

Roman Plch, Petra Šarmanová, Petr Sojka

# Integrální počet funkcí více proměnných

## Interaktivní sbírka příkladů a testových otázek

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 1 z 160

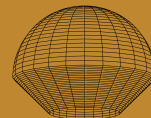


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



# Úvod

Vážený čtenáři,  
dostává se Ti do rukou Multimediální sbírka příkladů z Integrálního počtu funkcí více proměnných. Naším cílem bylo vytvořit interaktivní materiál, který povede k maximálně efektivnímu zvládnutí a procvičení této pro studenty často obtížné partie. Přitom jsme chtěli, aby naše učební pomůcka byla nezávislá na operačním systému, nevyžadovala použití nějakého LMS či instalaci dodatečného softwaru a připojení k Internetu. Z tohoto důvodu jsme jako výstupní formát zvolili PDF.

Formát PDF již několik let dominuje na poli digitálních dokumentů nejen ve vědecké literatuře, ale rozšířil se díky přenositelnosti i mezi širokou veřejnost. Původní myšlenkou pro vznik formátu PDF byla právě přenositelnost textových dokumentů mezi různými platformami, kdy výsledný dokument vypadá na všech platformách i různém hardwaru stejně. Formát PDF se však stále vyvíjí a přináší nové možnosti. Dnes je možné do PDF dokumentů začleňovat animace, video a audio nahrávky či 3D objekty.

Výukový text je zpracován sázecím systémem TeX ve formátu pdf $\LaTeX$ . Vzhledem k tomu, že jde o matematický text obsahující řadu i značně komplikovaných

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 2 z 160

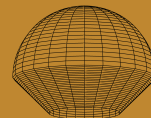


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



vzorců, je použití sázecího systému TeX jedinou rozumnou alternativou. Zaručuje totiž vysokou typografickou kvalitu a snadnou modifikovatelnost textu.

Při vytváření sbírky jsme se snažili o vytvoření uživatelsky příjemného a efektivního výukového prostředí. Student má stále k dispozici ovládací panel, který umožňuje volit mezi celoobrazovkovým režimem a zobrazením v okně, obsahuje tlačítko posuvu o stranu vpřed a vzad, skok na začátek nebo konec dokumentu a posouvání v historii prohlížení. Důležitá je také možnost skoku na konkrétní stranu v textu a na začátek kapitol. Text je přizpůsoben velikosti obrazovky (posuv textu na obrazovce není nutný).

Základním učebním textem, na který je tato sbírka příkladů navázána, je skriptum [2], používané ve výuce jak na MU v Brně, tak na VŠB TU v Ostravě. Text je tvořen pěti kapitolami (Úvod, Dvojný integrál, Trojný integrál, Souhrnné testy a Úlohy na procvičení). Na začátku kapitol Dvojný a Trojný integrál uvádíme shrnutí potřebné teorie, následuje několik podrobně vyřešených úloh, které jsou ilustrovány interaktivní 3D grafikou.

## Interaktivní 3D grafika

Vhodně vytvořená a okomentovaná grafika přispívá k pochopení probírané problematiky a rozvoji geometrické představivosti studentů. Ilustrační grafiku lze použít k objasňování nového teoretického pojmu či závislosti daného jevu na parametrech, k dokreslení geometrického významu řešených úloh a případně k ověření „reálnosti“ řešení. Jedním z možných dělení grafiky je na grafiku statickou a dynamickou. Mezi statickou grafiku počítáme jakékoliv obrázky, s nimiž nemůžeme dále manipulovat. Interaktivní grafika nám naproti tomu umožňuje aktivně pracovat s objektem, např. prohlédnout si ho ze všech stran, zvětšovat a zmenšovat, zobrazit

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 3 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

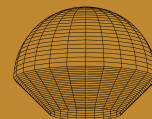
detail vybrané části, zobrazit normálové vektory, měnit nastavení barev, průhlednost objektu a mnoho dalšího (dle možností zobrazovacího programu). Z tohoto důvodu jsou všechny 3D obrázky ve sbírce v interaktivní podobě.

3D obrázky jsme vytvořili v CAS systému Maple a následně konvertovali do formátu U3D pomocí programu Deep Exploration. 3D objekty ve formátu U3D jsme pak vkládali do PDF dokumentu pomocí pdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xu a balíčku movie15. Technika tvorby interaktivní 3D grafiky a její následné začlenění do PDF dokumentu je podrobně popsána v [9].

