PŘÍKLADY APLIKACE GEOFYZIKÁLNÍCH METOD

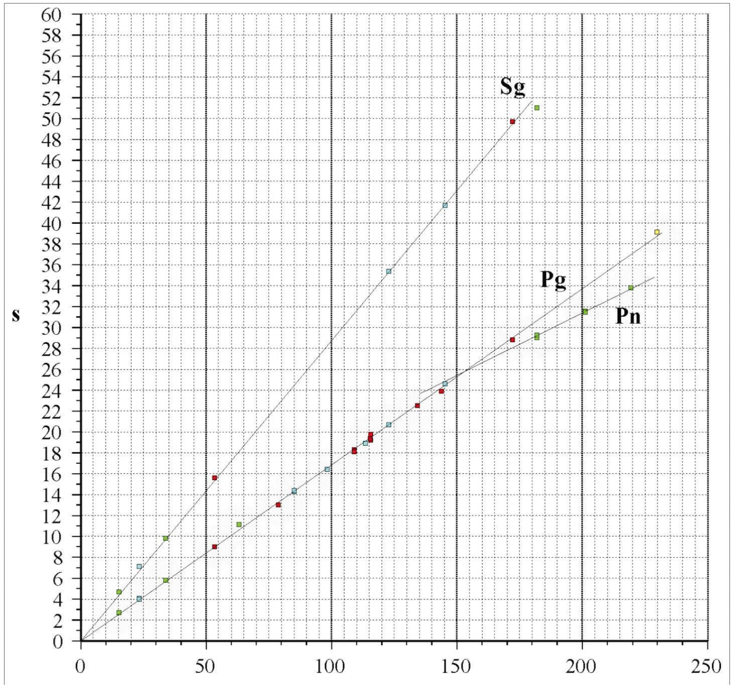
(seismika)

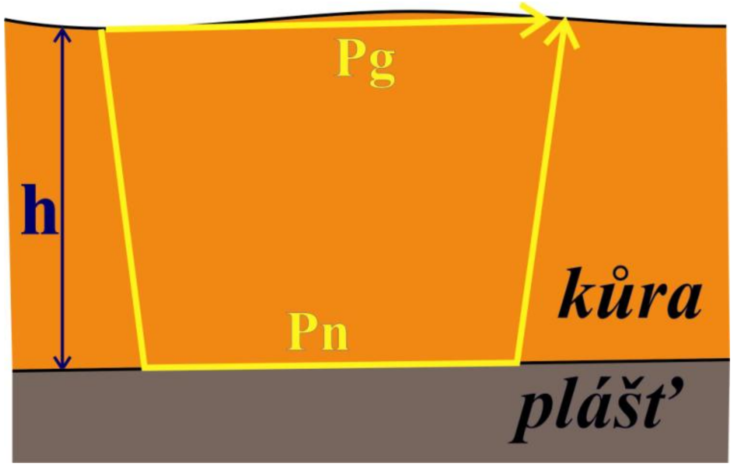
J. Havíř

Josef.Havir@ipe.muni.cz

PŘÍKLAD 3: MOCNOSTI ZEMSKÉ KŮRY Z HODOCHRONY LOMENÉ VLNY (SEISMIKA)

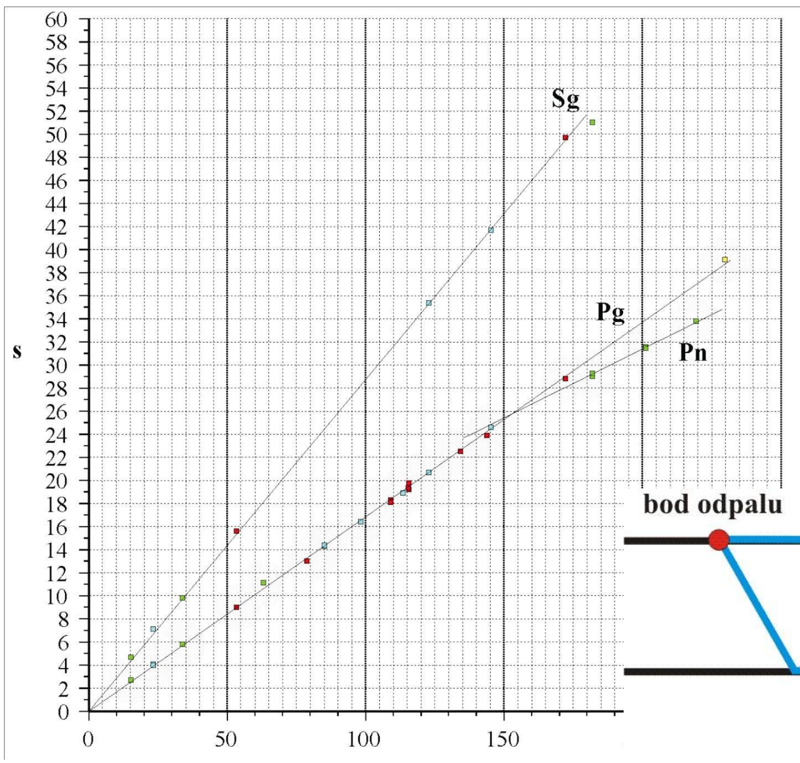
Problém: Při seismickém experimentu byla získána data, z nichž byla sestrojena hodochrona přímé vlny Pg a vlny lomené podél MOHO rozhraní Pn. Chceme určit rychlosti vln Pg a Pn a mocnost kůry.

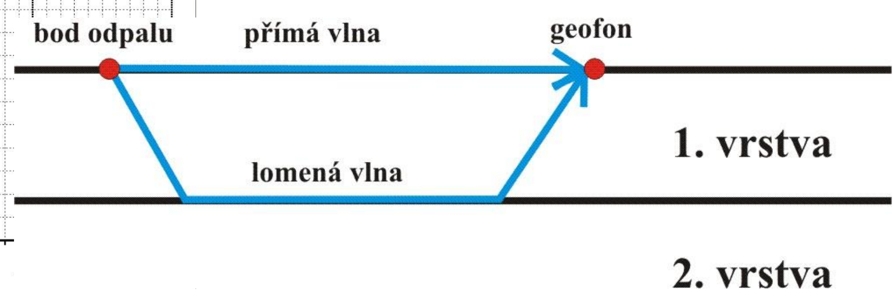




Vyjdeme z dvouvrstevného modelu. První vrstva bude representovat zemskou kůru, druhá vrstva zemský plášť.

Známe hodochrony přímé a lomené vlny. **Hodochrona** je křivka popisující závislost mezi časem detekce a vzdáleností od bodu odpalu. V homogenním prostředí je tato závislost přímková.



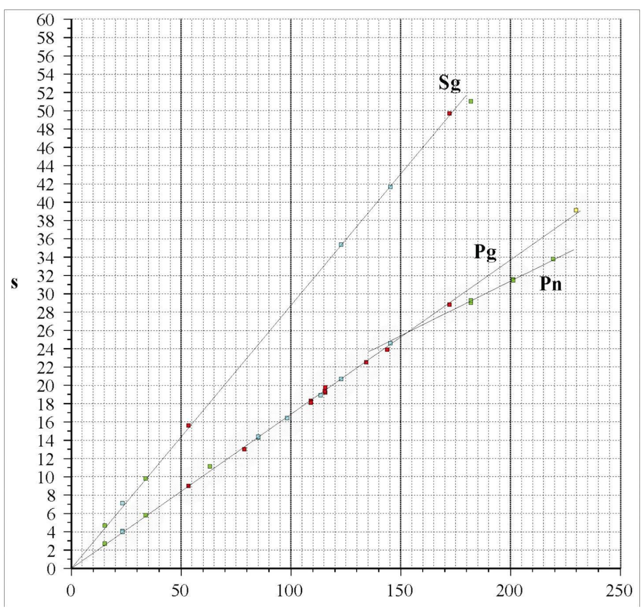


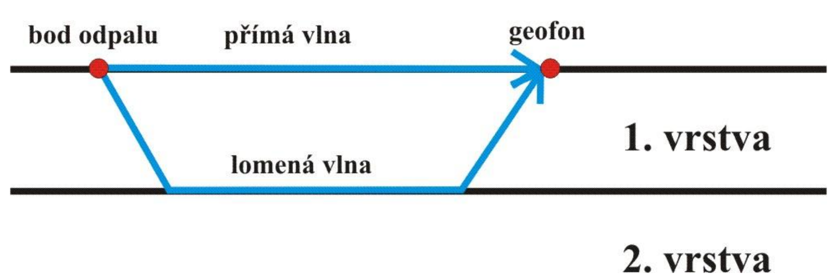
Hodochrona vlny přímé

Přímá vlna se pohybuje pouze 1.vrstvou a to po nejkratší dráze. Je detekována v epicentrální vzdálenosti x v čase t, pro který platí:

$$t = \frac{x}{v_1}$$

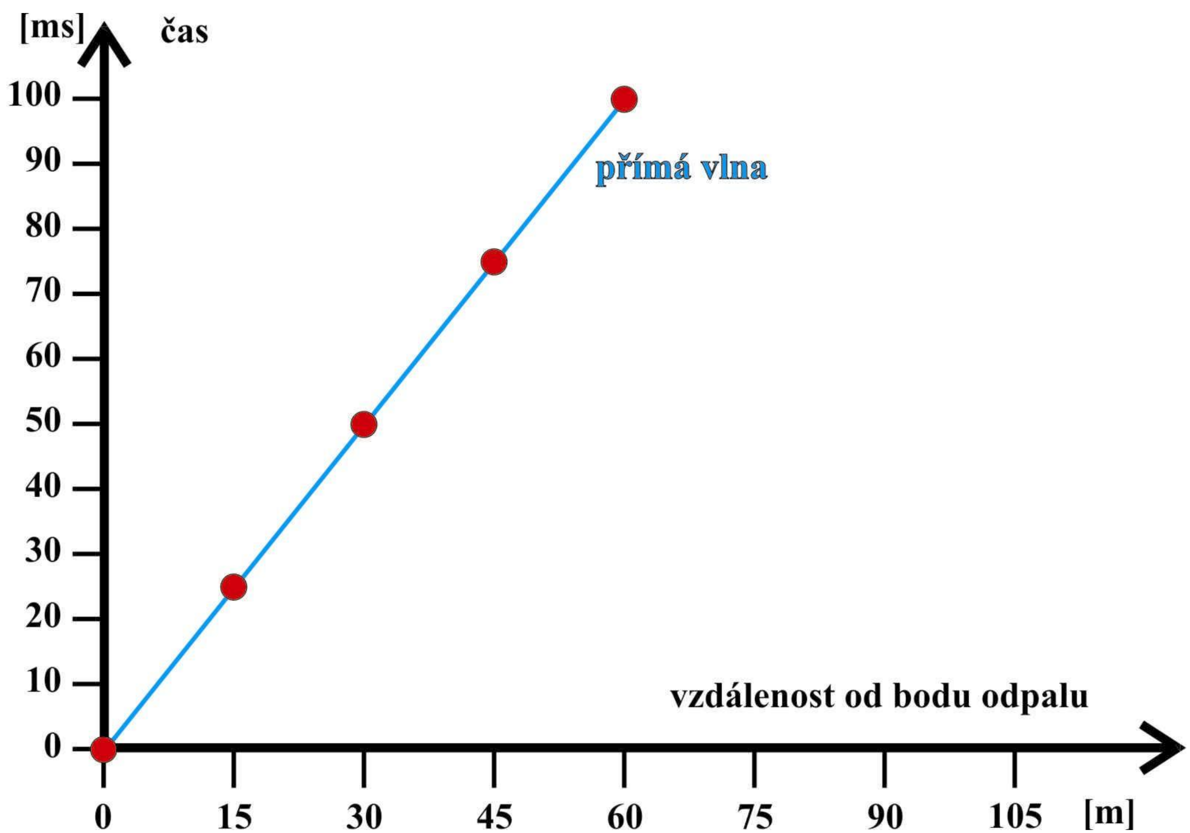
kde v_1 je rychlost seismické vlny v 1. vrstvě.





Zdroj seismického signálu (místo odpalu nálože při seismickém experimentu) se nachází na povrchu.

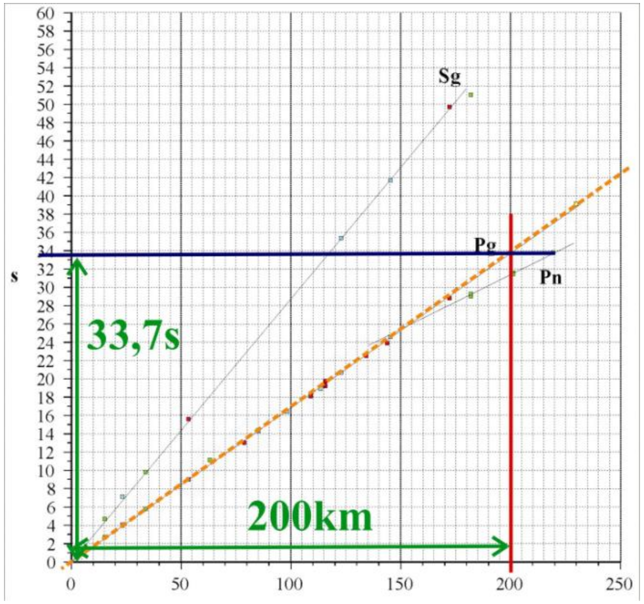
Přímá vlna je tedy detekována v místě odpalu (x=0) v čase t=0 a její hodochrona prochází počátkem souřadné soustavy.

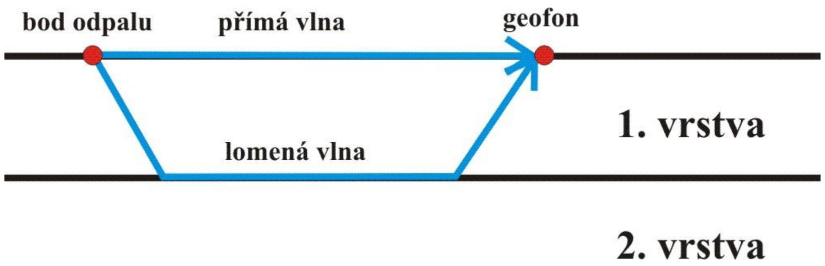


Pro rychlost v_1 tedy platí:

$$t = \frac{x}{v_1} \Leftrightarrow v_1 = \frac{x}{t}$$

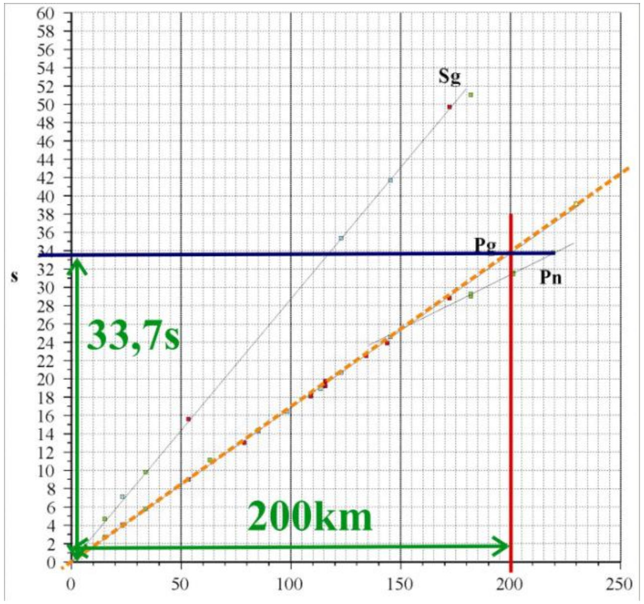
Epicentrální vzdálenost x a k ní příslušný čas detekce t můžeme odečíst přímo z hodochrony.

