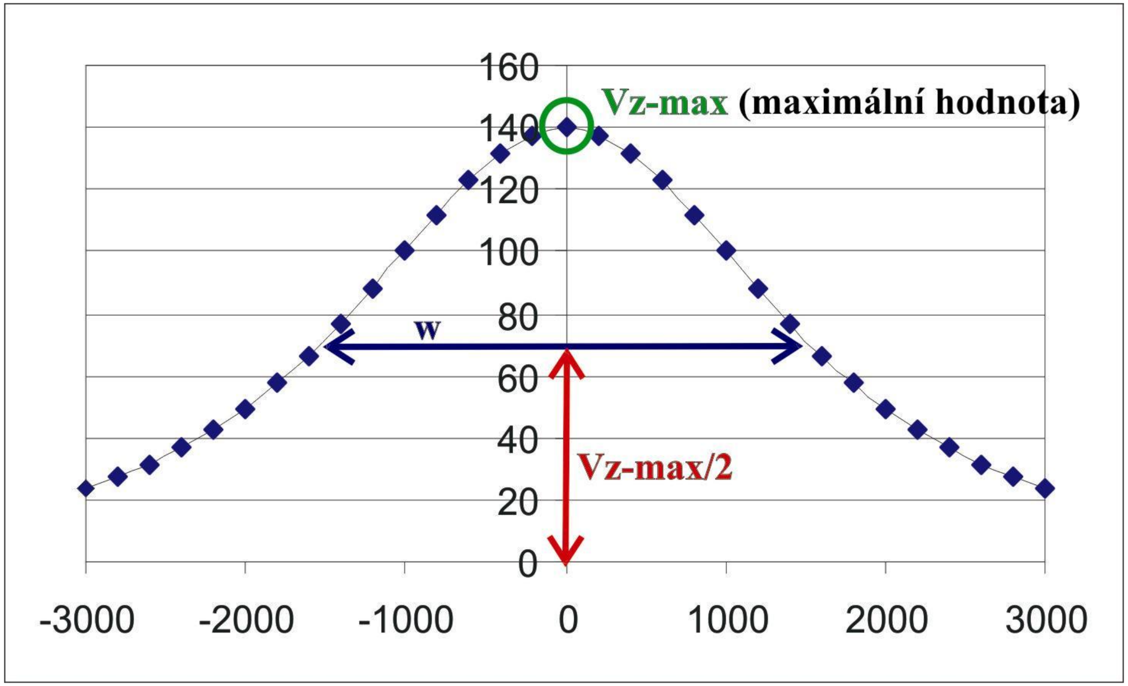
Urči hloubku těžiště hmotné koule, jejíž tíhový účinek měřený na profilu procházejícím nad středem koule je znázorněný na daném grafu. Diferenční hustota diskutované hmotné koule je 250 kg/m^3.



Maximální hodnota tíhového účinku je cca 140 μm/s^2

Šířka křivky tíhového účinku v úrovni odpovídající polovině maximální hodnoty tíhové anomálie je cca 3060 m.

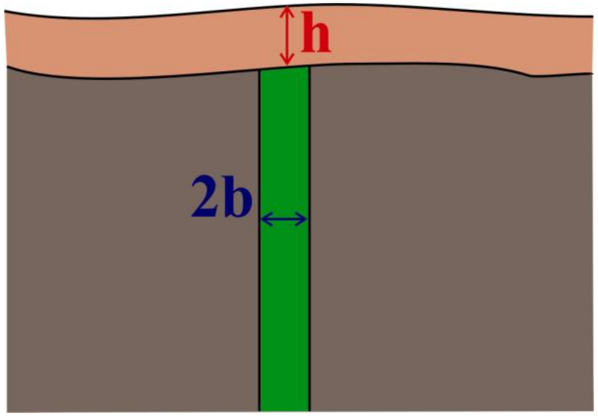
Hloubka těžiště hmotné koule je cca 1989 m ≈ 2000 m.



$$h = 0{,}65.w$$

PŘÍKLAD 2: URČENÍ HLOUBKY HORNÍHO OKRAJE ŽÍLY (MAGNETOMETRIE)

Problém: Na severo-jižním profilu byla zjištěna magnetická anomálie, způsobená strmou východo-západní bazaltovou žilou, která proráží sedimenty. Žíla je překryta zvětralinovým pláštěm a nevychází až na povrch. Magnetická susceptibilita výplně žíly je 0,008, indukce normálního magnetického pole má hodnotu 50.000nT, magnetická inklinace je 65°. Chceme určit hloubku horního okraje žíly a mocnost žíly.



Účinek svislé desky

V případě severo-jižního profilu jdoucího kolmo na svislou desku je vztah pro magnetický účinek:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos(2I_n) + x\sin(2I_n)\right)$$