Na obrázku 1 vidíte ukázkou interaktivní 3D grafiky. K manipulaci s grafikou je nutné zobrazit 3D Toolbar (je součástí Adobe Readeru). Toolbar se zobrazí kliknutím pravého tlačítka myši na obrázek. Základní možnosti Toolbaru jsou dynamický zoom, posunutí, natočení, změna osvětlení, změna barvy pozadí či skrytí, zobrazení nebo izolování pouze určitých prvků modelu. Možné je rovněž využití různých zobrazovacích módů (Solid, Transparent, Shaded Illustration atd.). Pro korektní zobrazení interaktivní 3D grafiky musíte použít Adobe Reader verze 8.1.1 (a vyšší).

## Interaktivní testy

K důkladnému procvičení studované problematiky jsme do každé kapitoly začlenili interaktivní testové otázky (přímo do textu za testované učivo) a na závěr několik souhrnných testů (kapitola Souhrnné testy). Protože rozeznávání ploch, které ohraničují integrační obor, je nezbytné pro úspěšné zvládnutí trojného integrálu, zařadili jsme i testové otázky na rozeznávání množin bodů v prostoru. Kapitola Úlohy na procvičení je tvořena výpočetními příklady, u kterých si je možno pomocí testového prostředí zkontrolovat správnost výsledku.



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 4 z 160

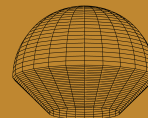


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 5 z 160



Zpět

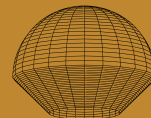
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

obr. 1 Grafický objekt ve formátu U3D

Tyto testové otázky byly vytvořeny pomocí kolekce L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xových maker AcroT<sub>E</sub>X (více např. v [4] a na webových stránkách [13]). Během práce s těmito makry jsme narazili na některé chyby, zejména při použití otázky s více správnými odpověďmi.



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 6 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

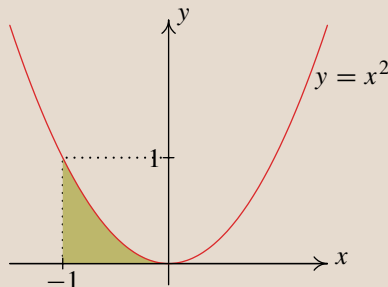
Tyto chyby byly po korespondenci s autorem maker profesorem D. P. Story následně opraveny.

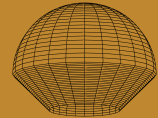
Následující test ukazuje použité typy testových otázek a slouží k vyzkoušení práce s testy. Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacatek testu“.

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

### Ukázkový test

1. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvýrazněná na obrázku.





Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 7 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

$$\int_0^{x^2} \left( \int_{-1}^0 f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^{x^2} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_1^{x^2} \left( \int_{-1}^0 f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

2. (4b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace

u integrálu:  $\int_0^2 \left( \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx,$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-y^2}+1}^{-\sqrt{1-y^2}+1} f(x, y) dx \right) dy$$

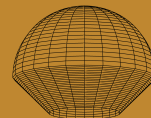
$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}-1}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}+1}^{\sqrt{1-y^2}+1} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2}-1}^{\sqrt{1-y^2}-1} f(x, y) dx \right) dy$$

3. (2b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_1^4 \left( \int_{-2}^3 x^2 y dy \right) dx =$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 8 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

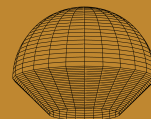
Procento úspěšnosti:

Pro ukončení testu je třeba kliknout na tlačítko „Konec testu“. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“, správné odpovědi budou označeny zeleně a červeně budou označeny odpovědi chybné. Při použití otázky s tvořenou odpovědí se správná odpověď zobrazí v rámečku umístěném vpravo dole v navigačním panelu po kliknutí na tlačítko „Odpověď“.

Pro zápis matematických výrazů v otázkách s tvořenou odpovědí používejte následující syntaxi.