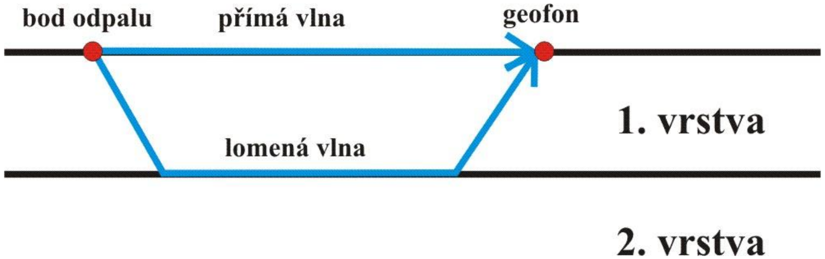




Snadno pak určíme hodnotu rychlosti v_1:

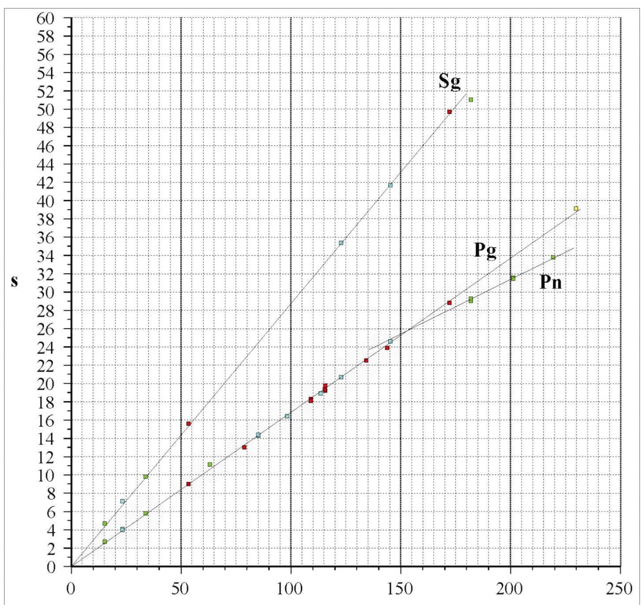
$$v_1 = \frac{x}{t} = \frac{200000}{33,7} = 5935\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

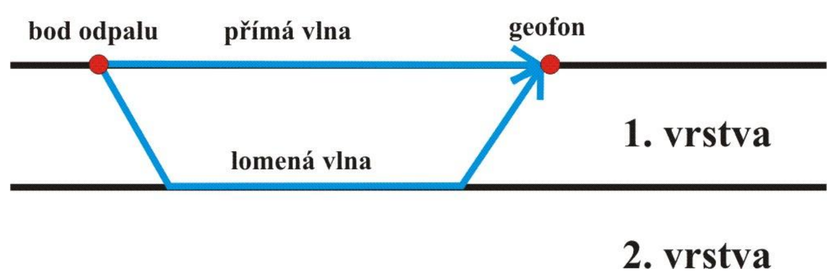




Hodochrona vlny lomené

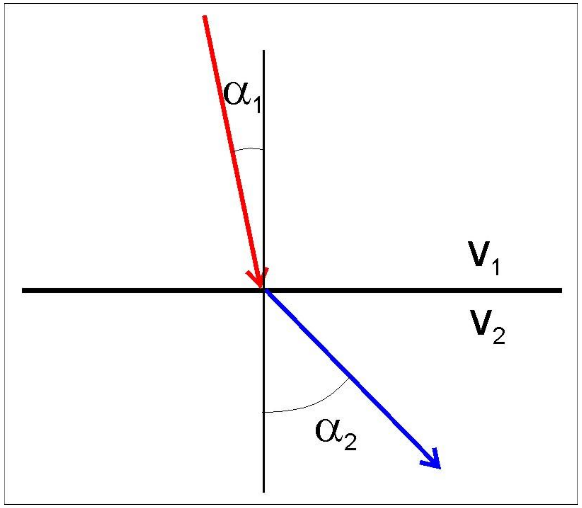
Dráha lomené vlny je komplikovanější.
Lomená vlna se šíří 1.vrstvou rychlostí v_1, na rozhraní 1. a 2. vrstvy se láme podél rozhraní, kudy se šíří rychlostí v_2, a pak se opět vrací k povrchu 1.vrstvou rychlostí v_1.





Aby se vlna lámala podél rozhraní, musí na něj dopadat pod kritickým úhlem i, který odvodíme ze Snellova zákona.

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$



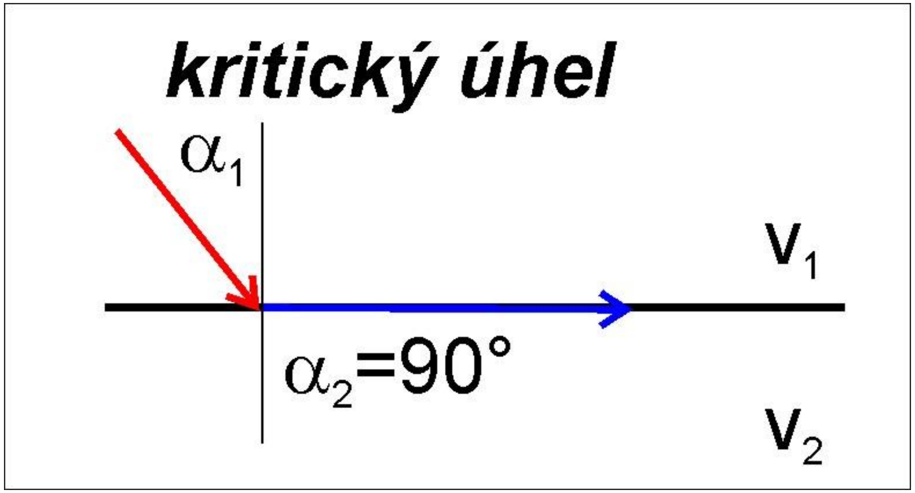
Willebrord van Roijen Snell

(1580-1626)

Při dopadu pod kritickým úhlem α_1=i se paprsek láme podél rozhraní, tj. α_2=90°.

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} \Leftrightarrow$$

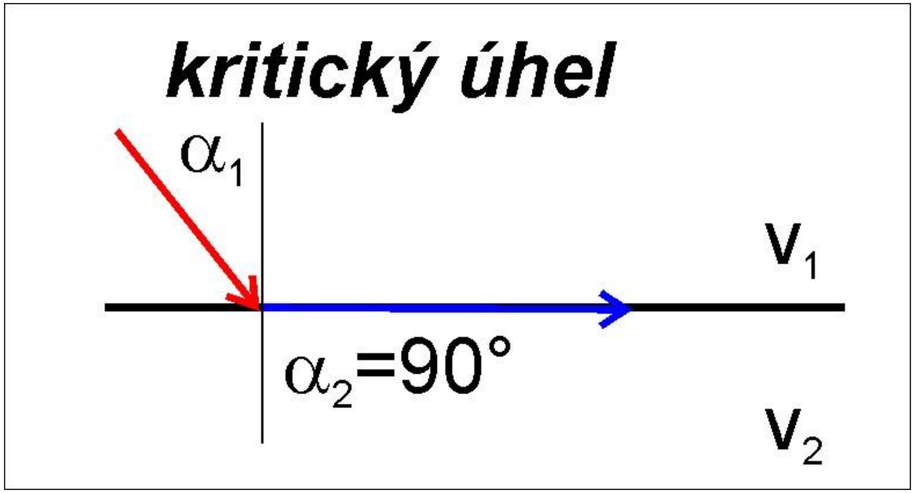
$$\frac{\sin(i)}{v_1} = \frac{\sin(90°)}{v_2} = \frac{1}{v_2}$$



Kritický úhel i si tedy můžeme vyjádřit vztahem:

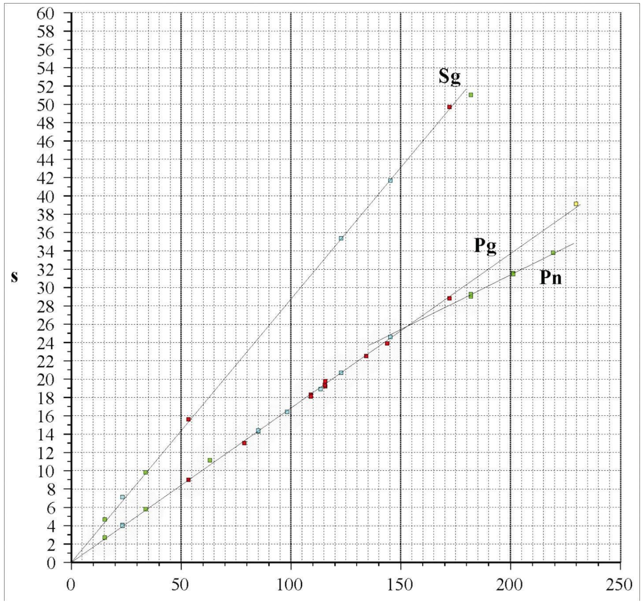
$$\frac{\sin(i)}{v_1} = \frac{1}{v_2} \Leftrightarrow \sin(i) = \frac{v_1}{v_2} \Leftrightarrow i = \arcsin\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$$

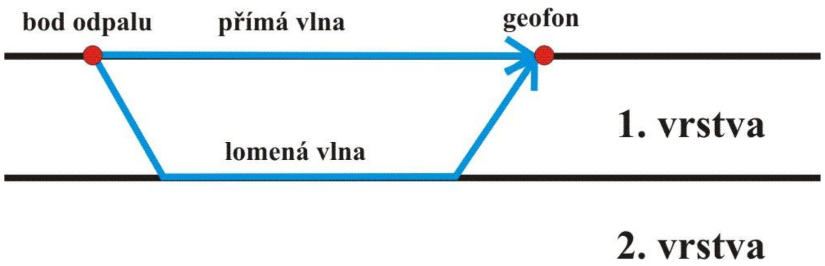
Zatím ale neznáme rychlost v_2.



Odvodíme si závislost mezi epicentrální vzdáleností a časem detekce lomené vlny. Základem opět bude obecný vztah, že čas detekce je přímo úměrný dráze paprsku a nepřímo úměrný rychlosti:

$$t = \frac{d}{v}$$ kde d je dráha paprsku.

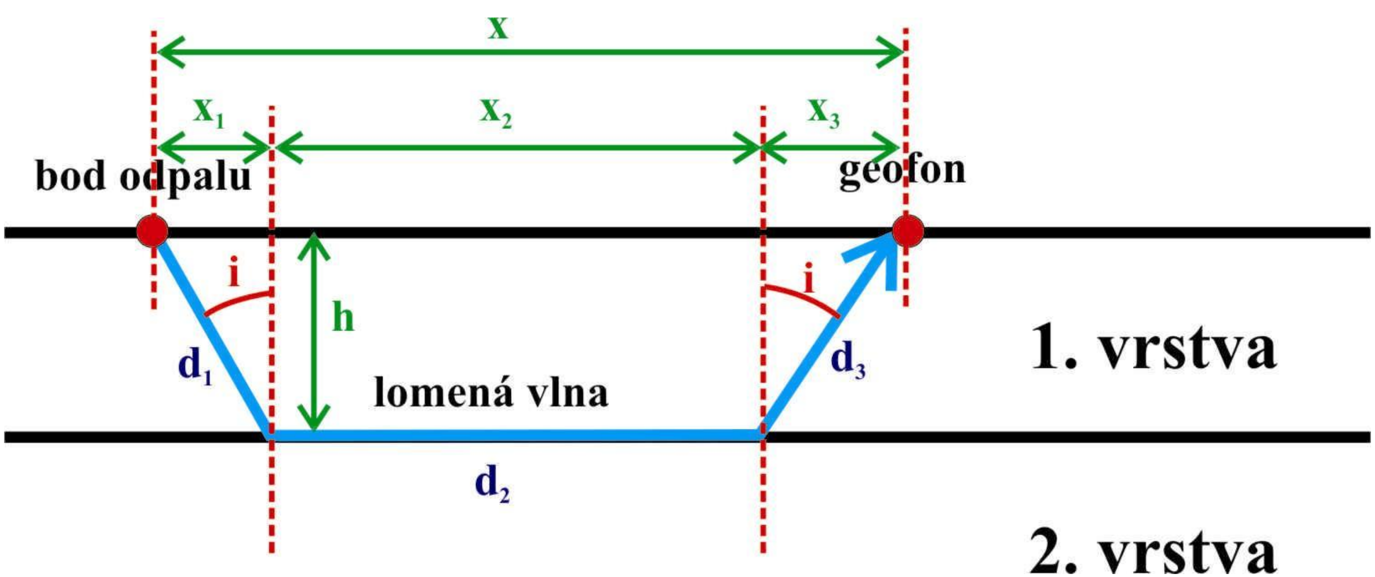




Dráhu paprsku (d) i epicentrální vzdálenost (x) si můžeme rozdělit na tři úseky:

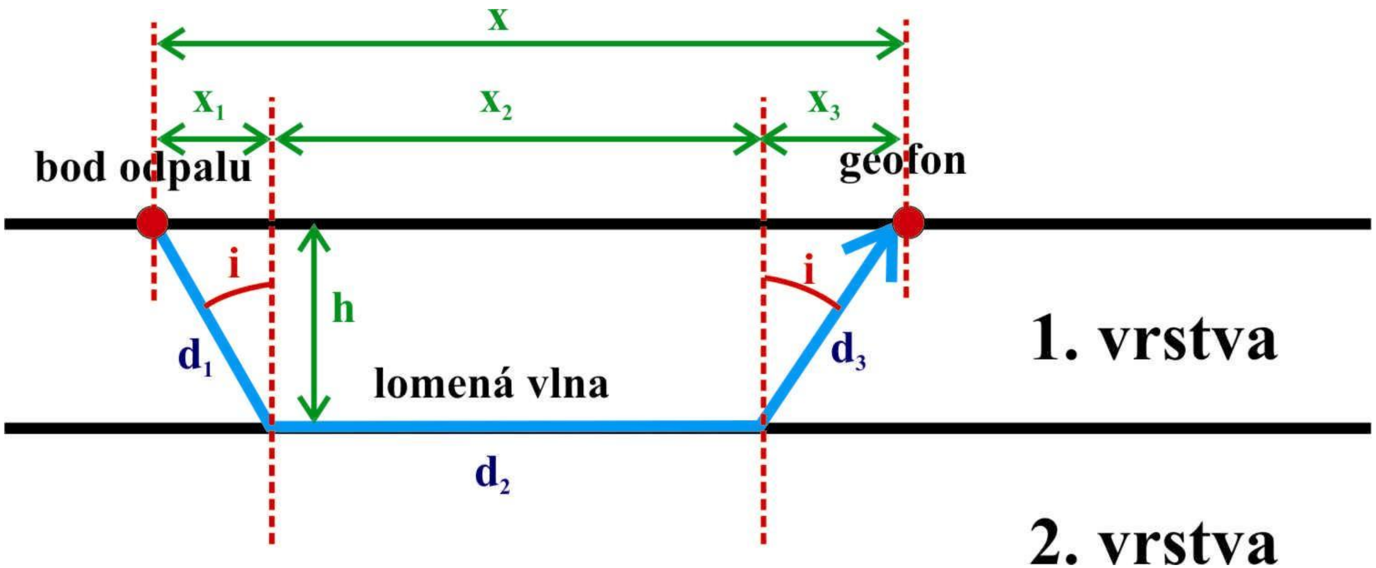
$$d = d_1 + d_2 + d_3 \qquad d_1 = d_3$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \qquad x_1 = x_3$$



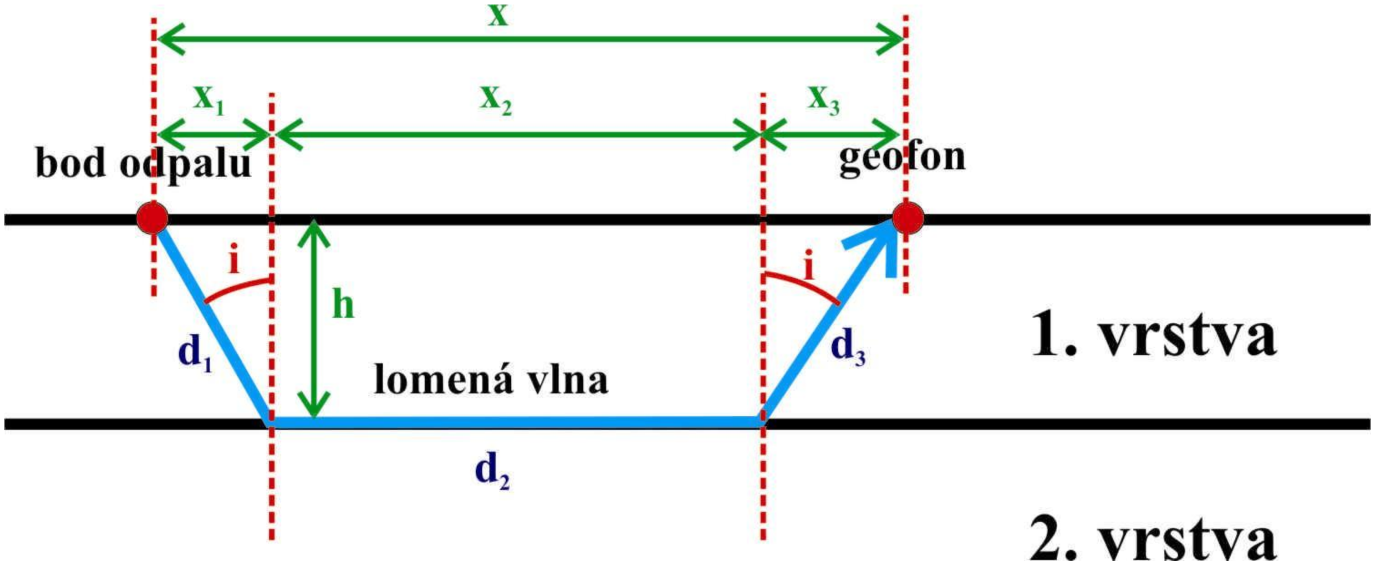
Pro úsek d_1 platí:

$$\cos(i) = \frac{h}{d_1} \Leftrightarrow d_1 = \frac{h}{\cos(i)}$$



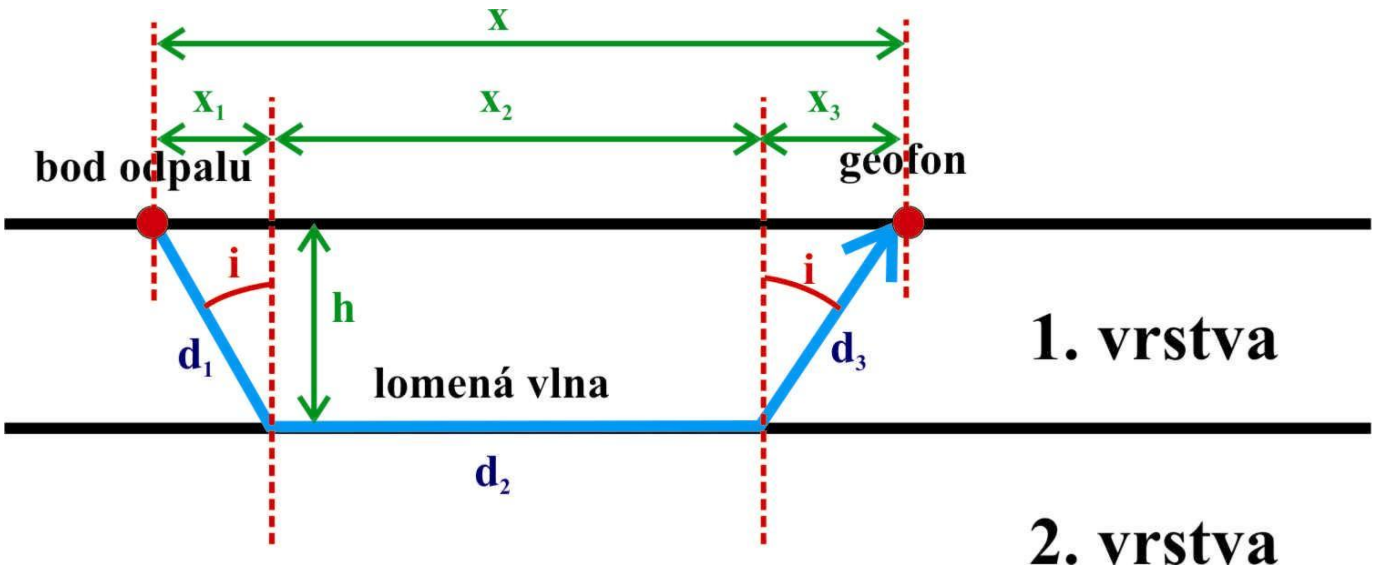
Totéž platí pro úsek d_3:

$$d_3 = d_1 = \frac{h}{\cos(i)}$$



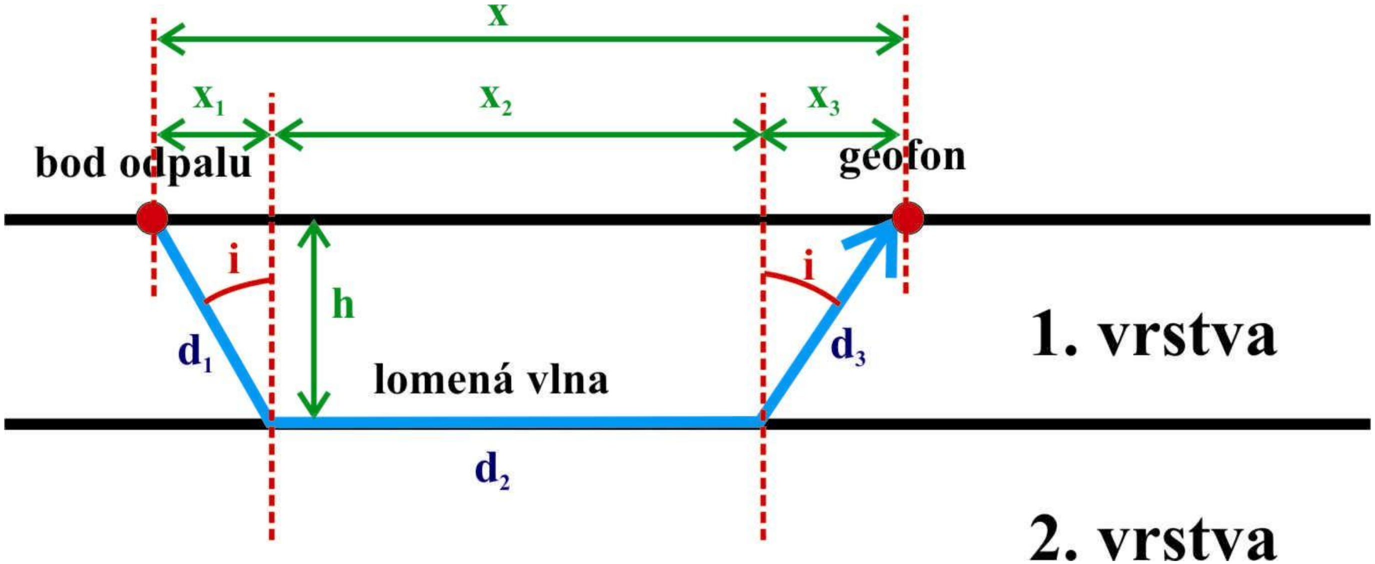
Pro úsek d_2 platí: $$d_2 = x_2 = x - (x_1 + x_3)$$

Protože $x_1 = x_3$ platí: $$d_2 = x - (2x_1)$$



Pro úsek x_1 platí:

$$tg(i) = \frac{x_1}{h} \Leftrightarrow x_1 = h.tg(i)$$

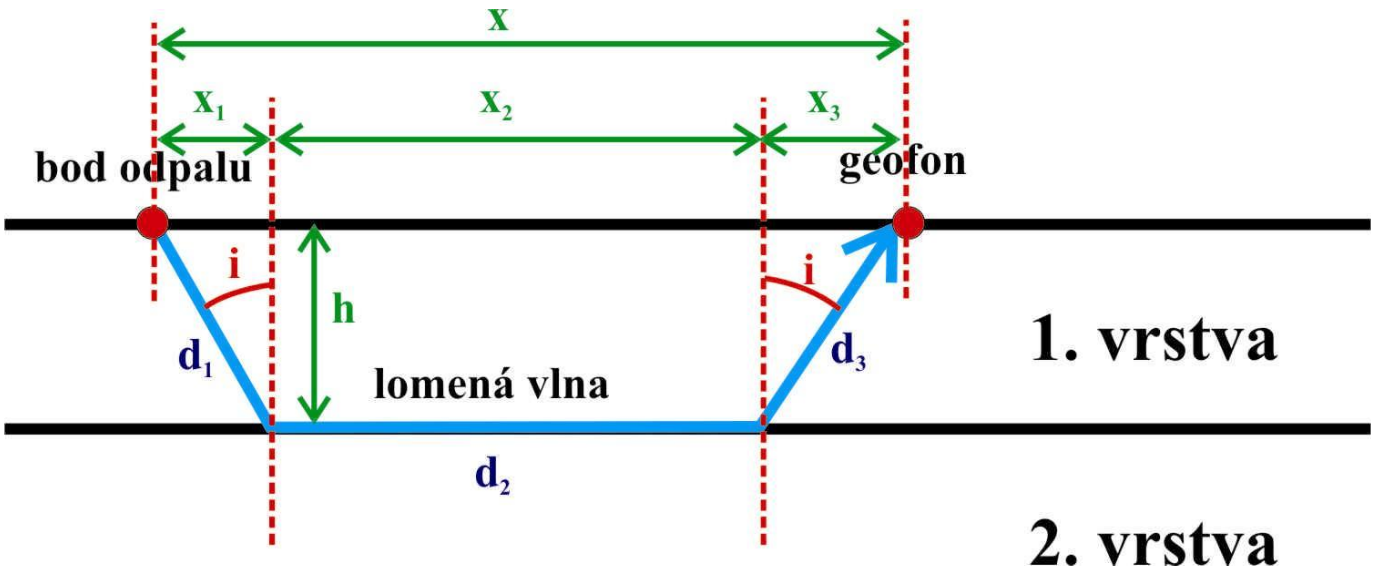


Tedy, pro úsek d_2 platí:

$$d_2 = x - (2x_1)$$

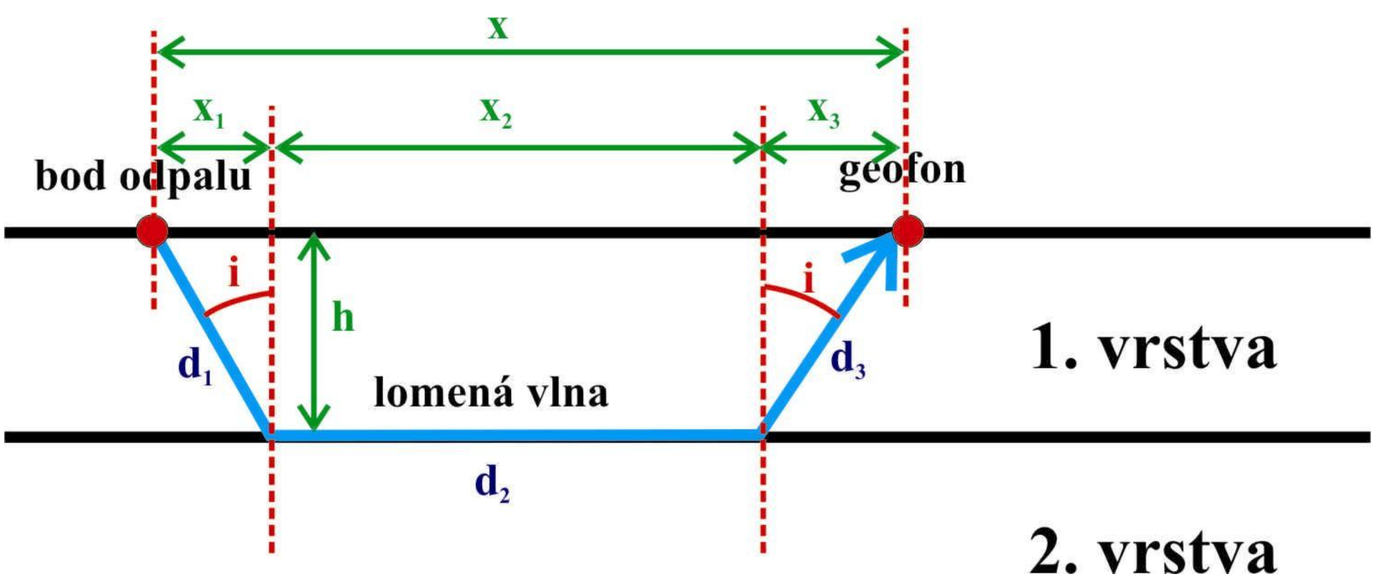
$$d_2 = x - (2.h.tg(i))$$

$$tg(i) = \frac{x_1}{h} \Leftrightarrow x_1 = h.tg(i)$$



Přitom drahami d_1 a d_3 se signál šíří rychlostí v_1, dráhou d_2 se signál šíří rychlostí v_2. Pro čas detekce t tedy platí:

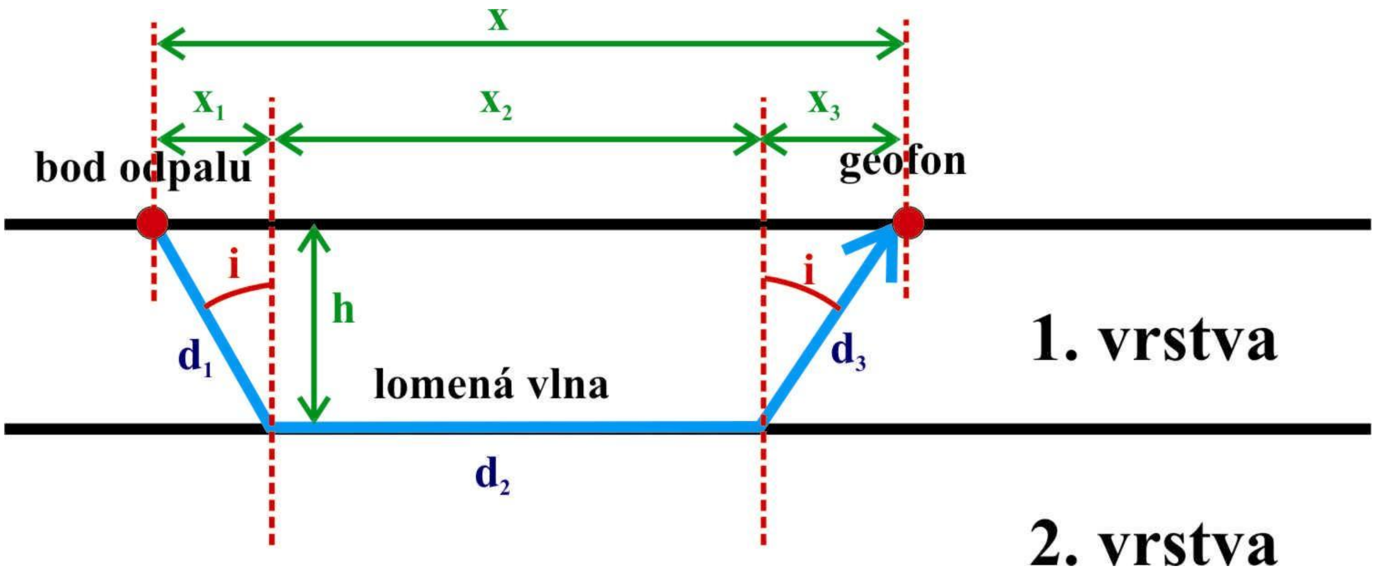
$$t = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_1} \qquad d_1 = d_3 \Leftrightarrow t = \frac{2.d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}$$



Tedy:

$$d_1 = \frac{h}{\cos(i)} \qquad d_2 = x - (2.h.tg(i))$$

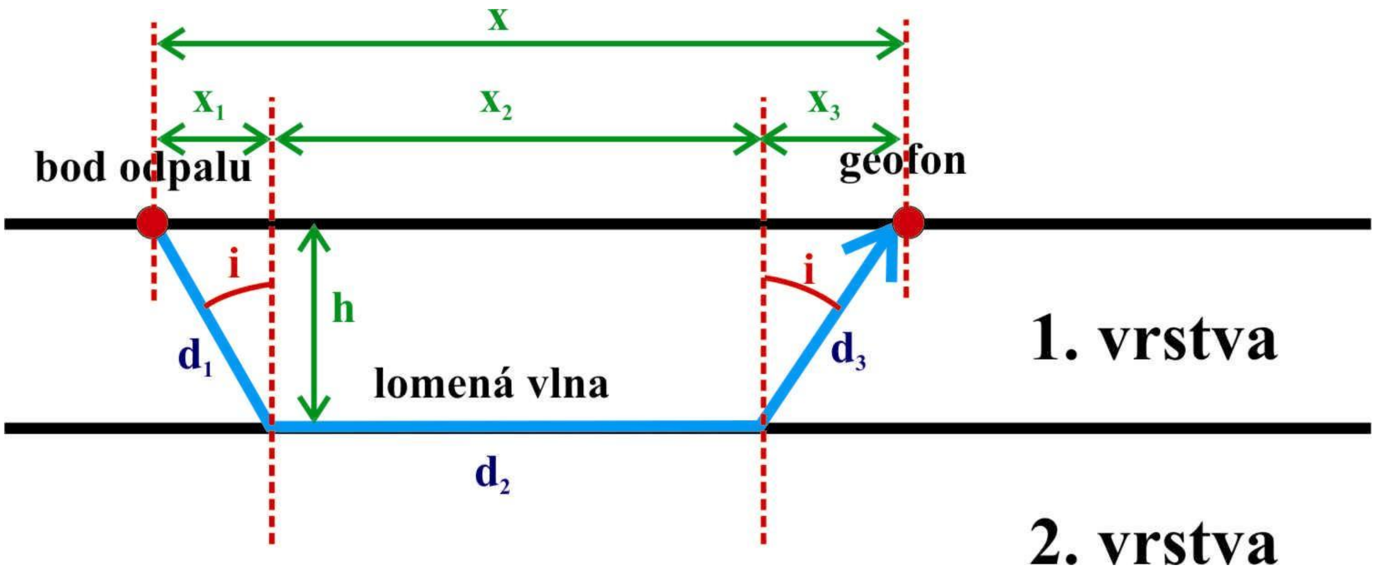
$$t = \frac{2.d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{2.\frac{h}{\cos(i)}}{v_1} + \frac{x - 2.h.tg(i)}{v_2}$$