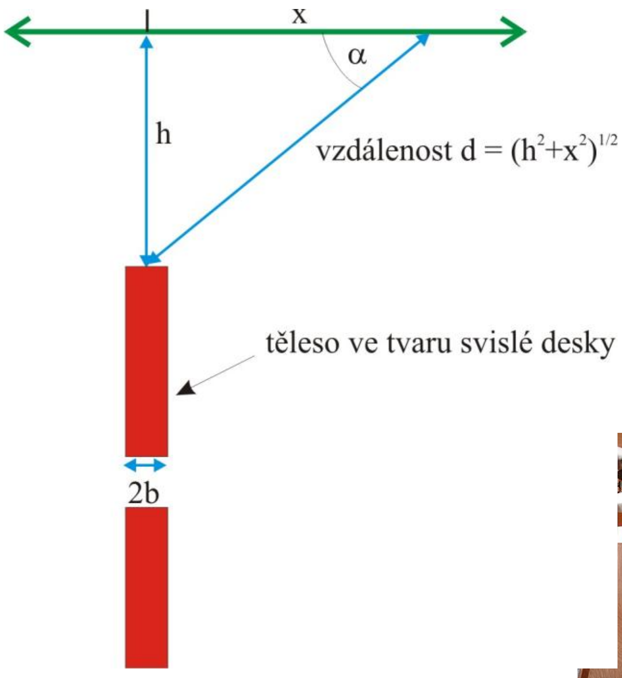
κ ... susceptibilita

T_0 ... indukce normálního mag. pole

I_n ... inklinace normálního mag. pole

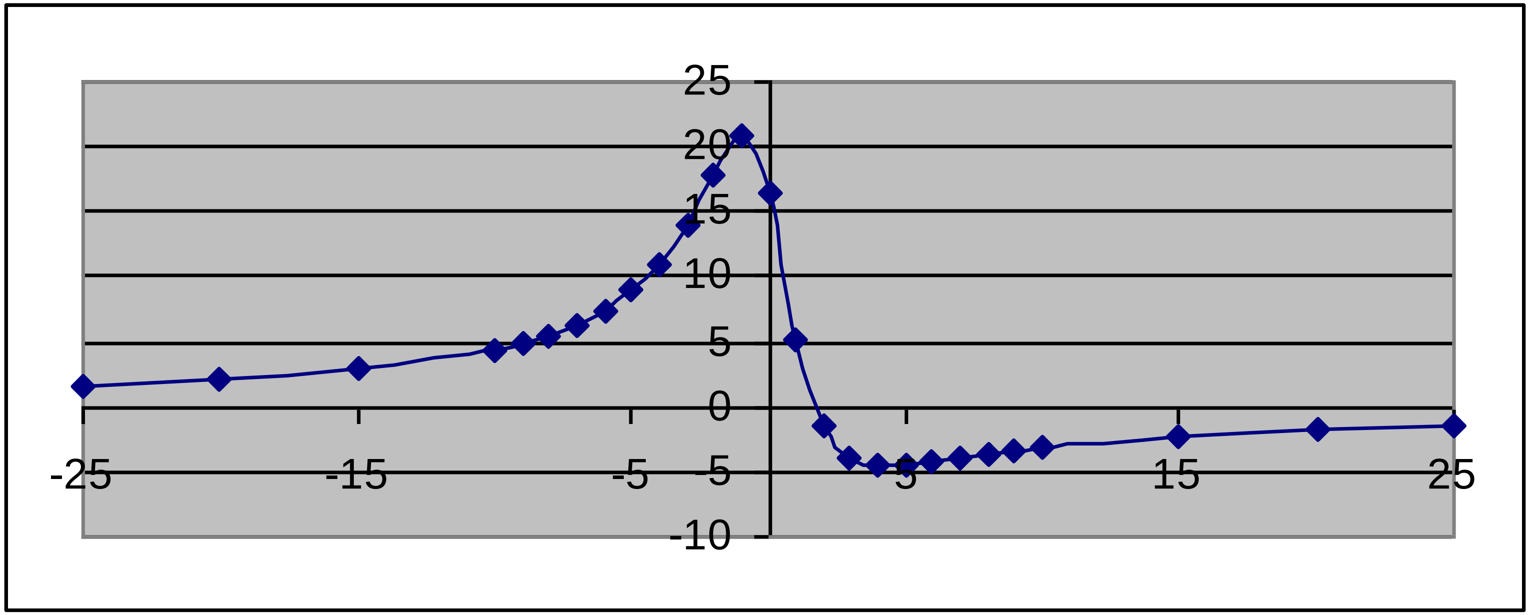
h ... hloubka horního okraje desky

2b ... mocnost desky



Graf magnetického účinku je obecně asymetrický a má jedno globální minimum a a jedno globální maximum

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

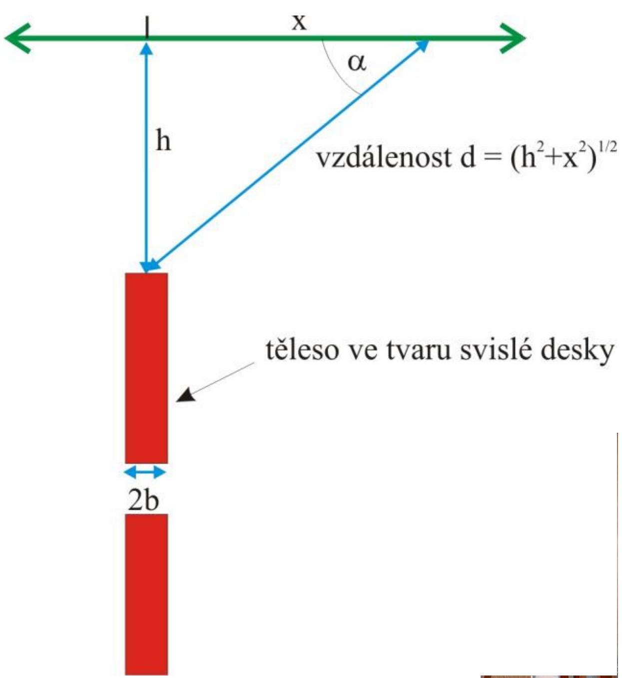


Všimněme si na našem výchozím vztahu blíže goniometrických funkcí. Obě funkce jsou aplikovány na dvojnásobek inklinace normálního magnetického pole – pokud je tedy I_n=45°, mají obě funkce triviální řešení ($\sin 2.I_n=1$; $\cos 2.I_n=0$) a náš vzorec se podstatně zjednoduší:

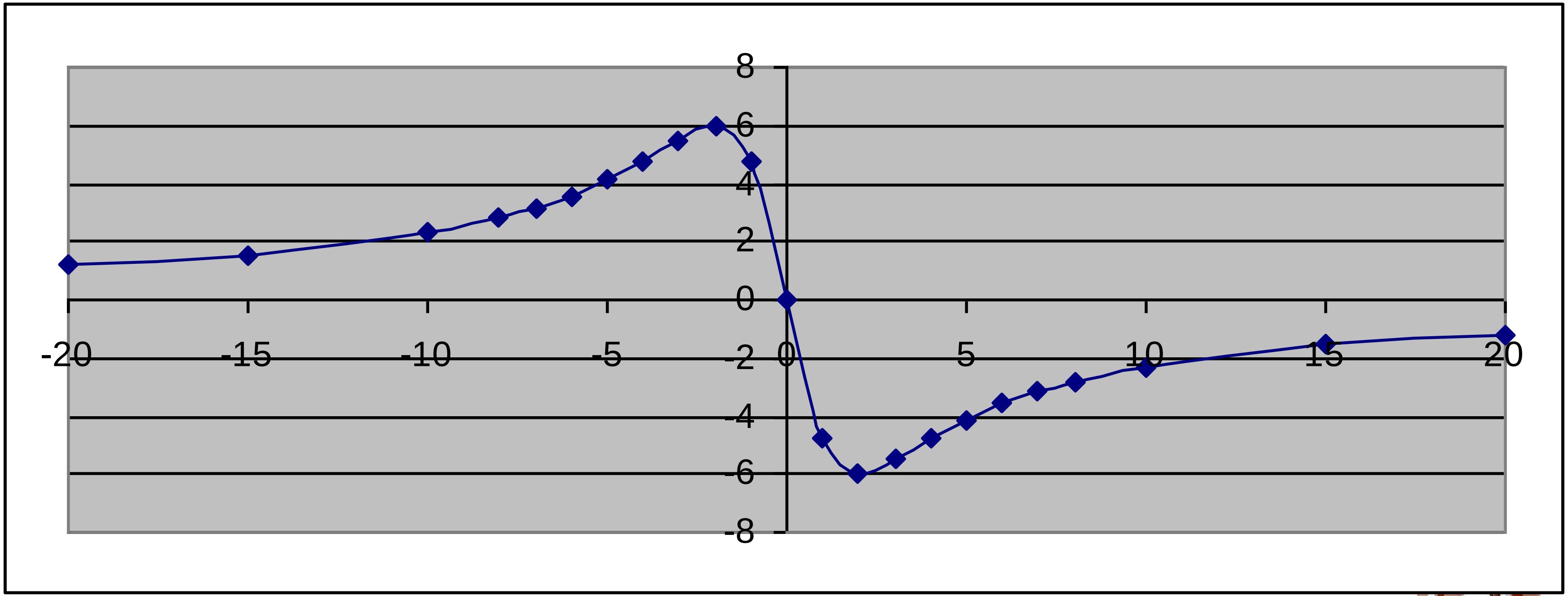
$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)$$

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(90°\right)+x\sin\left(90°\right)\right)=$$

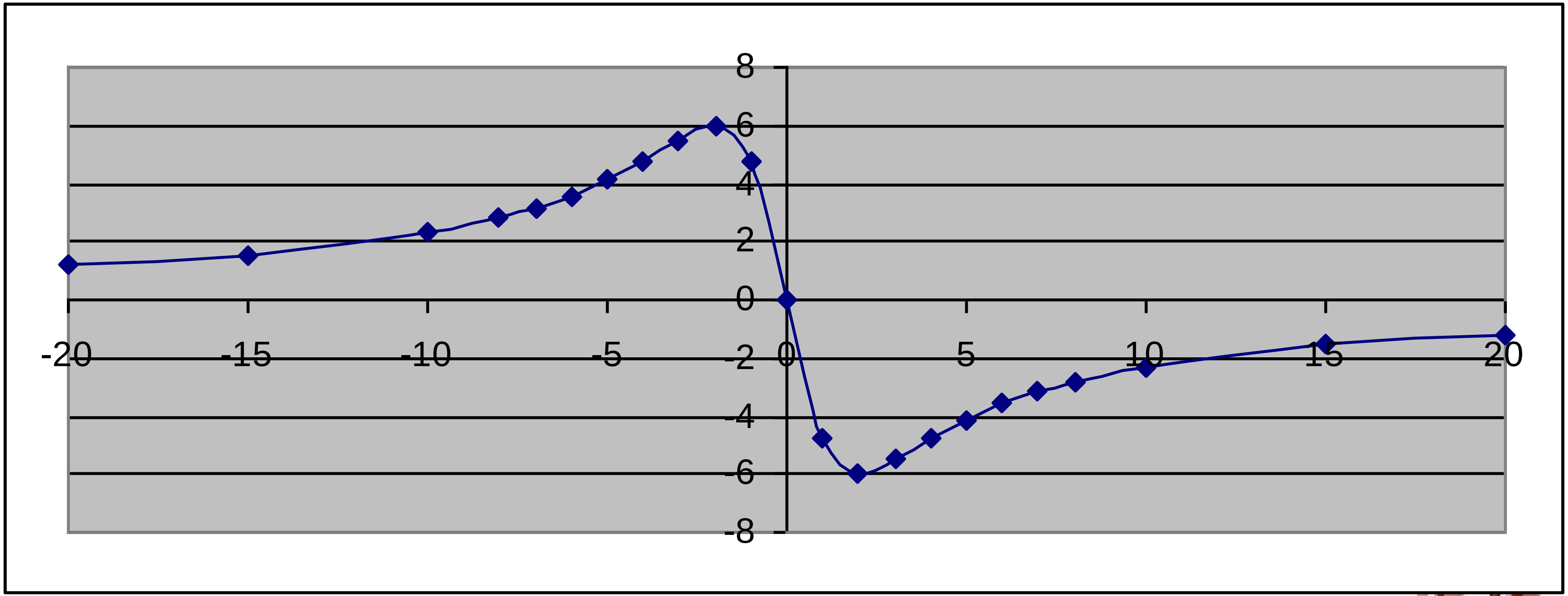
$$= -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h.0+x.1\right) = -x\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}$$



Graf funkce ΔT je pro tento zjednodušený případ (I_n=45°) středově symetrický.
Přitom hodnota magnetického účinku ΔT přímo nad svislou deskou je nulová.



Co znamená, že magnetická inklinace I_n=45°?