- Základní matematické operace zapisujte takto: + sčítání (př.:  $x+1$ ), - odčítání (př.:  $x-1$ ), \* nebo mezera pro násobení (př.:  $3*x$  nebo  $3x$  nebo  $3\_\square x$  pro  $3x$ ) a / pro dělení a zlomky (př.:  $1/x$  pro  $\frac{1}{x}$ )
- Mezery jsou před zpracováním odpovědi odstraněny. Při násobení čísel tedy musíte napsat explicitně \*.
- Pro zapsání mocniny využijte symbol ^ a exponent uzavřete do libovolných závorek (př.:  $x^{(-2)}$  pro  $x^{-2}$ ).
- Pořadí operací definujete uzavřením jednotlivých operací do závorek, je možné používat i hranaté nebo složené závorky (př.:  $(\sin(x))^{(2)}$  pro  $(\sin(x))^2$ ).
- Odmocninu zapíšete pomocí sqrt a odmocněnec umístíte do závorek (př.: sqrt(x) pro  $\sqrt{x}$ ), pro odmocninu můžete také použít zápis (př.:  $x^{(1/3)}$  pro  $\sqrt[3]{x}$ ).





- Základní funkce zapisujte takto:  
 $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\tan(x)$ ,  $\cot(x)$ ,  $\sec(x)$ ,  $\csc(x)$ ,  $\operatorname{asin}(x)$ ,  
 $\operatorname{acos}(x)$ ,  $\operatorname{atan}(x)$ ,  $\ln(x)$ .
- Exponenciální funkci  $e^x$  zapisujte  $\exp(x)$  nebo  $e^x$ .
- Číslo  $\pi$  zapisujte jako  $\pi$  (př.:  $6\pi$  nebo  $6+\pi$  pro  $6 + \pi$ ).
- Absolutní hodnotu zapisujte  $\operatorname{abs}()$  nebo pomocí  $| |$  (př.  $\operatorname{abs}(x)$  nebo  $|x|$  pro  $|x|$ ).

Pokud vaše odpověď není platný matematický výraz, nepočítá se vám chybná odpověď, ale musíte si výsledek opravit.

Všechny 3D obrázky v testech jsou interaktivní. Můžete s nimi otáčet a kliknutím pravým tlačítkem myši můžete vyvolat Toolbar, pomocí něhož je možno využít dalších možností práce s 3D grafikou (změna velikosti, osvětlení, zobrazovacího módu, skrytí, zobrazení nebo izolování pouze určitých prvků modelu, atd.).

Závěrem bychom rádi poděkovali panu doc. RNDr. J. Kubenovi, CSc. za pečlivé přečtení celé sbírky a přípravu metapostových obrázků, studentce Přírodovědecké fakulty N. Jalové za přípravu metapostových obrázků a některých testových otázek.

Tato multimediální sbírka příkladů a testových otázek vznikla za podpory Fondu rozvoje VŠ v rámci řešení projektu č. 92/2008. Pro tvorbu a začlenění interaktivní grafiky do PDF dokumentů jsme navrhli a následně otestovali nový postup, založený na konverzi 3D grafiky z CAS systému Maple. Tento postup byl zdokumentován a následně publikován v [9] a [10]. Zkušenosti s tvorbou multimediálních učebních pomůcek v PDF formátu jsme prezentovali na konferenci Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, příspěvek je možno najít ve sborníku [11].

Brno a Ostrava, srpen 2009

Autoři

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 9 z 160



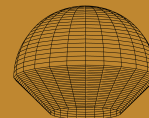
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

# Integrální počet funkcí více proměnných



Dvojný a trojný integrál je zobecněním určitého integrálu funkce jedné proměnné, který funkci jedné proměnné přiřazoval číslo. Toto číslo pak mohlo mít různý geometrický nebo fyzikální význam, např. vyjadřovalo obsah rovinné oblasti, objem rotačního tělesa nebo obsah jeho pláště, hmotnost nebo moment setrvačnosti rotačního tělesa.

Obdobně dvojný integrál bude přiřazovat funkci dvou proměnných definované na rovinné oblasti jisté číslo a trojný integrál bude přiřazovat funkci tří proměnných definované na prostorové oblasti jisté číslo. Toto číslo může mít opět různý geometrický nebo fyzikální význam, např. obsah, objem, hmotnost nebo moment setrvačnosti.