Tedy:

$$t = \frac{2.\dfrac{h}{\cos(i)}}{v_1} + \frac{x - 2.h.tg(i)}{v_2} =$$

$$= \frac{2.h}{v_1.\cos(i)} + \frac{x}{v_2} - \frac{2.h.tg(i)}{v_2}$$



Ze Snellova zákona víme, že: $\sin(i) = \dfrac{v_1}{v_2}$

$$t = \frac{2.h}{v_1.\cos(i)} + \frac{x}{v_2} - \frac{2.h.\sin(i)}{v_2.\cos(i)} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{2.h}{v_1.\cos(i)} + \frac{x}{v_2} - \frac{2.h.v_1}{v_2^2.\cos(i)}$$

Upravíme:

$$t = \frac{2.h}{v_1.\cos(i)} + \frac{x}{v_2} - \frac{2.h.v_1}{v_2^2.\cos(i)} \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2.h}{\cos(i)}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{v_1}{v_2^2}\right)$$

Pro goniometrické funkce platí:

$$\sin^2(i) + \cos^2(i) = 1 \Leftrightarrow \cos(i) = \sqrt{1 - \sin^2(i)}$$

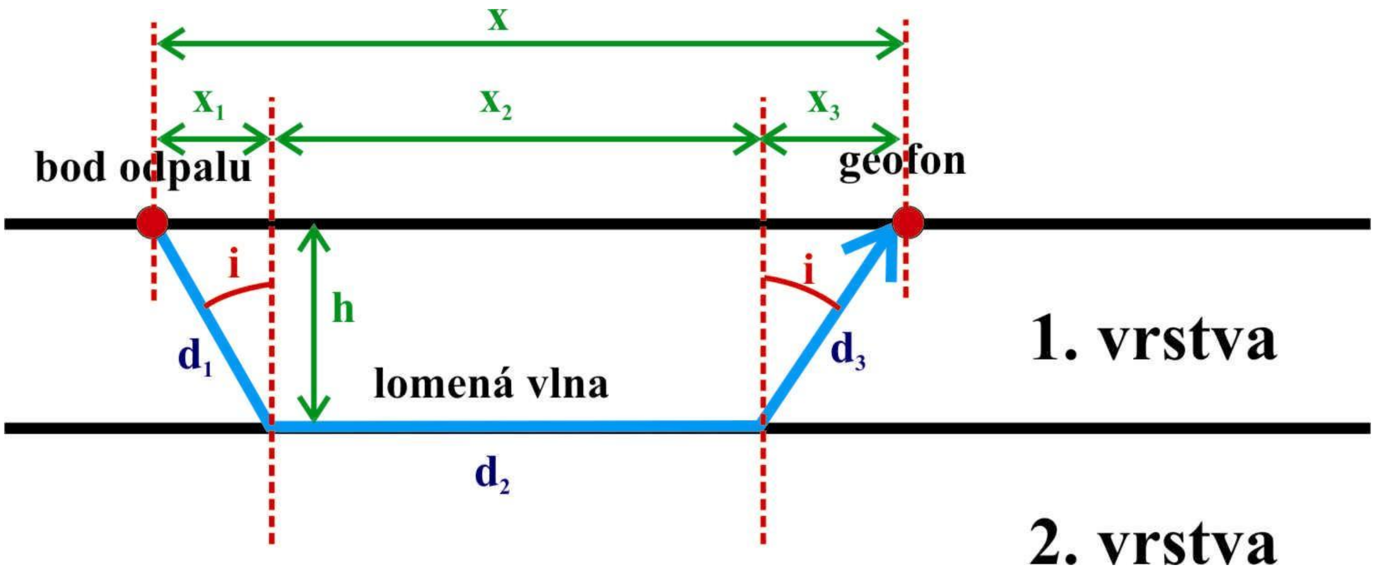
Přičemž: $$\sin(i) = \frac{v_1}{v_2} \Leftrightarrow \cos(i) = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}} \Leftrightarrow \cos^2(i) = 1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

Takže: $$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2.h}{\cos(i)}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{v_1}{v_2^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2.h}{\cos(i)} . \frac{1 - \frac{v_1^2}{v_2^2}}{v_1} = \frac{x}{v_2} + \frac{2.h}{\cos(i)} . \frac{\cos^2(i)}{v_1}$$

Tedy:

$$t = \frac{x}{v_2} + \frac{2.h}{\cos(i)} . \frac{\cos^2(i)}{v_1} \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_2} + 2h\frac{\cos(i)}{v_1}$$



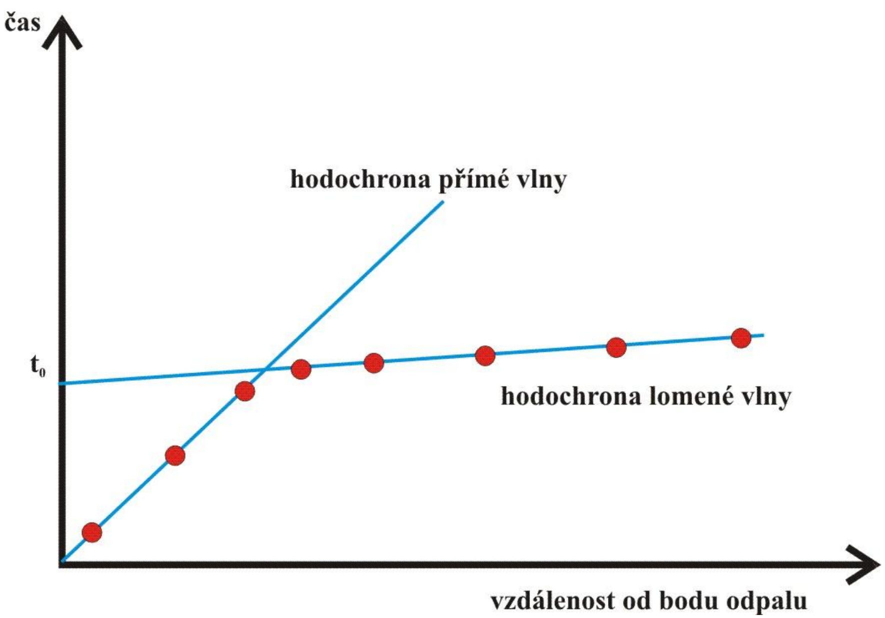
Všimněte si, že vztah:

$$t = \frac{x}{v_2} + 2h\frac{\cos(i)}{v_1}$$

je rovnicí přímky.
Přitom sklon přímky je úměrný rychlosti v_2 a přímka protíná svislou osu v čase t_0, který získáme dosazením x=0:

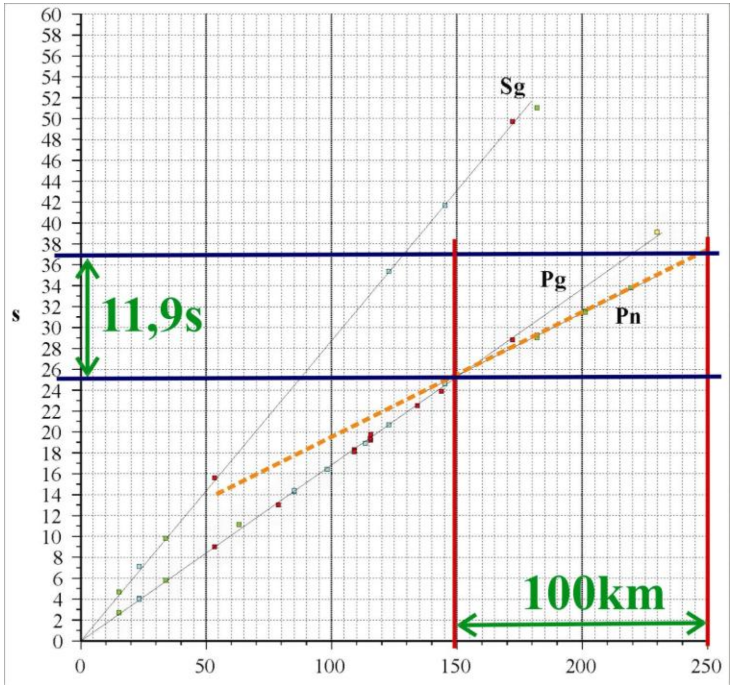
$$t_0 = \frac{0}{v_2} + 2h\frac{\cos(i)}{v_1} \Leftrightarrow$$

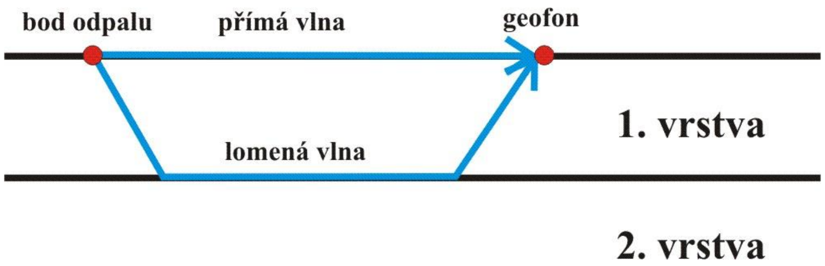
$$t_0 = 2h\frac{\cos(i)}{v_1}$$



Ze sklonu hodochrony lomené vlny tedy můžeme odvodit rychlost v_2:

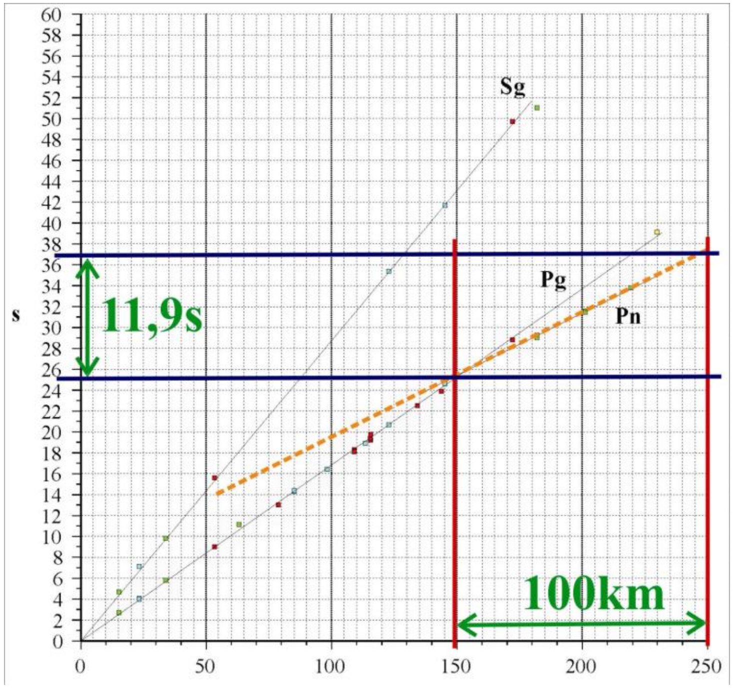
$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100000}{11{,}9} = 8403\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

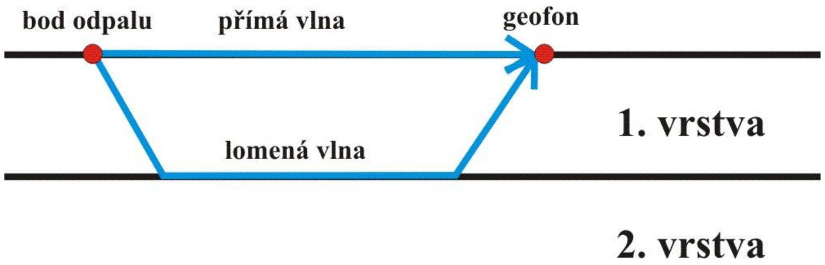


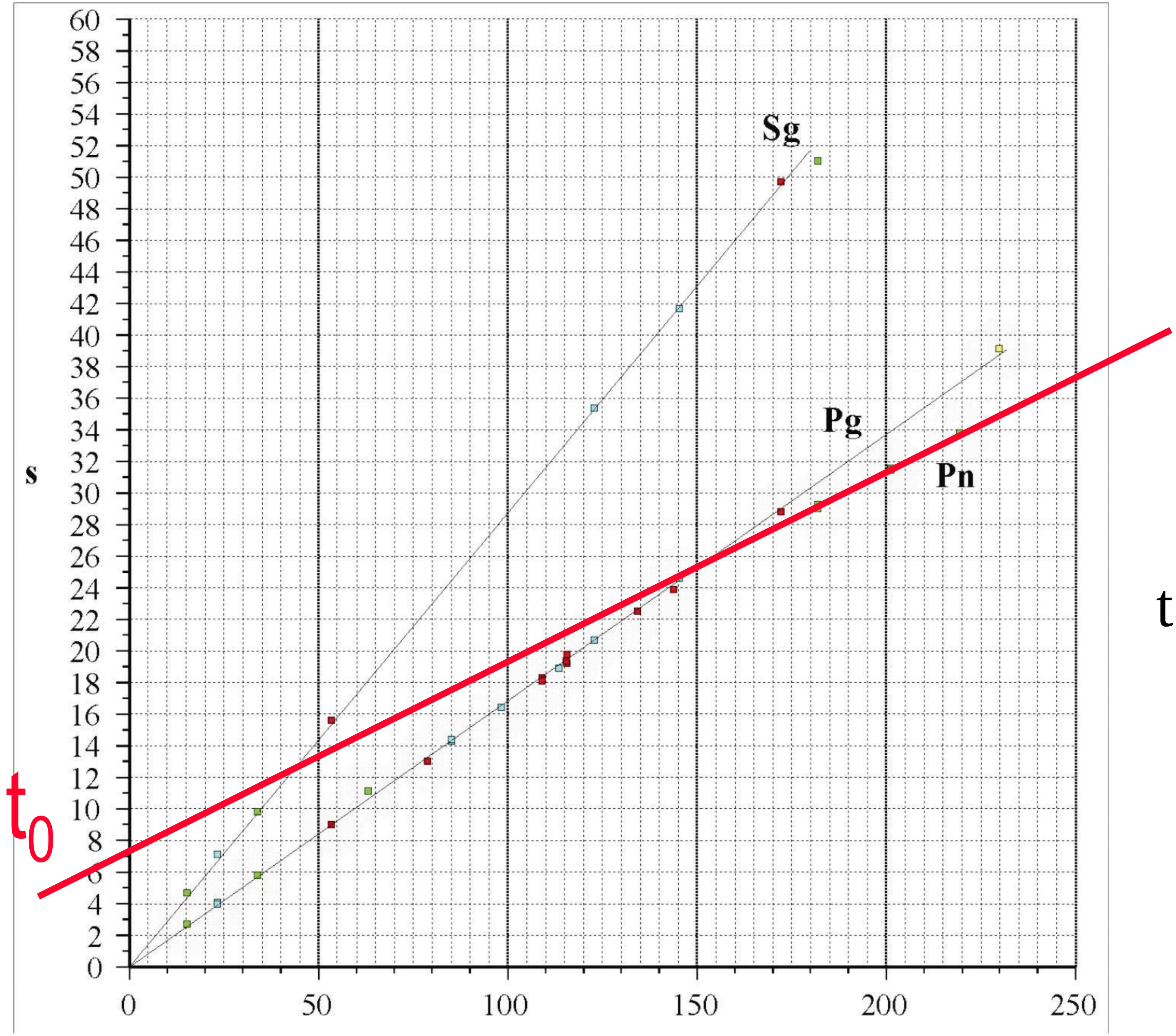


Z času t_0, který odečteme jako průsečík prodloužení hodochrony lomené vlny se svislou osou, můžeme určit hloubku rozhraní mezi první a druhou vrstvou:

$$t_0 = 2h\frac{\cos(i)}{v_1} \Leftrightarrow h = \frac{t_0 v_1}{2\cos(i)}$$





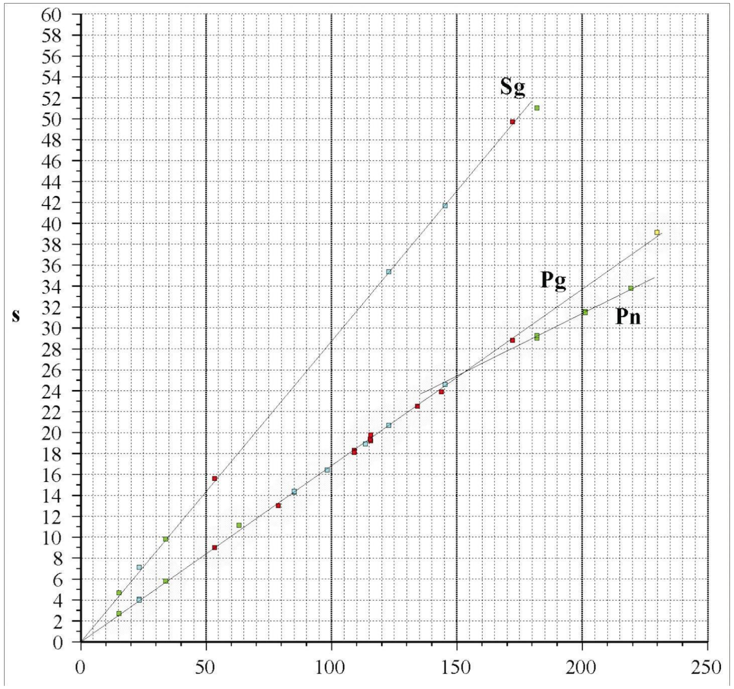


$t_0 = 7{,}5\,\mathrm{s}$

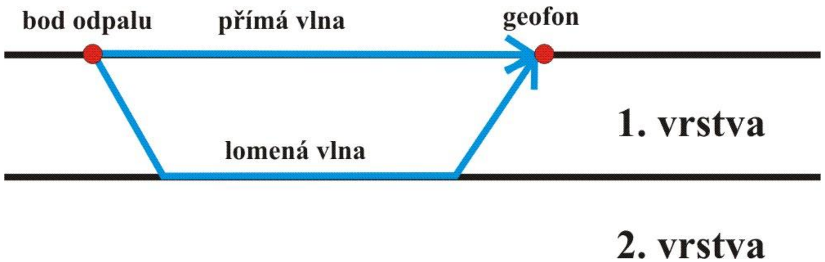
Dosadíme:

$$v_1 = 5935\,\mathrm{m.s^{-1}} \qquad t_0 = 7{,}5\,\mathrm{s}$$

$$h = \frac{t_0 v_1}{2\cos(i)} = \frac{7{,}5 \times 5935}{2\cos(i)}$$



Ještě musíme dopočítat kritický úhel i.