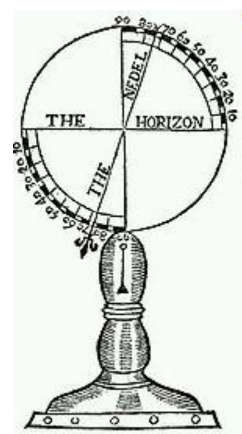


magnetická inklinace I_n

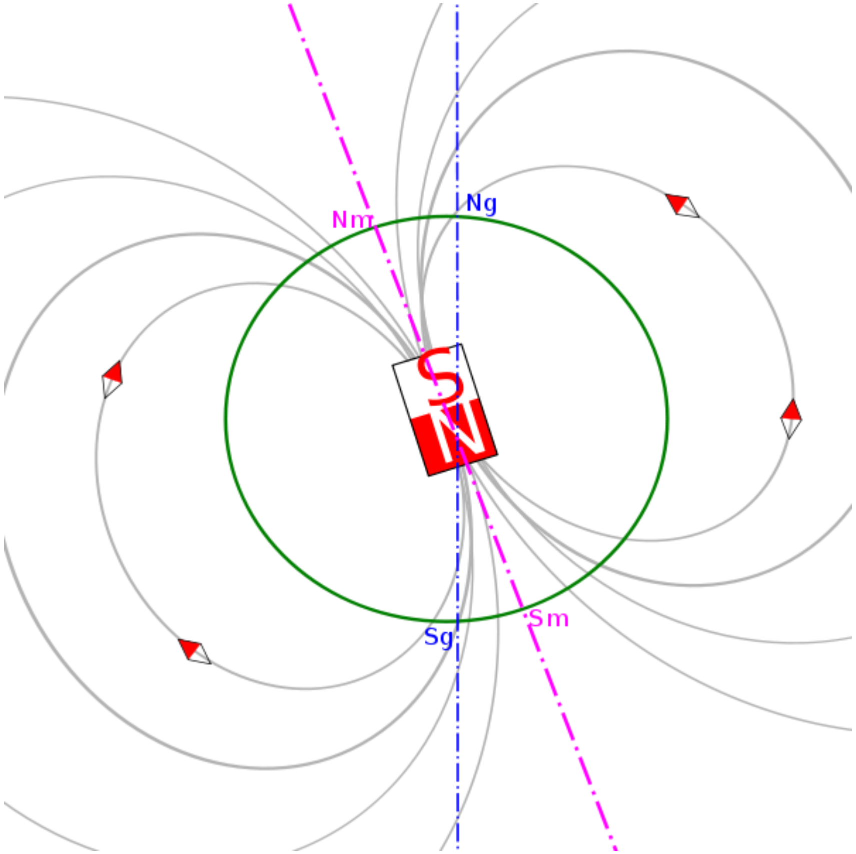
Magnetická inklinace je úhel, který svírá vektor zemského magnetického pole s vodorovnou rovinou.

Poprvé byla popsána anglickým námořníkem a výrobcem kompasů Robertem Normanem v roce 1576, pravidelně je měřena od roku 1581.

Hodnota magnetické inklinace závisí na zeměpisné poloze (na poloze vůči magnetickému pólu).

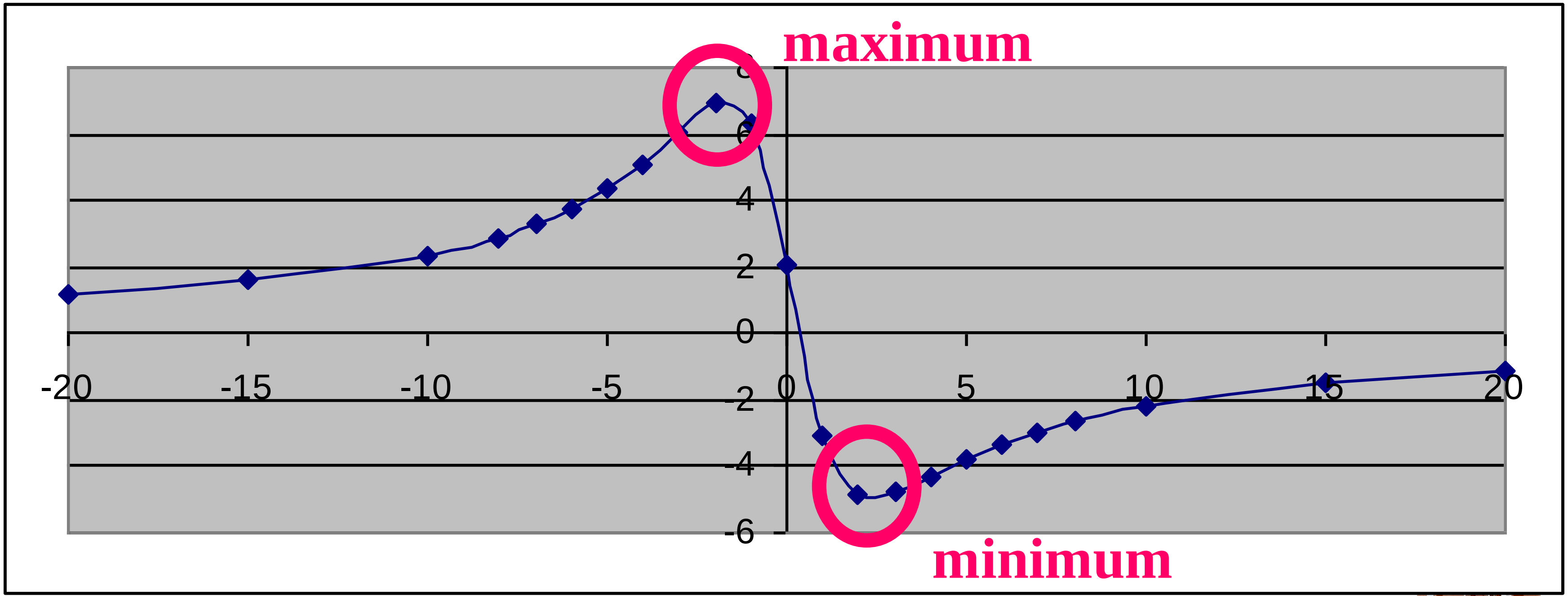


Magnetický a zeměpisný pól se mírně liší.