V dalším textu budeme místo o délce, obsahu a objemu nějaké množiny  $A$  často mluvit o míře této množiny a používat označení  $m(A)$ . Abychom rozlišili, zda se jedná o délku, obsah nebo objem, budeme používat index, který odpovídá tomu, v jakých jednotkách (délkových, plošných, objemových) se daná míra měří. Tedy  $m_1(A)$  bude značit délku,  $m_2(A)$  obsah a  $m_3(A)$  objem množiny  $A$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 10 z 160

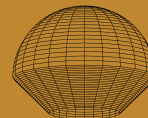


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



# Kapitola 1

## Dvojný integrál

*Dvojný integrál a Fubiniova věta*

↳ Typové řešené příklady

Test

*Transformace dvojného integrálu*

↳ Typové řešené příklady

Test

Úvod

**Dvojný integrál**

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 11 z 160

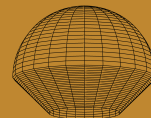


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



## 1.1. Dvojný integrál

Dvojný integrál přiřazuje omezené funkci dvou proměnných definované na nějaké měřitelné množině  $A$  v  $\mathbb{R}^2$  číslo, které může mít v závislosti na konkrétním tvaru integrandu následující geometrický význam:

$\iint_A f(x, y) \, dx dy$  představuje míru  $m_3(S)$  (**objem**) tělesa  $S$ , které je shora ohraničeno nezápornou funkcí  $f(x, y)$  a zdola funkcí nulovou  $g(x, y) = 0$ . Obě funkce uvažujeme na množině  $A$ , tj.  $D(f) = D(g) = A$ .

$\iint_A (f(x, y) - g(x, y)) \, dx dy$ , kde  $f(x, y) \geq g(x, y)$  pro  $[x, y] \in A$ , představuje míru  $m_3(S)$  (**objem**) tělesa  $S$ , které je shora ohraničeno funkcí  $f(x, y)$  a zdola funkcí  $g(x, y)$ . Obě funkce opět uvažujeme na množině  $A$ , tj.  $D(f) = D(g) = A$ .

$\iint_A 1 \, dx dy$  představuje míru  $m_3(S)$  (objem) tělesa  $S$ , které je shora ohraničeno konstantní funkcí  $f(x, y) = 1$  a zdola funkcí nulovou  $g(x, y) = 0$ . Obě funkce uvažujeme na množině  $A$ , tj.  $D(f) = D(g) = A$ . Vzhledem k tomu, že je objem roven součinu obsahu podstavu a výšky, platí

$$\iint_A 1 \, dx dy = m_2(A). \quad (1.1)$$

Tento vztah říká, že číselně je objem tělesa s podstavou  $A$  a výškou rovnou jedné roven **obsahu** množiny  $A$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 12 z 160

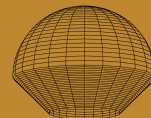


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



## 1.2. Dvojný integrál – Fubiniova věta

Fubiniova věta nám dává návod, jak převést dvojný integrál na dvojnásobný. Převádíme tak výpočet dvojného integrálu na výpočet dvou po sobě jdoucích jedno-rozměrných integrálů.

**Věta 1.1.** (Fubiniova věta v  $\mathbb{R}^2$ ) Nechť je funkce  $f$  dvou proměnných  $x, y$  spojitá na množině  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ , kde  $\varphi, \psi$  jsou funkce spojitě na intervalu  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  pro  $\forall x \in \langle a, b \rangle$ . Pak platí

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx. \quad (1.2)$$

Množinu typu  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$  budeme dále nazývat elementární oblastí vzhledem k  $x$ .

Obdobně množinu typu  $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d; \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$  budeme dále nazývat elementární oblastí vzhledem k  $y$ .

### Typové řešené příklady:

- Převeďte (oběma způsoby) dvojný integrál  $I$  na dvojnásobný a vypočtěte jej.

Příklad 1.1

- Zaměňte pořadí integrace.

Příklad 1.2

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 13 z 160

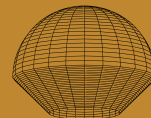


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 14 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

- Vypočítejte dvojný integrál  $\iint_M f(x, y) \, dx \, dy$ .

Příklad 1.3

- Vypočítejte obsah množiny.

Příklad 1.4

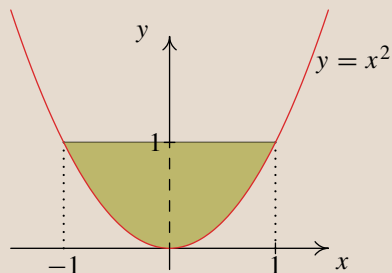
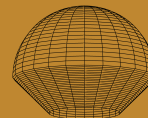
- Vypočítejte objem tělesa.