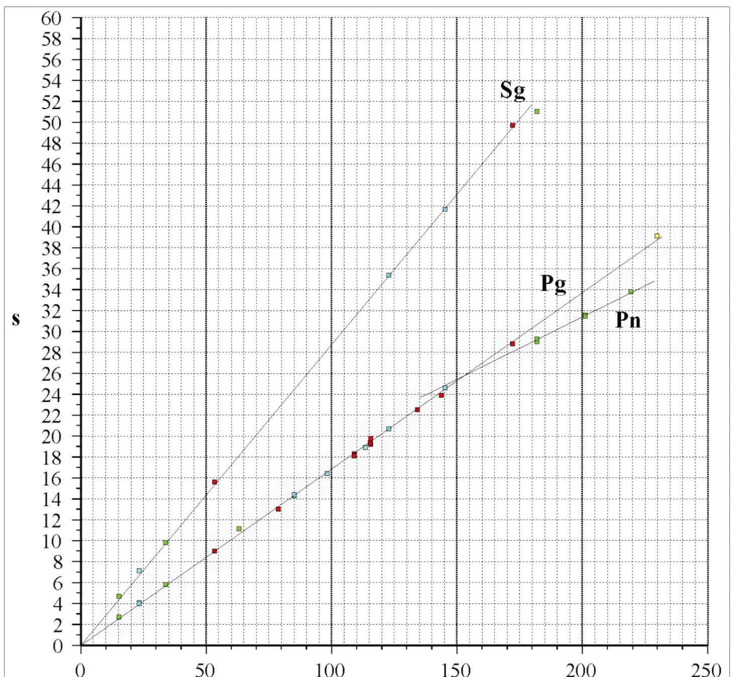
Protože ze Snellova pravidla:

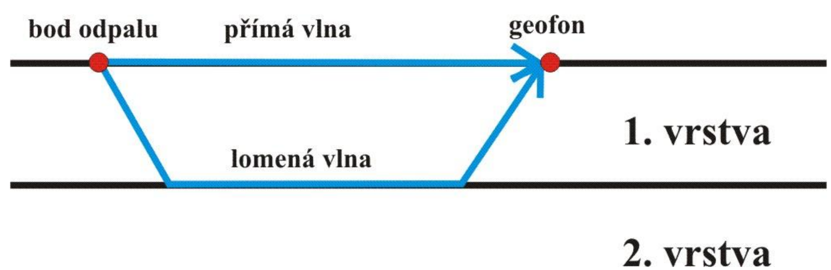
$$i = \arcsin\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$$

$$v_1 = 5935\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

$$v_2 = 8403\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

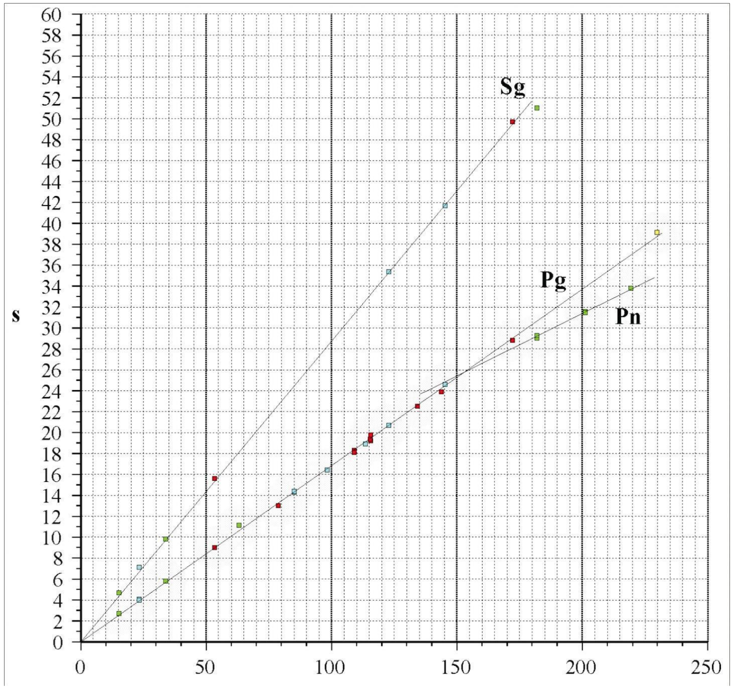
$$i = \arcsin\left(\frac{5935}{8403}\right) \cong 44{,}9^\circ$$

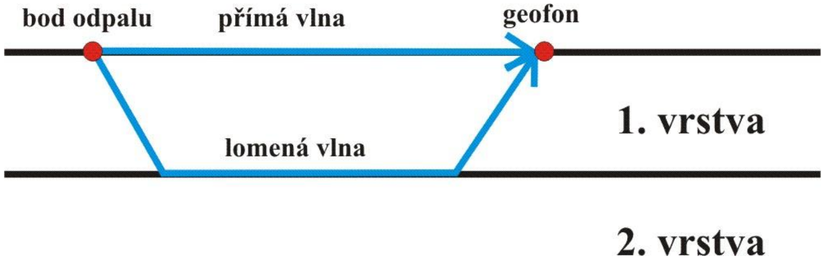




Můžeme tedy dosadit i hodnotu kritického úhlu i:

$$h = \frac{t_0 v_1}{2\cos(i)} = \frac{7{,}5 \times 5935}{2\cos(44{,}9°)} \cong 31{,}4\ \text{km}$$



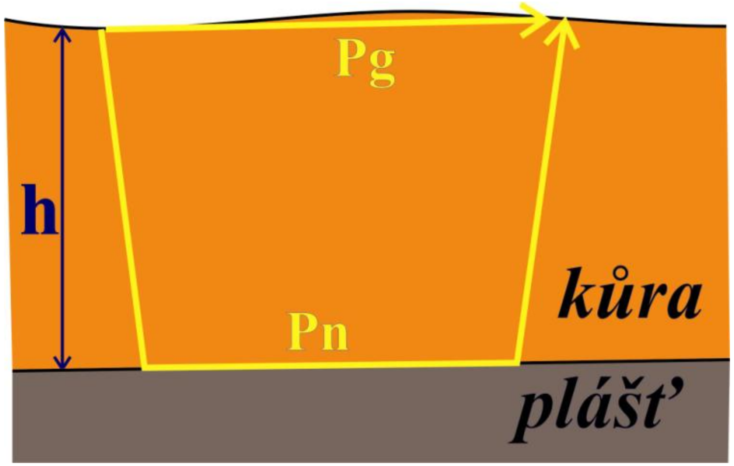


Závěr:

Rychlost přímé vlny Pg = 5935 m.s^{-1}.

Rychlost lomené vlny Pn = 8403 m.s^{-1}.

Mocnost zemské kůry je 31,4 km.



Typy možných praktických otázek pro závěrečný test:

Snellovo pravidlo - obecná aplikace:

Urči úhel, pod kterým se signál bude lámat do druhé vrstvy, jestliže na rozhraní mezi 1. a 2. vrstvou dopadl pod úhlem 25°, rychlost v_1 v 1.vrstvě je 500 m.s^{-1} a rychlost v_2 ve 2. vrstvě je 750 m.s^{-1}.

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} \Leftrightarrow \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{v_2.\sin\alpha_1}{v_1}\right) \cong 39°$$

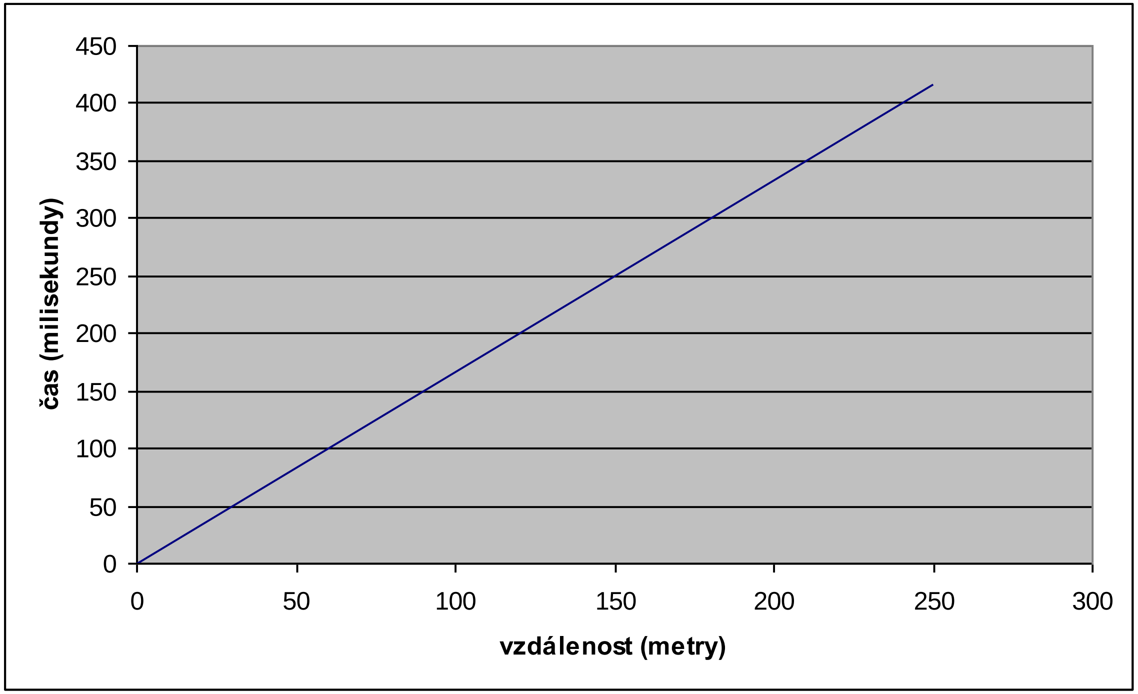
Snellovo pravidlo - lomená vlna:

Urči kritický úhel, pod kterým se signál bude lámat do druhé vrstvy, jestliže na rozhraní mezi 1. a 2. vrstvou dopadl pod úhlem 25°, rychlost v_1 v 1.vrstvě je 500 $m.s^{-1}$ a rychlost v_2 ve 2. vrstvě je 750 $m.s^{-1}$.

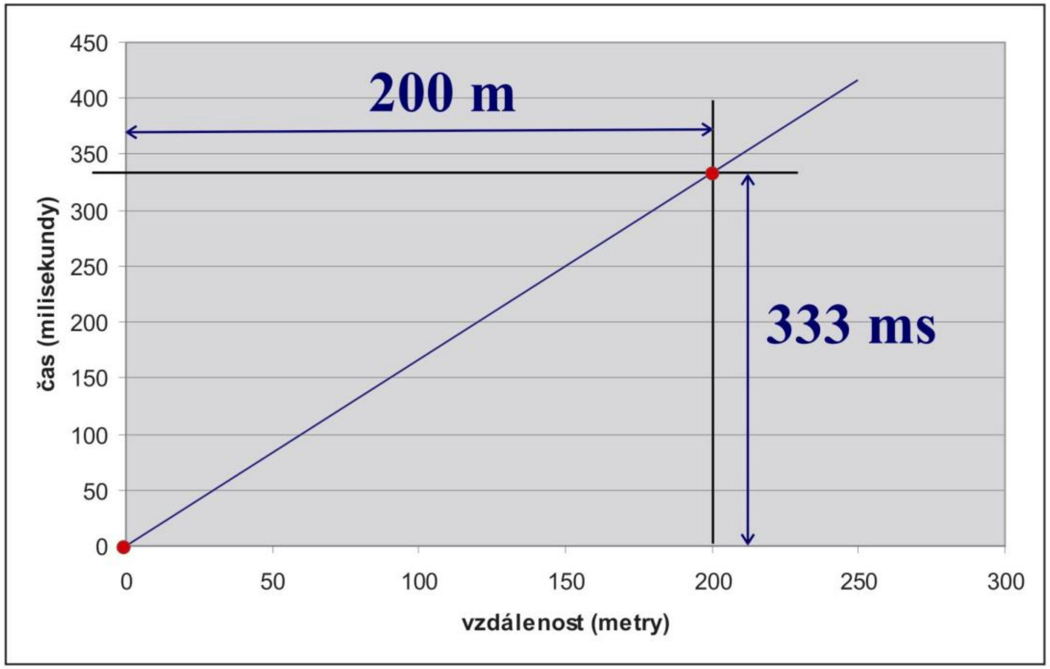
$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} \Leftrightarrow \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{v_2.\sin\alpha_1}{v_1}\right) \cong 39°$$

rychlost přímé vlny:

Urči z hodochrony přímé vlny její rychlost .

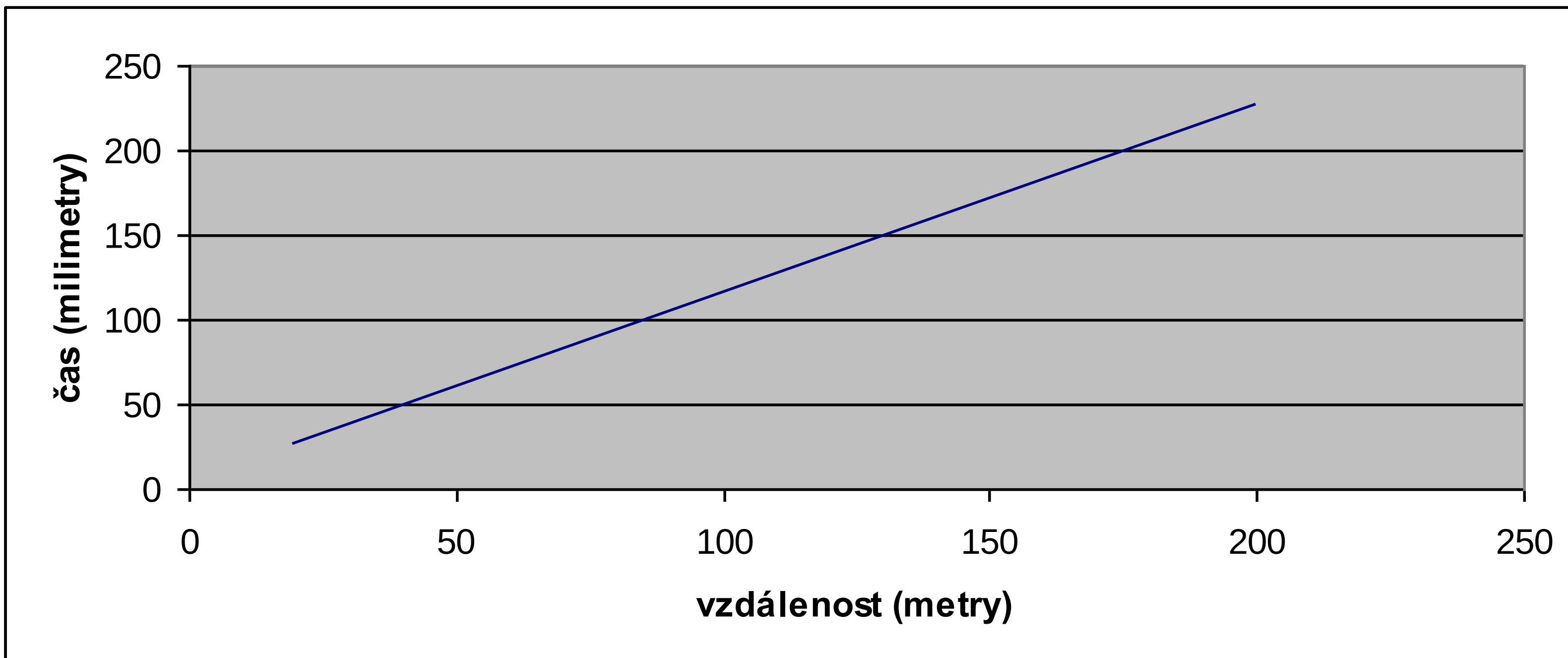


$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}} \cong 600ms^{-1}$$

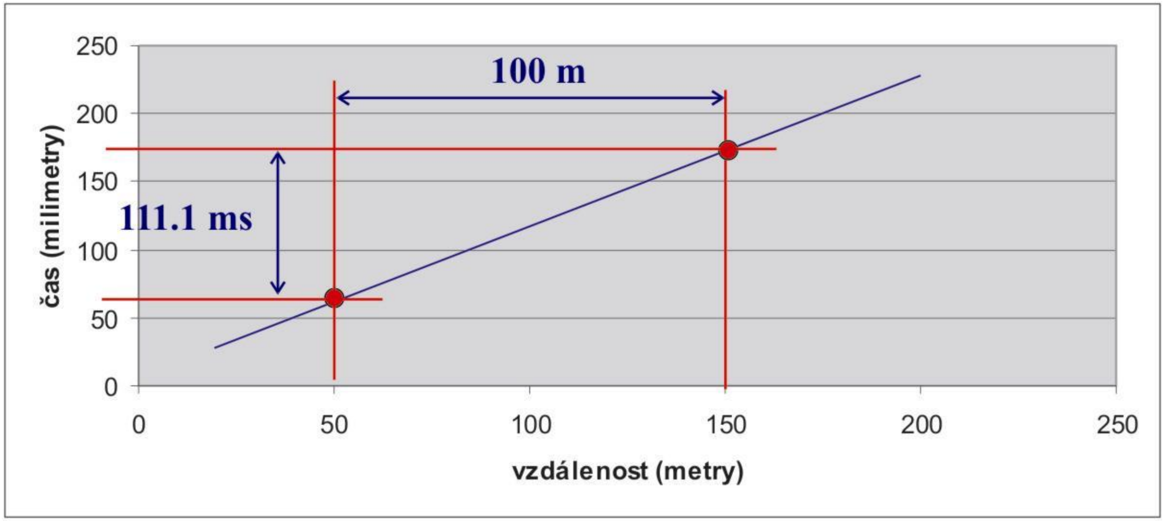


rychlost lomené vlny:

Urči z hodochrony lomené vlny její rychlost .