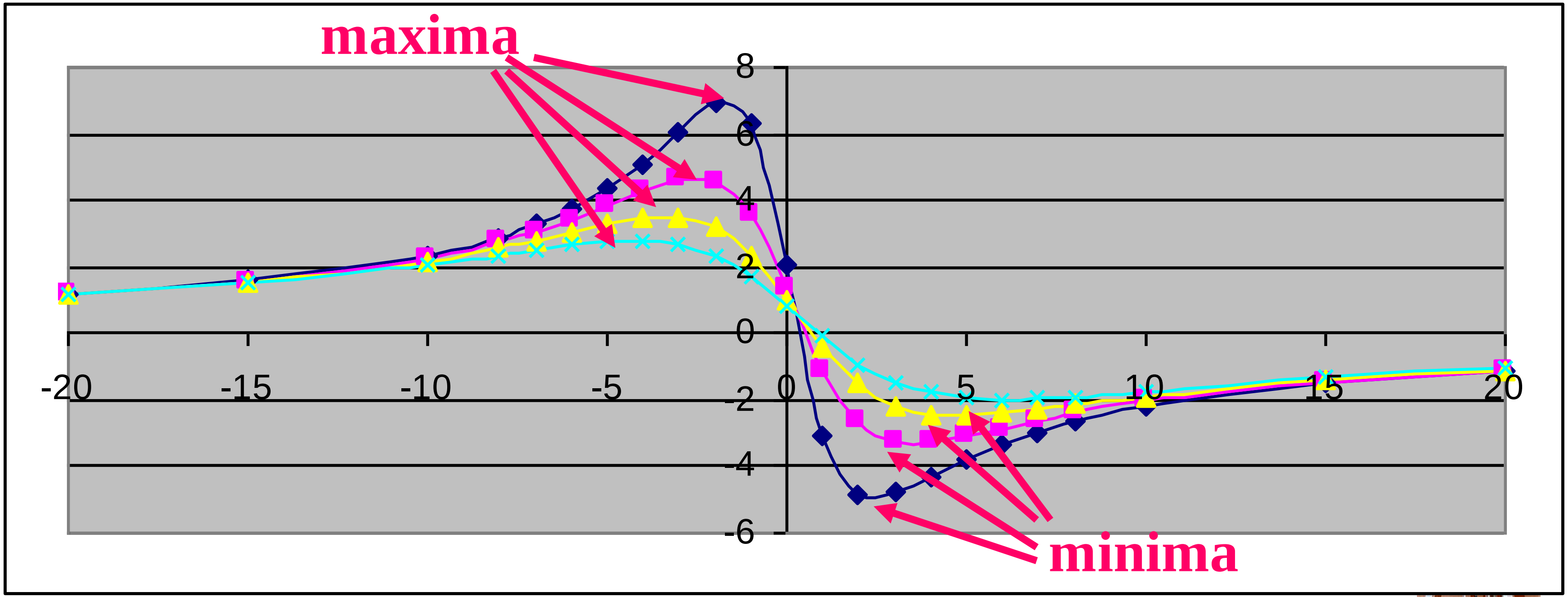


Hodnota magnetické inklinace I_n v České republice je cca 65°.

Předpokládejme obecnější úlohu a tedy asymetricky graf funkce ΔT. Všimněme si blíže absolutního maxima a minima funkce ΔT při postupné změně hloubky horního okraje desky.



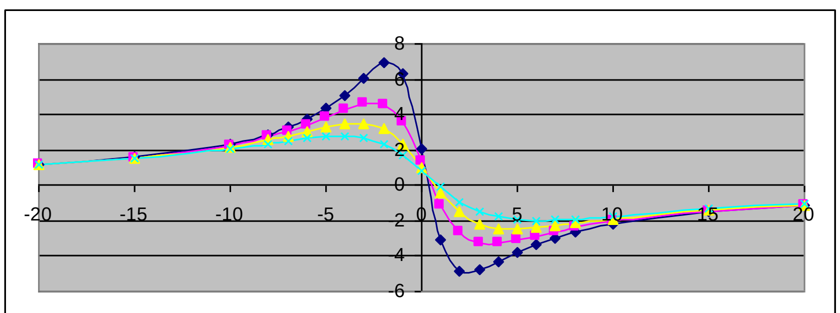
Zjišťujeme, že se s rostoucí hloubkou jednak zmenšuje absolutní hodnota ΔT v minimu a maximu funkce ΔT, a jednak že se od sebe vzdalují x-ové souřadnice maxima minima.



Vztah mezi absolutní hodnotou ΔT a hloubkou horního okraje desky je komplikovaný, hloubka horního okraje desky je vyjádřena kvadratickou rovnicí:

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right) \Leftrightarrow$$

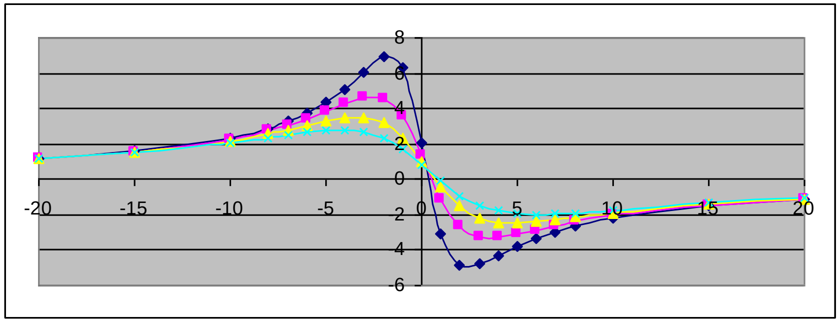
$$h^2 2\pi\Delta T + h\kappa T_0 2b\cos\left(2I_n\right) + x^2 2\pi\Delta T - x\kappa T_0 2b\sin\left(2I_n\right) = 0$$



Hodnota ΔT navíc závisí na mocnosti desky, kterou neznáme.

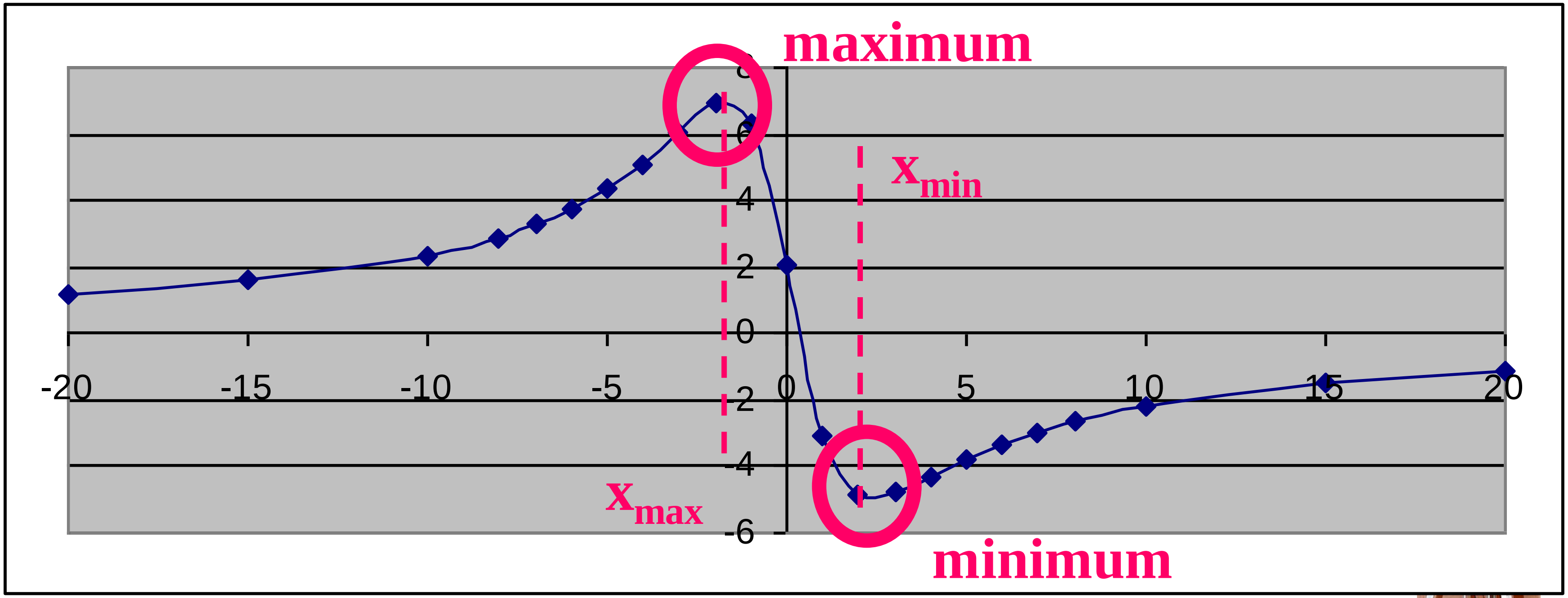
$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2 + h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$h^2 2\pi\Delta T + h\kappa T_0 2b\cos\left(2I_n\right) + x^2 2\pi\Delta T - x\kappa T_0 2b\sin\left(2I_n\right) = 0$$