Příklad 1.5

**Příklad 1.1.** Převeďte (oběma způsoby) dvojný integrál  $I$  na dvojnásobný a vypočtěte jej:

$$I = \iint_A yx^2 \, dx \, dy, \text{ kde } A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

**Řešení:** Hraniční křivky jsou  $y = x^2$  (parabola) a  $y = 1$  (přímka). Integrační obor  $A$  je znázorněn na obrázku 1.1. Určíme  $x$ -ové souřadnice průsečíků obou křivek. Dostáváme rovnici  $1 = x^2$ , tj.  $x_1 = 1, x_2 = -1$ .



obr. 1.1 Množina  $A$

Chápeme-li množinu  $A$  jako elementární množinu vzhledem k  $x$ , pak integrační meze jsou:

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ x^2 &\leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Integrand  $yx^2$  je spojitá funkce na  $A$ . Podle Fubiniovy věty bude

$$\begin{aligned} I &= \iint_A yx^2 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left( \int_{x^2}^1 yx^2 \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 x^2 \right]_{x^2}^1 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - x^6) \, dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right] = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

Chápeme-li množinu  $A$  jako elementární množinu vzhledem k  $y$ , pak integrační meze budou následující:

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq 1, \\ -\sqrt{y} &\leq x \leq \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 15 z 160

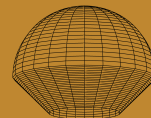


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



$$\begin{aligned} I &= \iint_A yx^2 \, dx dy = \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} yx^2 \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[ \frac{1}{3} x^3 y \right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left( y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{5}{2}} \right) dy = \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{21}. \end{aligned}$$

**Příklad 1.2.** Zaměňte pořadí integrace

$$I = \int_{-1}^1 \left( \int_0^2 f(x, y) \, dy \right) dx.$$

**Řešení:** Ze zadání vidíme, že se jedná se o čtverec, kde  $-1 \leq x \leq 1$  a  $0 \leq y \leq 2$ . Tedy

$$I = \int_0^2 \left( \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \right) dy.$$

**Příklad 1.3.** Vypočtěte  $\iint_M \frac{y}{x+y^2} \, dx dy$ , kde množina  $M$  je ohraničena křivkami  $y = 1$ ,  $y = 1/2$ ,  $x = 4 - y^2$  a  $x = y^2$ .

**Řešení:** První dvě křivky jsou přímky, druhé dvě paraboly. Integrační obor  $M$  je znázorněn na obrázku 1.2. Určíme ještě  $y$ -ovou souřadnici horního průsečíku  $P$  obou parabol, abychom se přesvědčili, že máme přímky  $y = 1$  a  $y = 1/2$  správně umístěny. Z rovnic parabol dostaneme  $4 - y^2 = y^2$ , tj.  $y^2 = 2$ , a tedy  $y = \sqrt{2}$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 16 z 160



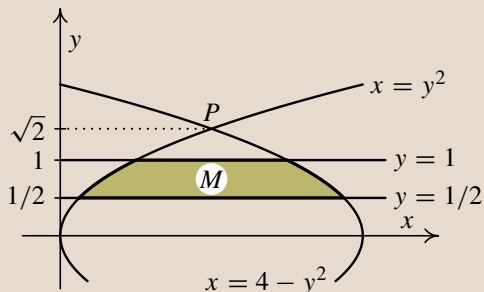
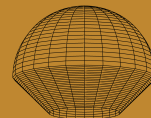
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





obr. 1.2 Množina  $M$

Množina  $M$  je elementární množina vzhledem k  $y$ . Ve vzorci (1.2) se tedy zamění role  $x$  a  $y$ . Integrační meze jsou

$$1/2 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq 4 - y^2.$$

Integrand  $y/(x + y^2)$  je spojitá funkce na  $M$ . Podle Fubiniovy věty bude

$$I = \iint_M \frac{y}{x + y^2} dx dy = \int_{1/2}^1 \left( \int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x + y^2} dx \right) dy.$$

Vnitřní integrál vyjde

$$\begin{aligned} \int_{y^2}^{4-y^2} \frac{y}{x + y^2} dx &= y [\ln |x + y^2|]_{y^2}^{4-y^2} = y(\ln 4 - \ln 2y^2) = \\ &= y(2 \ln 2 - \ln 2 - 2 \ln y) = y \ln 2 - 2y \ln y \end{aligned}$$

vzhledem k tomu, že v našem případě je  $y > 0$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 17 z 160