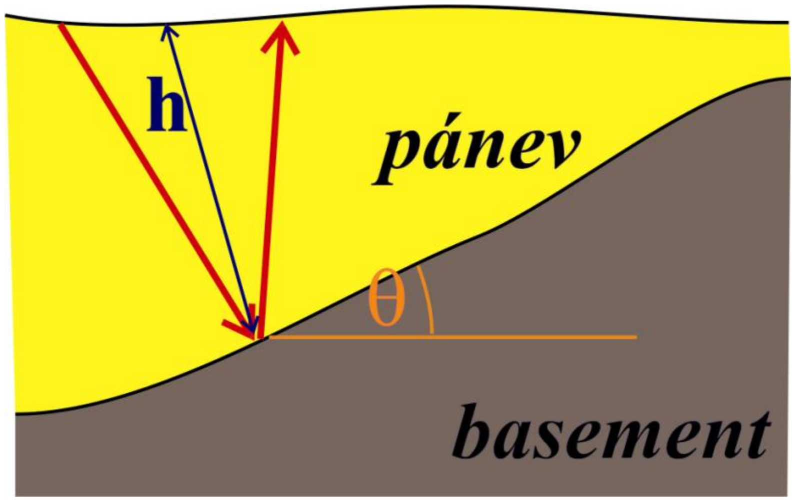


$$v = \frac{d}{t} \cong 900 ms^{-1}$$



PŘÍKLAD 4: HLOUBKA A SKLON ROZHRANÍ Z HODOCHRONY ODRAŽENÉ VLNY (SEISMIKA)

Problém: Na seismickém profilu byl v rámci studia reliéfu podloží sedimentárního bazénu umístěn ve staničení x=0 bod odpalu a v intervalu -400m až +400m byly rozmístěny geofony, které registrovaly čas příchodu vlny odražené od dna bazénu. Chceme určit normálovou hloubku (hloubka kolmo na rozhraní) a úklon dna. Rychlost seismických vln byla 2000 m.s^{-1}.



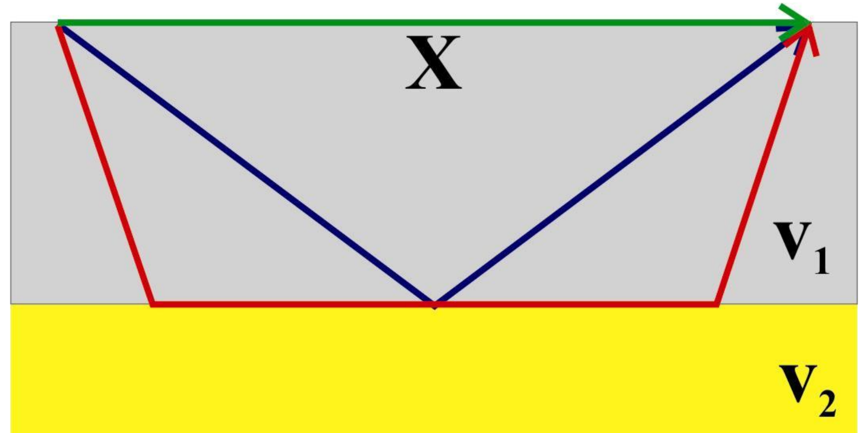
x [m]	t [ms]
-400	432.2
-300	404.0
-200	380.3
-100	362.0
0	350.0
100	344.9
200	346.9
300	356.0
400	371.7

Odražená vlna

V případě vodorovného rozhraní je délka dráhy do místa odrazu stejná, jako délka dráhy z místa odrazu. Z pravoúhlého trojúhelníka snadno odvodíme:

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{2h}{d}$$

kde d je dráha paprsku odražené vlny a α je úhel dopadu

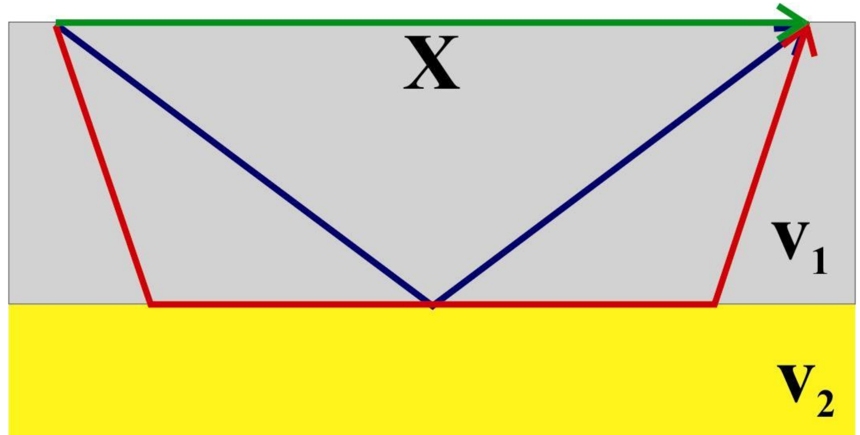


Z obecného vztahu:

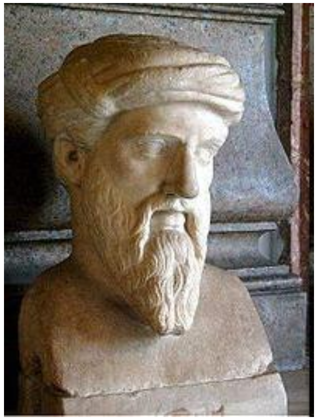
$$t = \frac{d}{v_1} \qquad d = \frac{2h}{\cos(\alpha)}$$

Získáme:

$$t = \frac{2h}{\cos(\alpha)} \frac{1}{v_1}$$



Z Pythagorovy věty plyne:



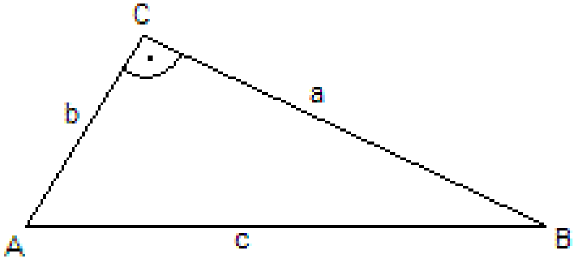
$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow d = 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Leftrightarrow$$

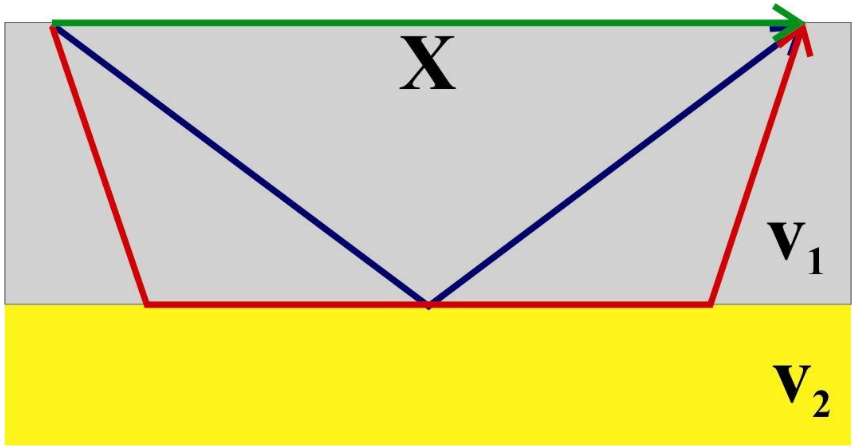
$$d = \sqrt{4h^2 + x^2}$$

Pythagoras ze Samu

(kolem 570 př.n.l.-po 510 př.n.l.)

$$c^2 = a^2 + b^2$$





Takže vztah pro odraženou vlnu:

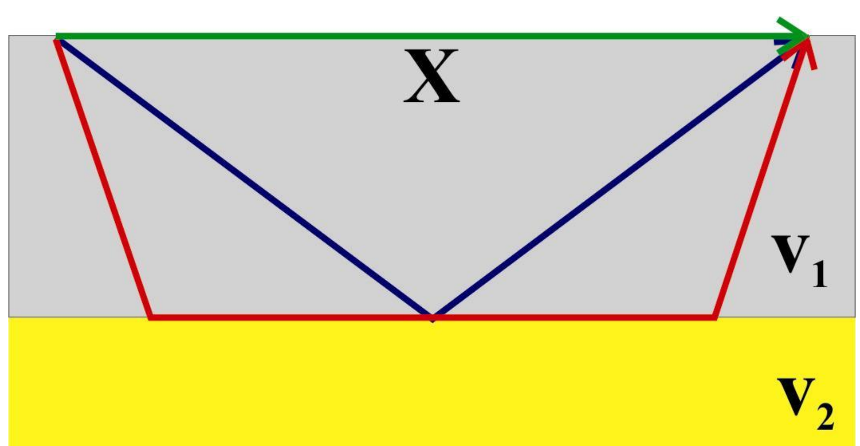
$$t = \frac{2h}{\cos(\alpha)} \frac{1}{v_1}$$

můžeme přepsat také jako:

$$t = \frac{d}{v_1} = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1}$$

$$d = \sqrt{4h^2 + x^2}$$

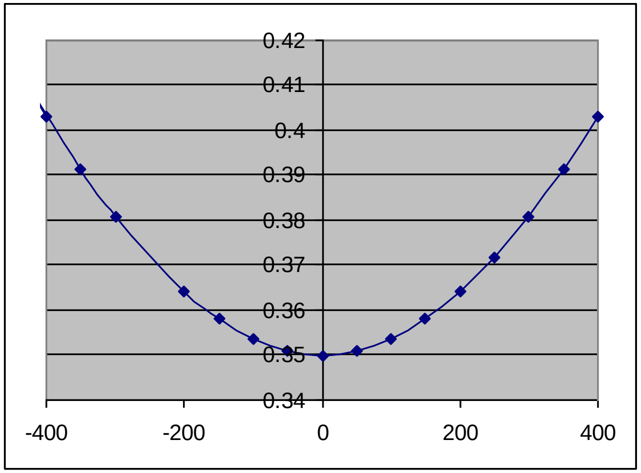
$$\cos(\alpha) = \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + x^2}}$$

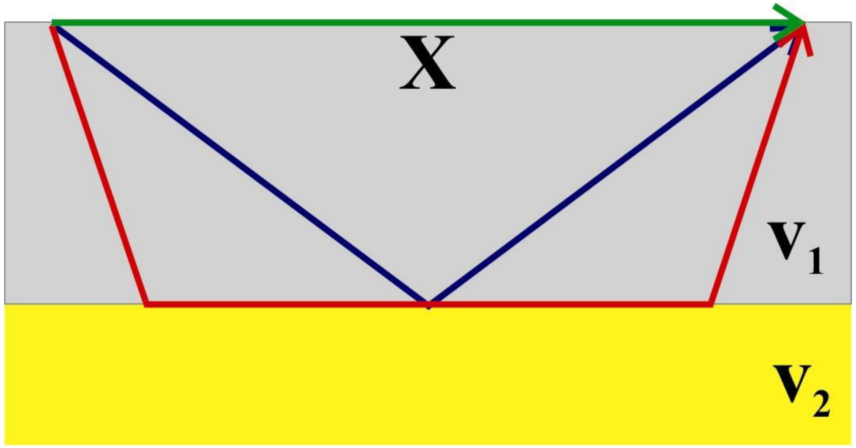


Vztah pro odraženou vlnu není rovnicí přímky!

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1}$$

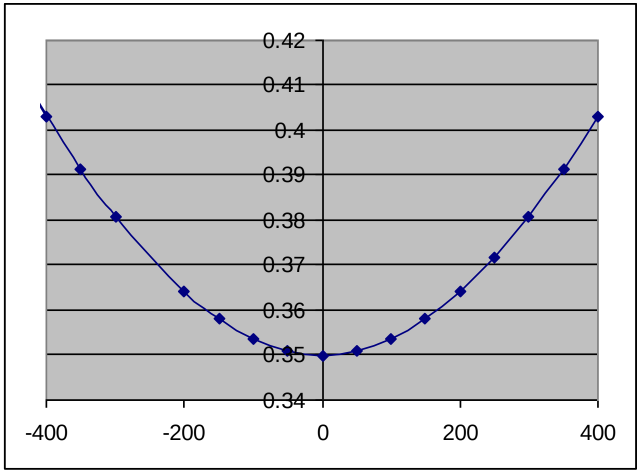
Hodochrona odražené vlny má tvar hyperboly s minimální hodnotou času ve staničení x=0.

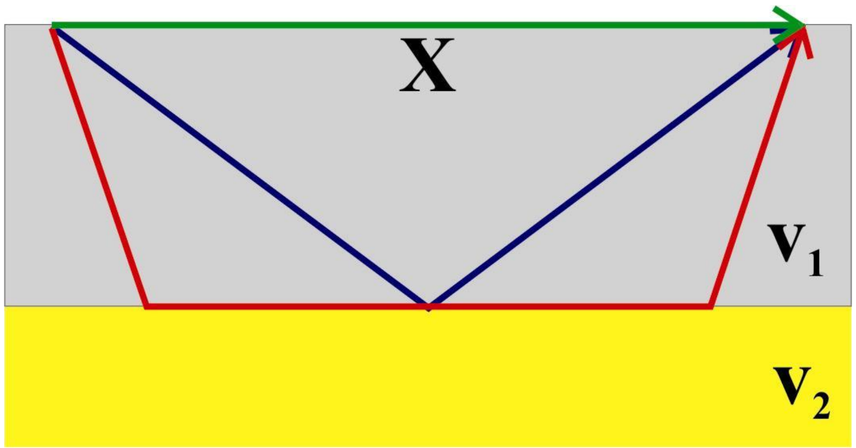




Pro x=0 platí.