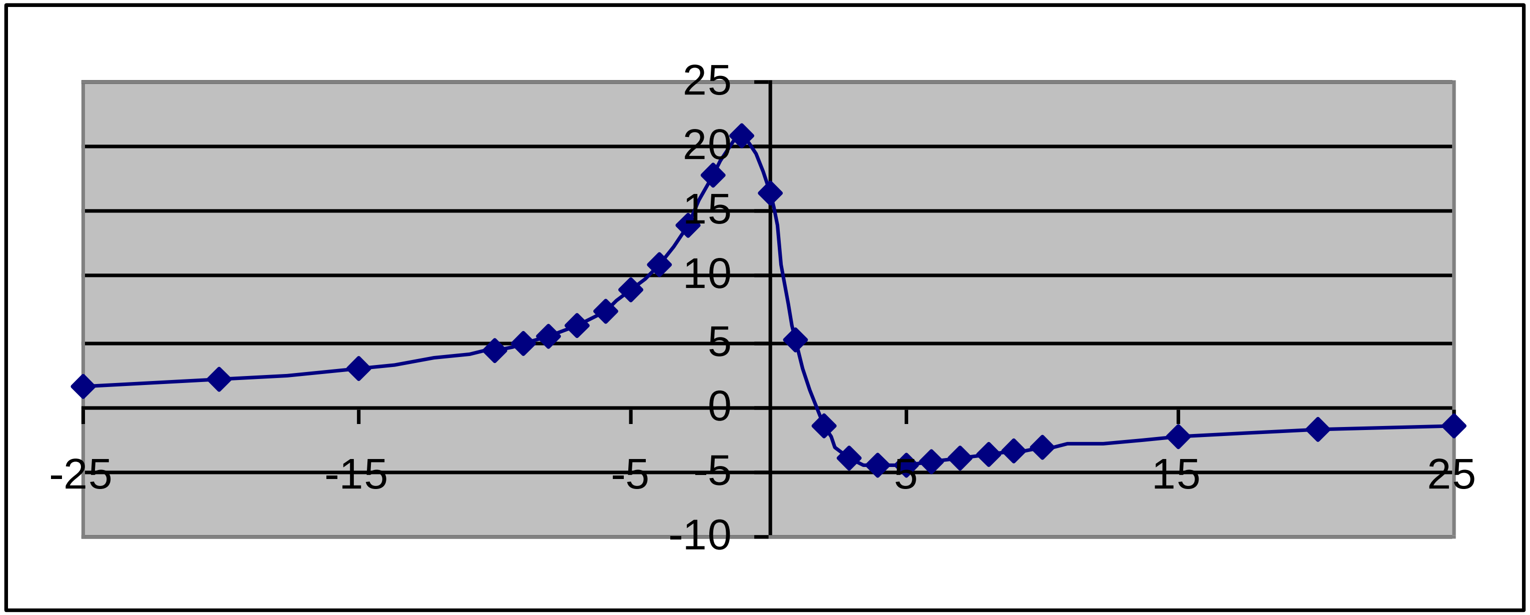
Vzdálenost x-ových souřadnic minima a maxima funkce ΔT závisí na hloubce. Lze ukázat, že platí vztah:

$$h = \left(x_{min} - x_{max}\right)\frac{\sin 2I_n}{2}$$



Vrátíme se ke grafu magnetického účinku bazaltové žíly, kterou vyšetřujeme v našem příkladě.