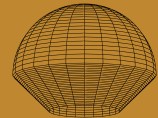


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 18 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Při výpočtu vnějšího integrálu použijeme mimo jiné metodu per partes. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{1/2}^1 (y \ln 2 - 2y \ln y) \, dy = \ln 2 \int_{1/2}^1 y \, dy - 2 \int_{1/2}^1 y \ln y \, dy = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \ln y \quad u' = \frac{1}{y} \\ v' = y \quad v = \frac{y^2}{2} \end{array} \right| = \ln 2 \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{1/2}^1 - 2 \left[ \frac{y^2}{2} \ln y \right]_{1/2}^1 + 2 \int_{1/2}^1 \frac{y}{2} \, dy = \\
 &= \ln 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{4} \ln 2 + \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{1/2}^1 = \frac{1}{8} \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} (\ln 2 + 3).
 \end{aligned}$$

**Příklad 1.4.** Vypočítejte obsah množiny

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y, y - x \leq 2\}.$$

**Řešení:** Obsah  $m_2(A)$  množiny  $A$  budeme počítat podle vztahu (1.1), tj.

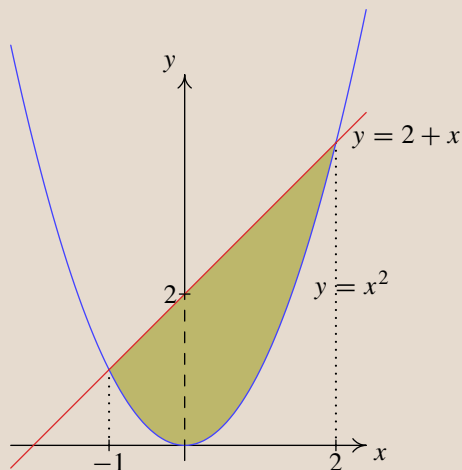
$$m_2(A) = \iint_A 1 \, dx \, dy.$$

Množina  $A$  je shora ohraničena křivkou  $y = 2 + x$ , zdola křivkou  $y = x^2$ , viz obrázek 1.3. Najdeme  $x$ -ové souřadnice průsečíků těchto křivek. Musí platit:

$$\begin{aligned}
 2 + x &= x^2, \\
 x^2 - x - 2 &= 0, \\
 (x + 1)(x - 2) &= 0.
 \end{aligned}$$

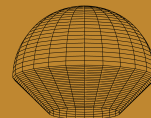
Odtud  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 2$ . Dostali jsme následující integrační meze:

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 2, \\ x^2 &\leq y \leq 2 + x. \end{aligned}$$



obr. 1.3 Množina A

$$\begin{aligned} m_2(A) &= \iint_A 1 dx dy = \int_{-1}^2 \left( \int_{x^2}^{2+x} 1 dy \right) dx = \int_{-1}^2 [y]_{x^2}^{2+x} dx = \int_{-1}^2 \left( 2 + x - \right. \\ &\left. - x^2 \right) dx = \left[ 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 4 + 2 - \frac{8}{3} - \left( -2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 19 z 160

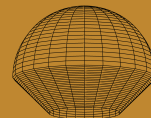


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



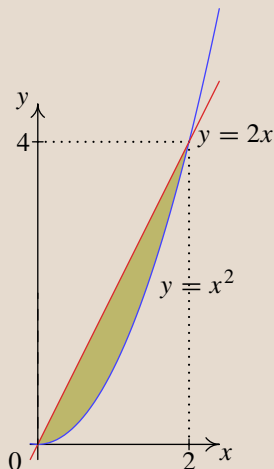
**Příklad 1.5.** Vypočítejte objem tělesa  $S$  ležícího pod paraboloidem  $z = x^2 + y^2$  a nad množinou  $A$  v rovině  $xy$  ohraničenou přímkou  $y = 2x$  a parabolou  $y = x^2$ .

**Řešení:** Pro objem  $m_3(S)$  tělesa  $S$  platí

$$m_3(S) = \iint_A f(x, y) \, dx dy,$$

kde  $A$  představuje podstavu tělesa  $S$  a funkce  $f(x, y)$  ohraničuje těleso  $S$  shora – viz obrázek 1.4. Množina  $A$  je shora ohraničená přímkou  $y = 2x$  a zdola parabolou  $y = x^2$ . Spočítáme  $x$ -ové souřadnice průsečíků těchto křivek:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ . Dostali jsme následující integrační meze:

$$0 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq 2x.$$



obr. 1.4 Množina  $A$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 20 z 160

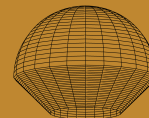


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



$$\begin{aligned} m_3(S) &= \iint_A (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \int_0^2 \left( \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left( \frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \\ &= \left[ \frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right]_0^2 = \frac{216}{35}. \end{aligned}$$

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

### Dvojný integrál – Fubiniova věta

1. (2b.) Uveďte název věty, která pojednává o převedení vícerozměrného integrálu na integrál vícenásobný.