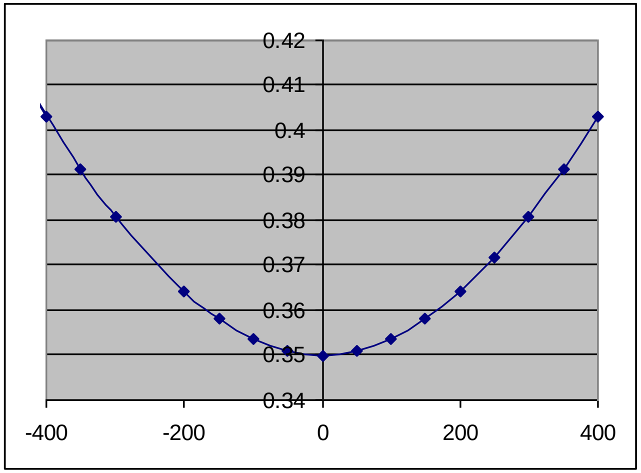
$$t_0 = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1} = \frac{2h}{v_1} \Leftrightarrow h = \frac{t_0 . v_1}{2}$$

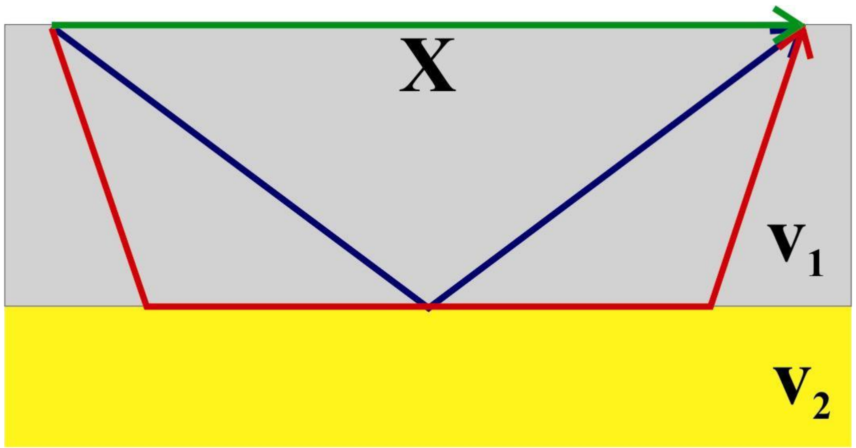




Z časů detekce odražené vlny ve dvou různých staničení (pro jednoduchost vezmeme staničení x=0 a x=x_1) můžeme odvodit:

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{\dfrac{\sqrt{4h^2 + x_1^{\ 2}}}{v_1}}{\dfrac{\sqrt{4h^2}}{v_1}} = \frac{\sqrt{4h^2 + x_1^{\ 2}}}{\sqrt{4h^2}}$$

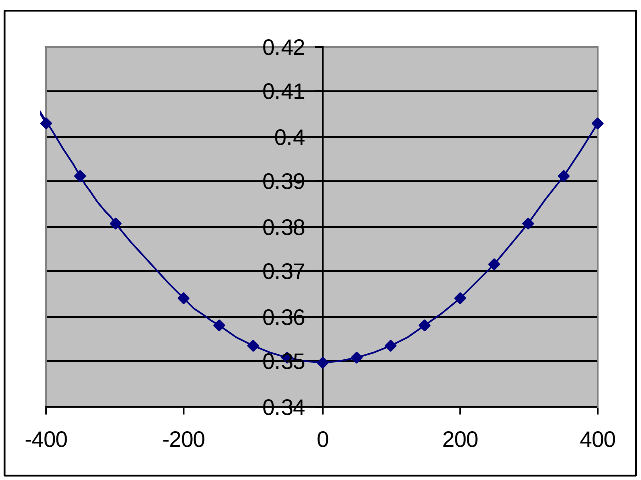


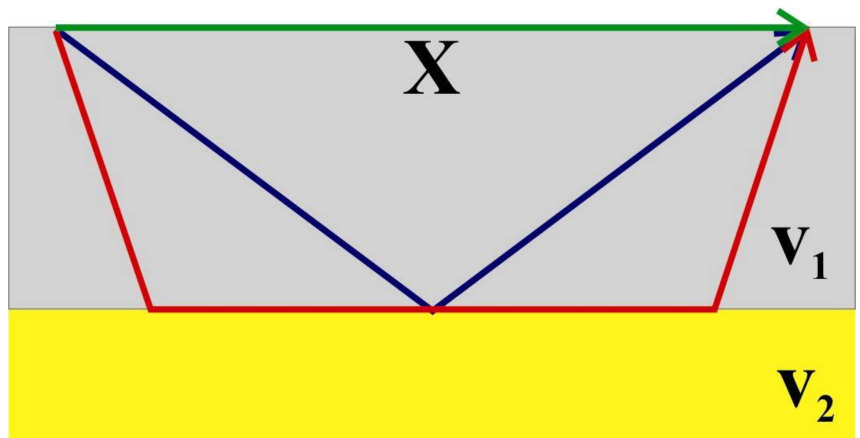


Tedy:

$$\frac{t_1}{t_0}=\frac{\sqrt{4h^2+x_1^{\,2}}}{\sqrt{4h^2}}\Leftrightarrow\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2=\frac{4h^2+x_1^{\,2}}{4h^2}\Leftrightarrow$$

$$4h^2\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2-4h^2=x_1^{\,2}\Leftrightarrow h=\frac{x_1}{2\sqrt{\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2-1}}$$

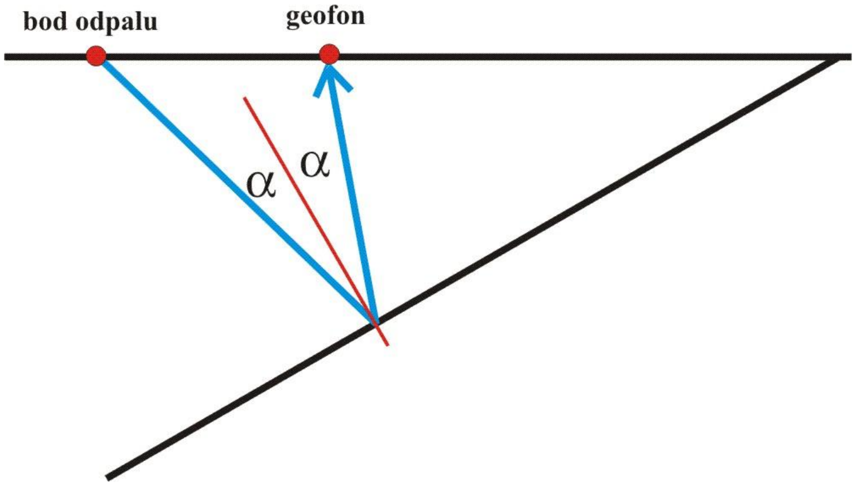




My ale máme ukloněné rozhraní. Vztah pro odraženou vlnu pak nabývá obecnější formy:

$$t = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2 - 4h.x.\sin\theta}}{v_1}$$

kde θ je sklon rozhraní (úhel θ je kladný ve směru stoupání)



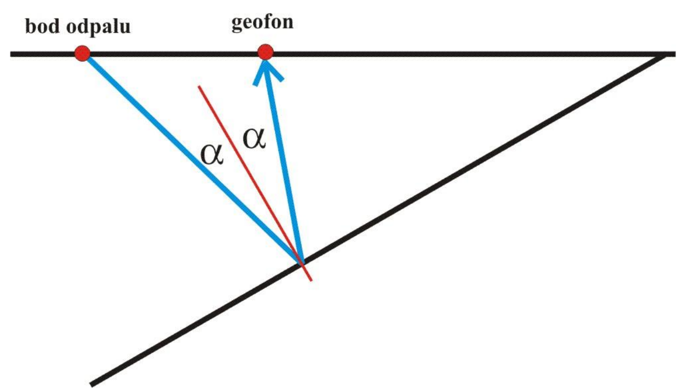
Opět pro x=0 můžeme odvodit:

$$t_0 = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2 - 4h.x.\sin\theta}}{v_1} = \frac{2h}{v_1} \Leftrightarrow h = \frac{t_0.v_1}{2}$$

Tj., víme-li, že rychlost v_1=2000 $m.s^{-1}$:

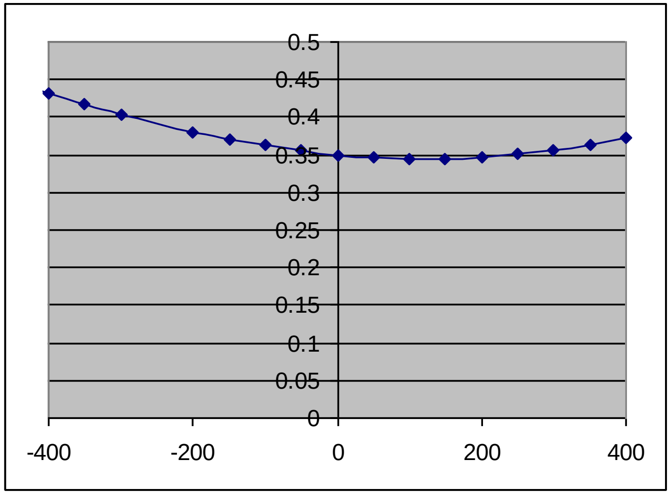
x [m]	t [ms]
-400	432.2
-300	404.0
-200	380.3
-100	362.0
0	350.0
100	344.9
200	346.9
300	356.0
400	371.7

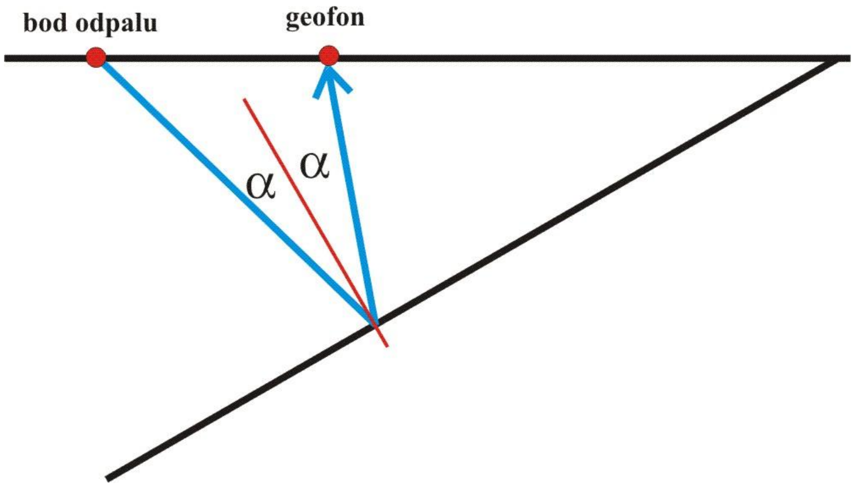
$$h = \frac{t_0.v_1}{2} = \frac{0{,}350 \times 2000}{2} = 350m$$



Obecně opět můžeme časů detekce odražené vlny ve dvou různých staničení (pro jednoduchost vezmeme staničení x=0 a $x=x_1$) odvodit:

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{\dfrac{\sqrt{4h^2 + x_1{}^2 - 4h.x.\sin\theta}}{v_1}}{\dfrac{\sqrt{4h^2}}{v_1}} = \frac{\sqrt{4h^2 + x_1{}^2 - 4h.x.\sin\theta}}{\sqrt{4h^2}}$$

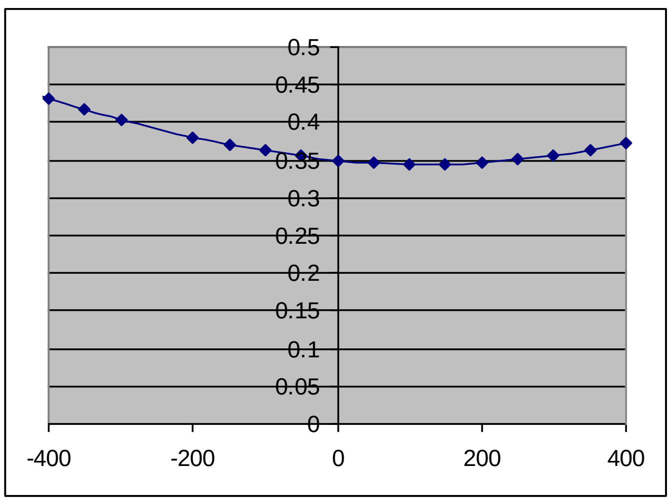


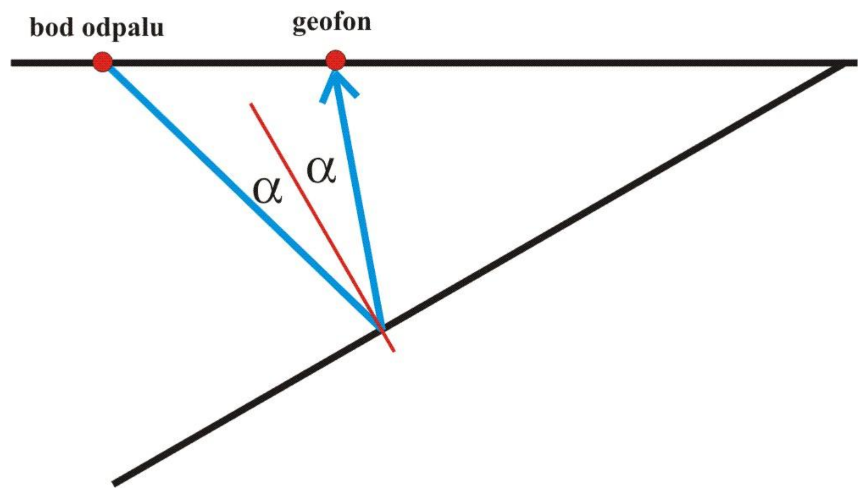


Tedy:

$$\frac{t_1}{t_0}=\frac{\sqrt{4h^2+x_1{}^2-4h.x.\sin\theta}}{\sqrt{4h^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2=\frac{4h^2+x_1{}^2-4h.x.\sin\theta}{4h^2} \Leftrightarrow$$

$$4h^2\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2-1\right)+4h.x.\sin\theta-x_1{}^2=0$$

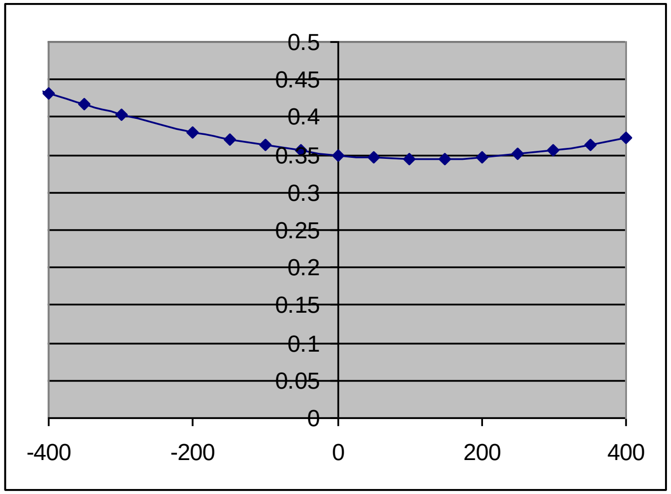


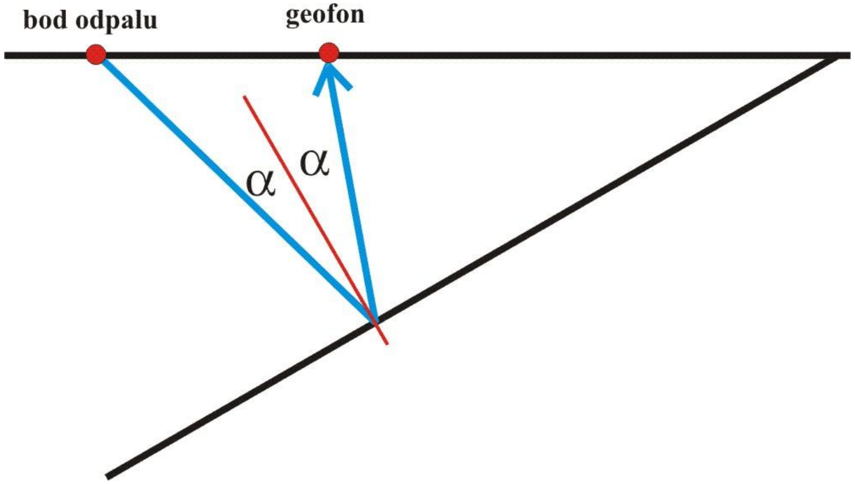


Hloubku již známe, vyjádříme si sklon rozhraní:

$$4h^2\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2-1\right)+4h.x.\sin\theta-x_1{}^2=0\Leftrightarrow$$

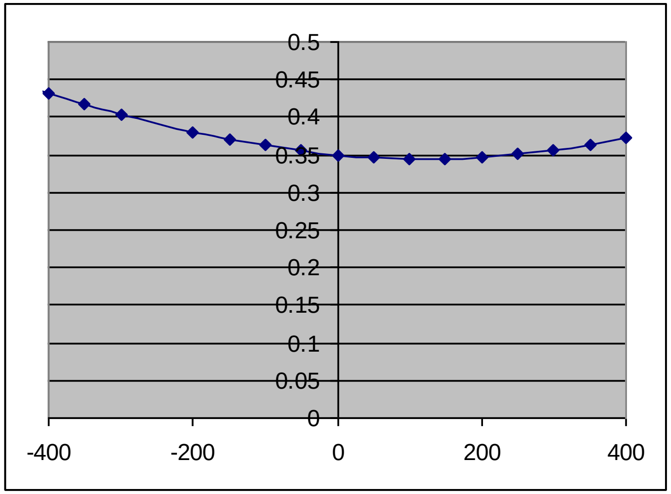
$$\theta=\arcsin\left[\frac{x_1^2-4h^2\left(\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^2-1\right)}{4h.x}\right]$$





Dosadíme hodnoty pro x_0=0 a např. x_1=400:

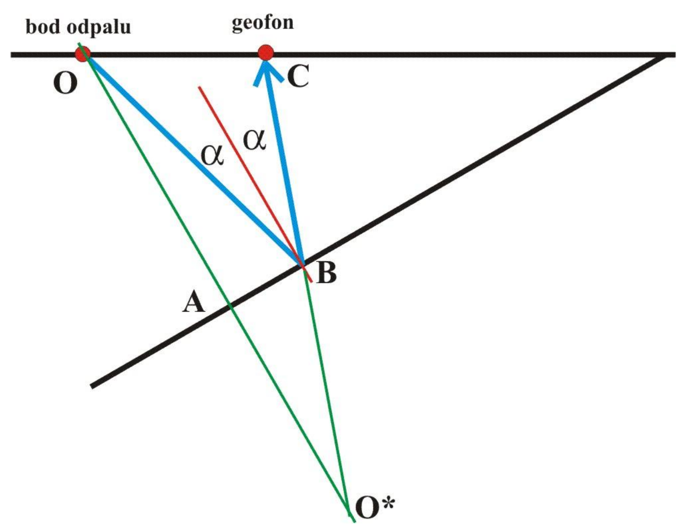
$$\theta = \arcsin\left[\frac{400^2 - 4\times 350^2\left(\left(\frac{371{,}7}{350{,}0}\right)^2 - 1\right)}{4\times 350\times 400}\right] = 10^\circ$$



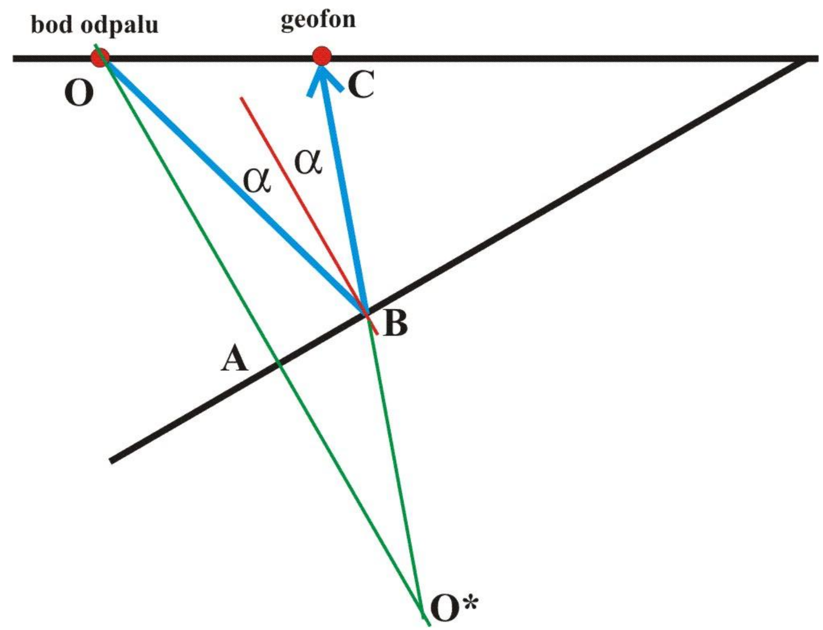
x [m]	t [ms]
-400	432.2
-300	404.0
-200	380.3
-100	362.0
0	350.0
100	344.9
200	346.9
300	356.0
400	371.7

Metoda zásečkek

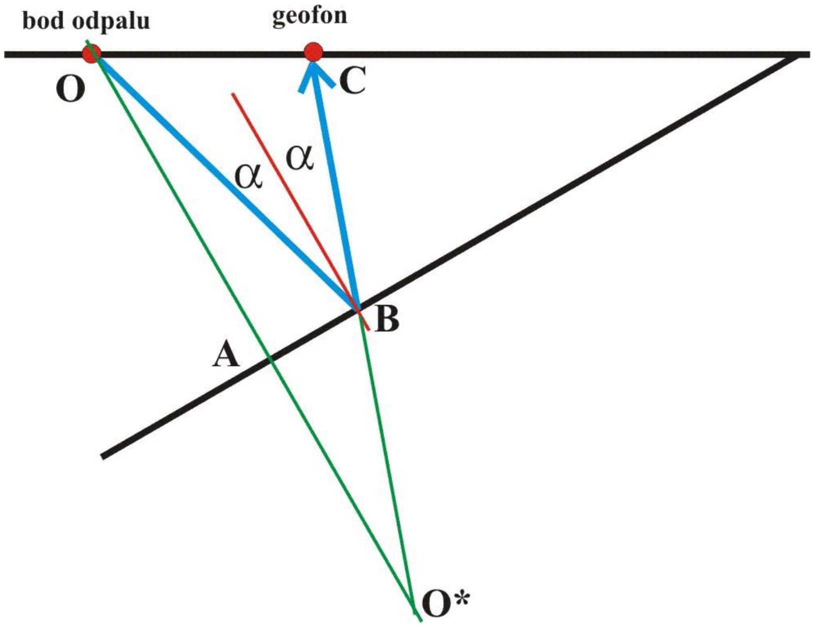
Velmi výhodná je v takovém případě aplikace grafická metody zásečkek, pokud známe rychlost šíření seismické vlny.
Metoda zásečkek spočívá v konstrukci zrcadlového bodu odpalu O*, který leží na kolmici k rozhraní vedené z bodu odpalu O a je stejně vzdálen od rozhraní jako pod odpalu O.



Jak je patrno z obrázku, trojúhelníky ABO a ABO* jsou pak stejné (jen zrcadlově obrácené), protože mají stejné délky dvou stran (AB=AB a AO=AO*) a shodný jeden úhel (OAB=O*AB=90°).



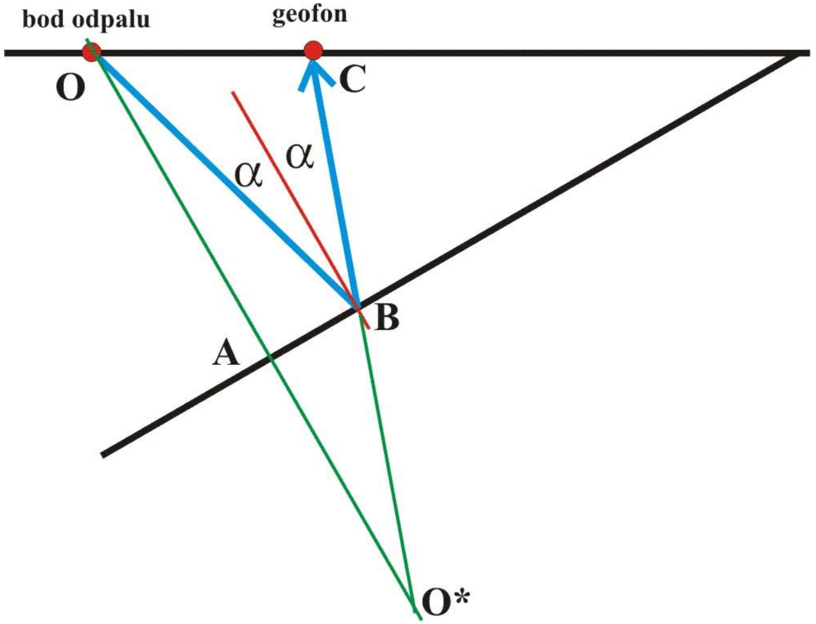
Ze shodnosti trojúhelníků ABO a ABO* plyne také shodnost úhlů ABO=ABO*, přičemž ABO+a=90°.
Pak tedy také ABO*+a=90° a z toho plyne, že linie CBO* není lomená čára, ale (nelomená) úsečka.



Zrcadlový bod odpalu O* tedy leží vůči bodu detekce ve vzdálenosti, která je shodná s délkou dráhy odraženého paprsku.

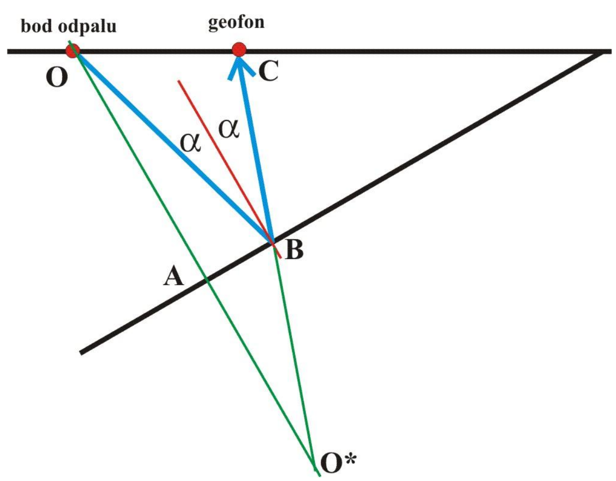
$$d = t.v$$

d … délka dráhy
t … čas detekce
v … rychlost



Rychlost (určena nezávisle) je v našem případě 2000 ms^{-2}.
Časy detekce byly získány z geofonů rozmístěných na seismickém profilu.

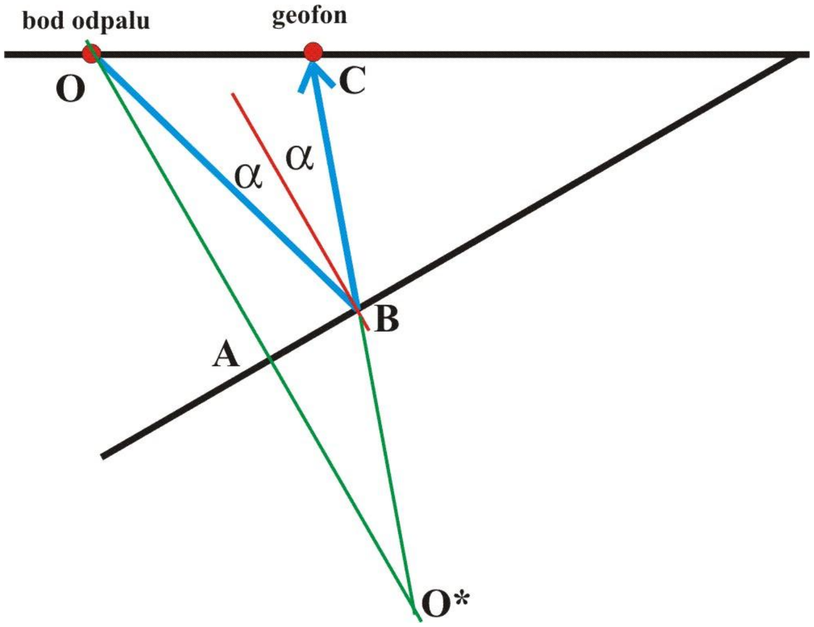
$$d = t.v$$



x [m]	t [ms]	d [m]
-400	432.2	864.4
-300	404.0	808.0
-200	380.3	760.7
-100	362.0	724.1
0	350.0	700.0
100	344.9	689.7
200	346.9	693.8
300	356.0	712.1
400	371.7	743.5

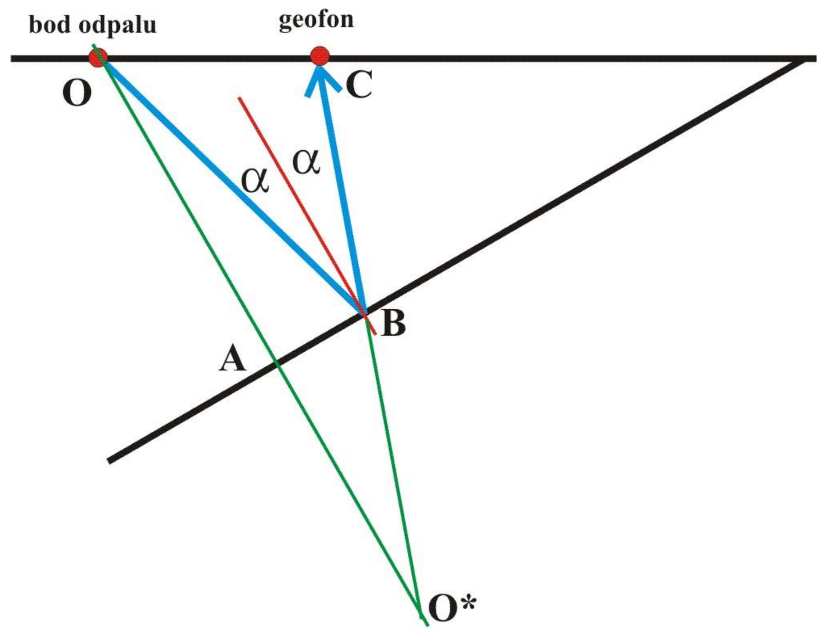
Zkonstruujeme-li v určitém měřítku profil s body, na nichž byly umístěny geofony, pak bod O* leží na kružnicích opsaných těmto bodům s poloměrem odpovídajícím délce dráhy odražené vlny ve zvoleném měřítku.

$$d = t.v$$



Je-li zkonstruován zrcadlový bod odpalu O*, můžeme zkonstruovat také rozhraní, jako přímku kolmou na úsečku OO* a půlící tuto úsečku. Z konstrukce pak snadno odečteme úhloměrem sklon a hloubku rozhraní.

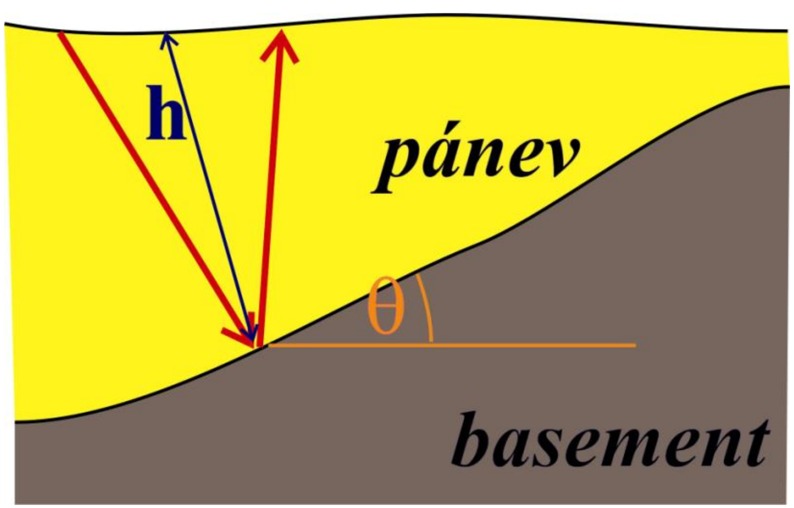
$$d = t.v$$



Závěr:

Dno pánve se nachází v hloubce (kolmo na rozhraní) 350 m.

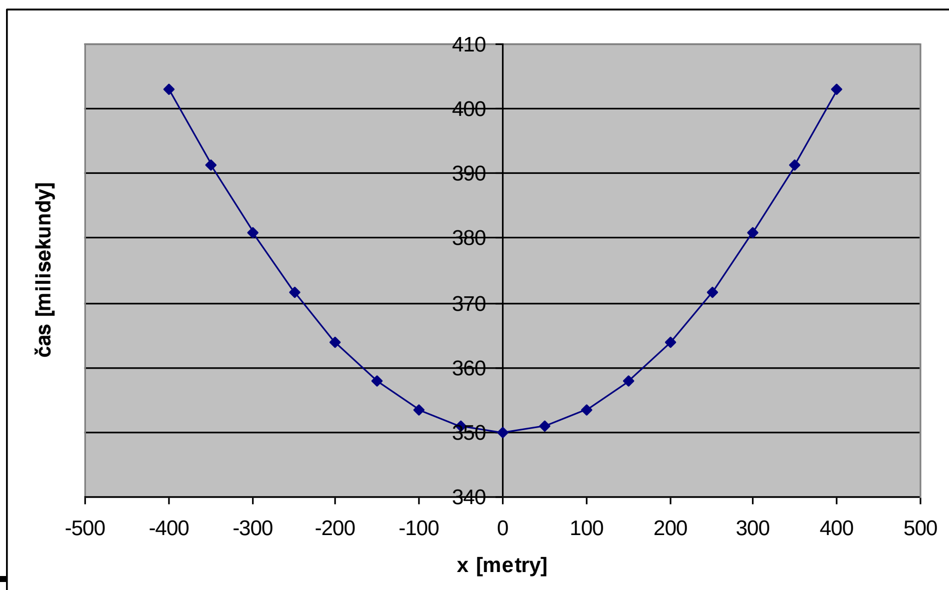
Sklon dna pánve je 10°.



Typy možných praktických otázek pro závěrečný test:

odražená vlna – hloubka rozhraní:

Urči z hodochrony odražené vlny hloubku vodorovného rozhraní, jestliže rychlost odražené vlny je 2000 ms^{-1} a bod odpalu byl na povrchu uprostřed profilu, tj. ve staničení x=0



Pro x=0 platí.

$$t_0 = \frac{\sqrt{4h^2 + x^2}}{v_1} = \frac{2h}{v_1} \Leftrightarrow h = \frac{t_0.v_1}{2}$$

$$h = \frac{t_0.v_1}{2} = \frac{0.350 \times 2000}{2} = 350m$$