Aplikujeme vztah: $$h = \left(x_{min} - x_{max}\right)\frac{\sin 2I_n}{2}$$

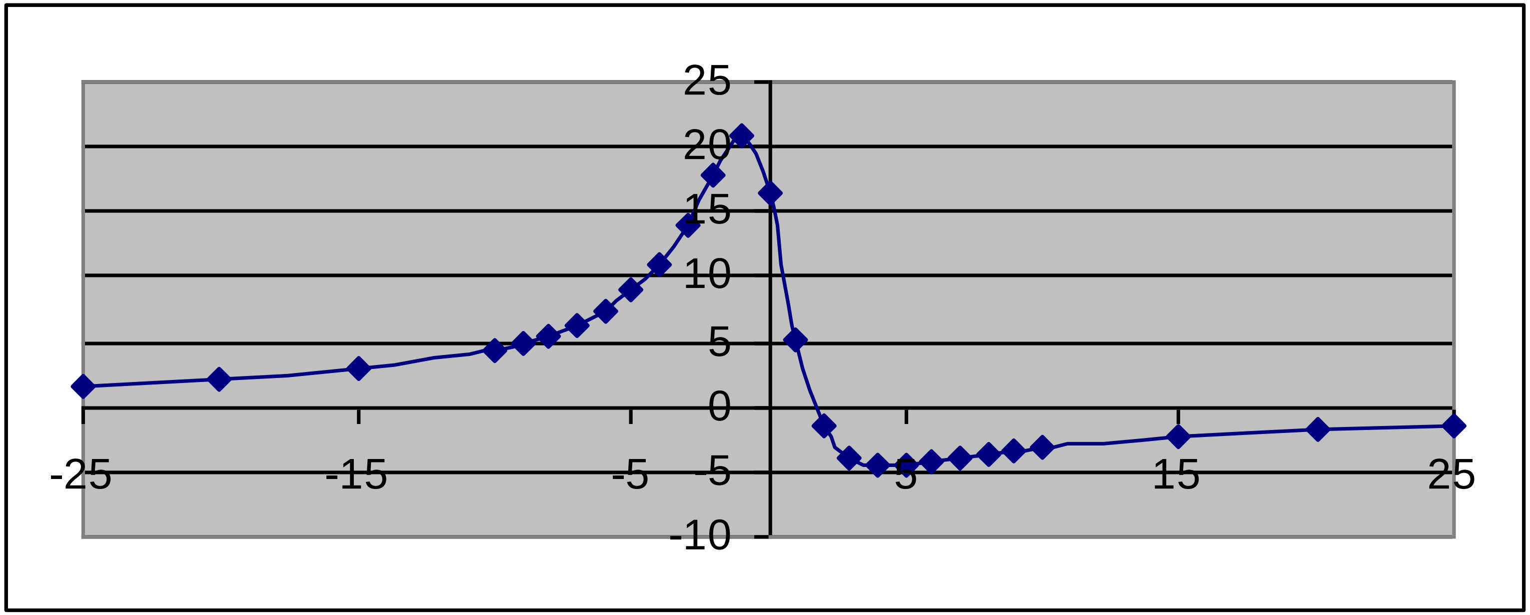


$X_{max} \approx -1$

$X_{min} \approx 4$

$I_n \approx 65°$

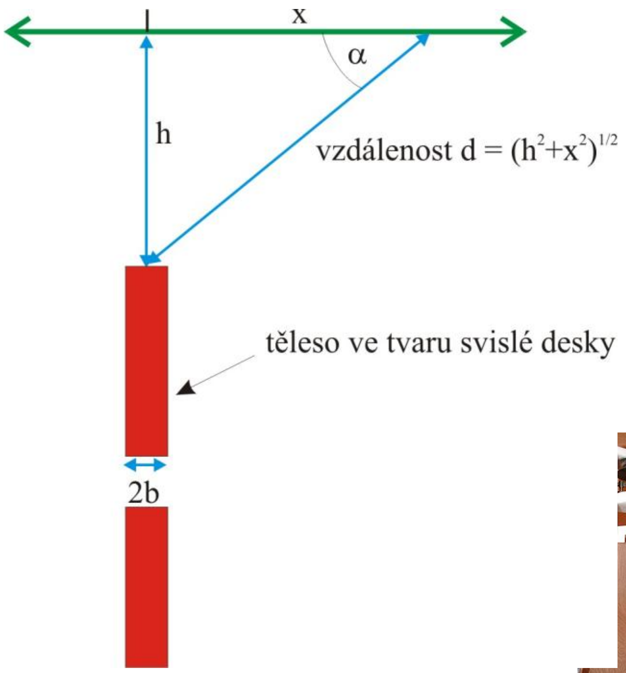
$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2} = (4 - -1)\frac{\sin 130°}{2} = 1{,}9 \approx 2m$$



Nyní se vrátíme k obecnému vztahu pro magnetický účinek svislé desky a odvodíme mocnost 2b

$$\Delta T(x) = -\frac{\kappa T_0 2b}{2\pi\left(x^2+h^2\right)}\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$2b = -\frac{\Delta T . 2\pi\left(x^2+h^2\right)}{\kappa T_0\left(h\cos\left(2I_n\right)+x\sin\left(2I_n\right)\right)}$$

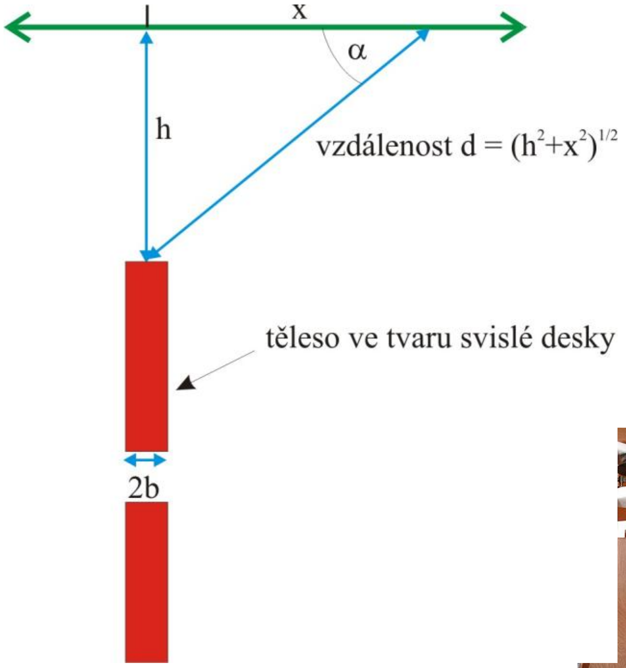


Vztah by měl platit pro každé staničení x, tedy i pro x=0.
Vzorec tak můžeme výrazně zjednodušit.

$$2b = -\frac{\Delta T.2\pi\left(x^2 + h^2\right)}{\kappa T_0\left(h\cos\left(2I_n\right) + x\sin\left(2I_n\right)\right)}$$

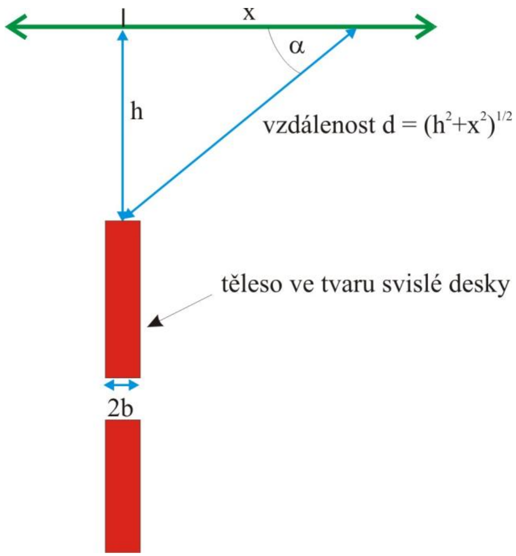
$$2b = -\frac{\Delta T.2\pi\left(0^2 + h^2\right)}{\kappa T_0\left(h\cos\left(2I_n\right) + 0\sin\left(2I_n\right)\right)} =$$

$$= -\frac{\Delta T.2\pi h^2}{\kappa T_0 h\cos\left(2I_n\right)} = -\frac{\Delta T.2\pi h}{\kappa T_0\cos\left(2I_n\right)}$$