Fubiniova

Cauchyova

Weierstrassova

Greenova

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 21 z 160

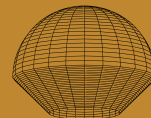


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



2. (2b.) Platí  $\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3} \, dy \right) dx = \frac{3\pi}{2}$ . Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

Číslo  $\frac{3\pi}{2}$  představuje obsah rovinné oblasti  $A$ .

Číslo  $\frac{3\pi}{2}$  představuje obsah rovinné oblasti, která je ohraničena funkcemi  $z = \frac{y}{3}$  a  $z = 2 + \sin x$ .

Číslo  $\frac{3\pi}{2}$  představuje objem tělesa, které je shora ohraničeno grafem funkce  $z = \frac{y}{3}$  a jehož podstava je  $A$ .

Číslo  $\frac{3\pi}{2}$  představuje objem tělesa, které je ohraničeno grafem funkce  $z = 2 + \sin x$  a jehož podstava je  $A$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 22 z 160

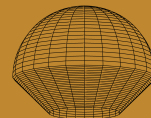


Zpět

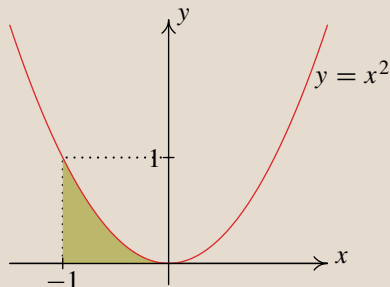
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



3. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^{x^2} \left( \int_{-1}^0 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_1^{x^2} \left( \int_{-1}^0 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 23 z 160

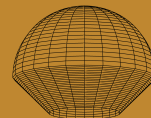


Zpět

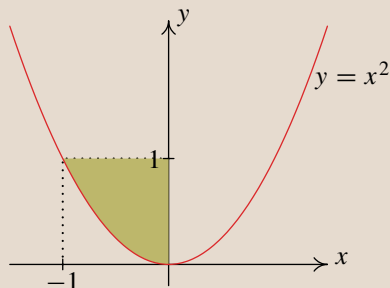
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



4. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvyrazněná na obrázku.



$$\int_0^{x^2} \left( \int_{-1}^0 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_{\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_{-1}^0 \left( \int_{-\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 24 z 160



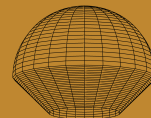
Zpět

Vpřed

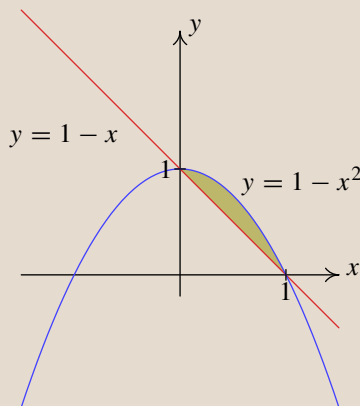
Přepnout režim obrazovky

Konec





5. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvyrazněná na obrázku.



$$\int_0^1 \left( \int_{1-x^2}^{1-x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{1-x}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{1-y}^{-\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 25 z 160

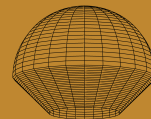


Zpět

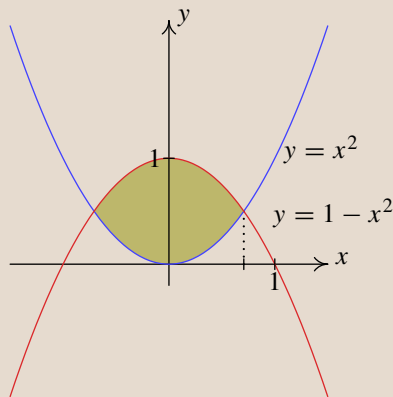
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



6. (4b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvyrazněná na obrázku.