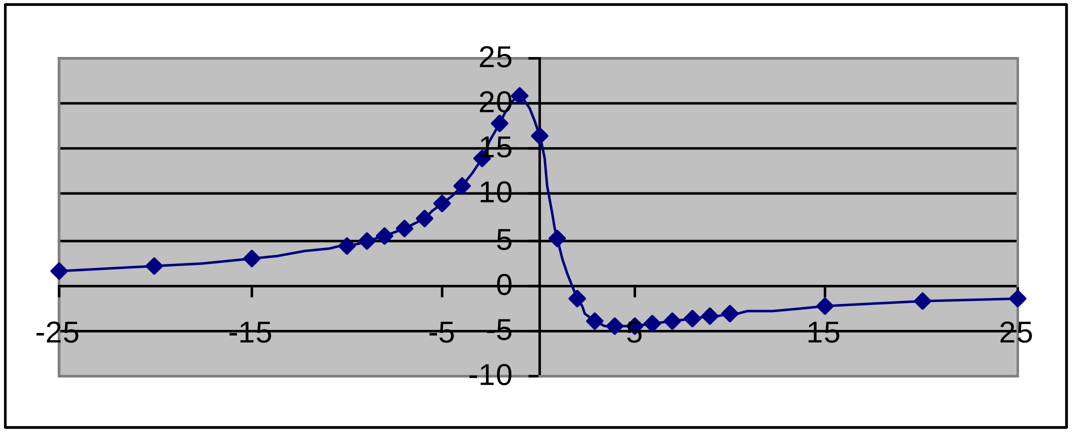


Nyní můžeme dosadit:

susceptibilita κ = 0,008
indukce normálního mag. pole T_0 = 50.000 nT
magnetická inklinace I_n = 65°
magnetický účinek pro x=0 $\Delta T(0)$ = 16,37 nT



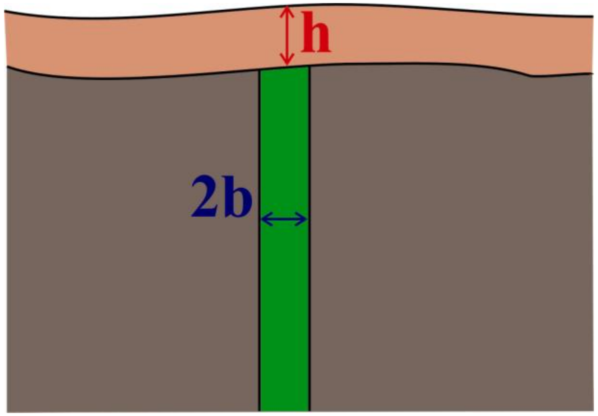
$$2b = -\frac{\Delta T.2\pi h}{\kappa T_0 \cos(2I_n)} = -\frac{16{,}37 \times 2 \times 3{,}14 \times 2}{0{,}008 \times 50000 \times \cos(130°)} = 0{,}8m$$



Závěr:

Hloubka horního okraje svislé východo-západní bazaltové žíly je cca 2 m.

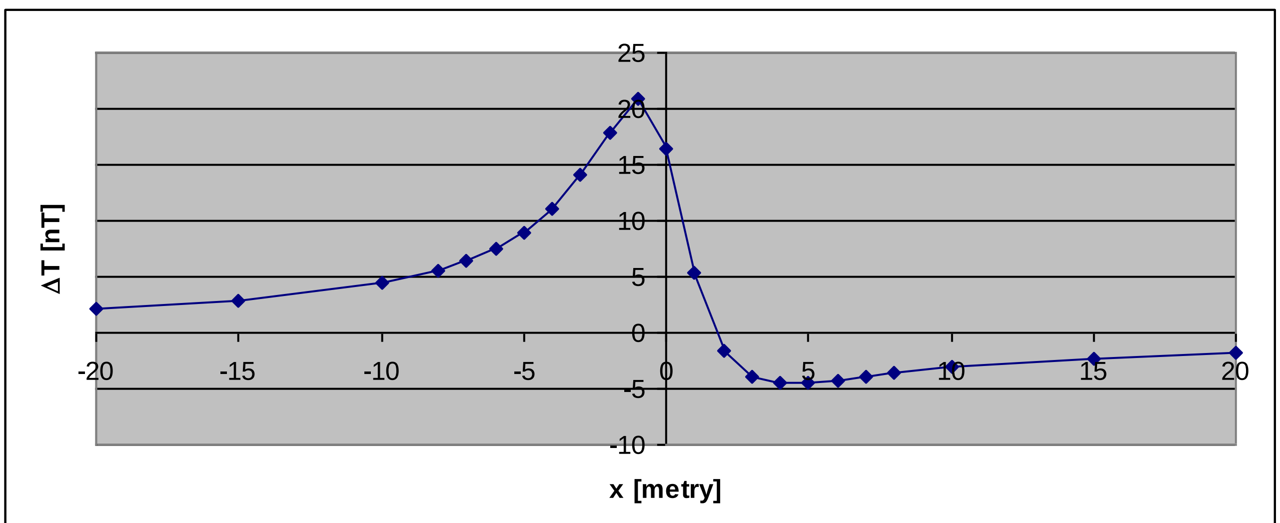
Mocnost žíly je 0,8 m.



Typy možných praktických otázek pro závěrečný test:

hloubka objektu:

Urči hloubku tenké svislé desky, jejíž magnetický účinek ΔT na severojižním profilu je znázorněn na daném grafu. Hodnota inklinace In je 65°.



$X_{max} \approx -1$

$X_{min} \approx 4$

$I_n \approx 65°$

$$h = (x_{min} - x_{max})\frac{\sin 2I_n}{2} = (4 - -1)\frac{\sin 130°}{2} = 1{,}9 \approx 2m$$