$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{1-x^2}^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 26 z 160

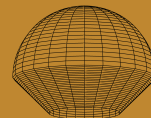


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 27 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

7. (4b.) U následujícího příkladu vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne změnou pořadí integrace u integrálu:  $\int_{-2}^0 \left( \int_{y^2-4}^0 dx \right) dy$ .

$$\int_{-2}^0 \left( \int_{-\sqrt{x+4}}^0 dy \right) dx$$

$$\int_{-4}^0 \left( \int_{\sqrt{x+4}}^0 dy \right) dx$$

$$\int_{-2}^0 \left( \int_{-\sqrt{x-4}}^0 dy \right) dx$$

$$\int_{-4}^0 \left( \int_{-\sqrt{x+4}}^0 dy \right) dx$$

8. (2b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^3 \left( \int_1^2 x^2 y dy \right) dx =$$

9. (2b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^2 \left( \int_0^1 (x^2 + 2y) dx \right) dy =$$

10. (3b.) Nechť  $\Omega$  je trojúhelník určený body  $A = [0, 0]$ ,  $B = [0, 2]$ ,  $C = [2, 0]$ ,

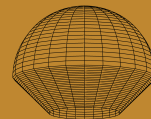
pak

$$\iint_{\Omega} dx dy =$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Úvod

**Dvojný integrál**

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 28 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

## 1.3. Transformace dvojného integrálu

Výpočet dvojného integrálu pomocí transformace do polárních souřadnic spočívá v tom, že změníme souřadnicový systém a tím převedeme výpočet jistého dvojného integrálu na jiný dvojný integrál. Dojde přitom jak ke změně integračního oboru, tak ke změně integrandu.

Jde o jistou analogii substituční metody pro jednoduchý určitý integrál. Zde nám však šlo především o to, abychom substitucí zjednodušili integrand. Integrační obor se změnil z jistého intervalu na jiný interval, což pro nás nebylo podstatné.

U dvojného integrálu nám však půjde především o změnu integračního oboru tak, abychom mohli využít Fubiniovu větu. Přitom dojde samozřejmě i ke změně integrandu, tato změna však pro nás nebude důležitá.

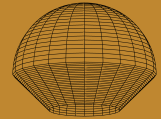
Mějme množiny  $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$  a zobrazení  $F : A \rightarrow B$  takové, že  $F[u, v] = [x, y] \in F(A) \subseteq B$  pro každé  $[u, v] \in A$ . Pak existují funkce  $x = g(u, v)$ ,  $y = h(u, v)$  tak, že každý bod  $[u, v] \in A$  se zobrazí na bod  $[g(u, v), h(u, v)] = [x, y]$ . A naopak, jsou-li na množině  $A$  definovány reálné funkce  $x = g(u, v)$ ,  $y = h(u, v)$ , je jimi určeno zobrazení  $A \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Je-li  $F$  spojitě diferencovatelné zobrazení, pak se determinant

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{vmatrix}$$

nazývá jakobián zobrazení  $F$ . Připomeňme, že zobrazení  $F$  se nazývá regulární právě tehdy, když je jakobián různý od nuly.

Uvedme nyní větu o transformaci dvojného integrálu, kterou budeme používat při řešení konkrétních úloh.



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 29 z 160

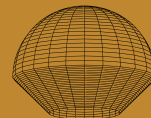


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 30 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

**Věta 1.2.** Buď  $M_1 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^2$ , kde  $M_1$  je otevřená množina,  $M$  je měřitelná množina a platí  $m_2(M \setminus M_1) = 0$ .

Nechť  $F$  je spojitě diferencovatelné zobrazení  $M$  do  $\mathbb{R}^2$ , které je regulární a prosté v  $M_1$ . Označme  $\Omega = F(M)$ ,  $\Omega_1 = F(M_1)$ . Nechť je množina  $\Omega$  měřitelná a platí  $m_2(\Omega \setminus \Omega_1) = 0$ .

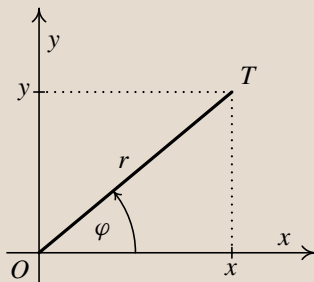
Buď funkce  $f$  ohraničená na množině  $\Omega$  a spojitá na  $\Omega_1$ . Dále nechť je funkce  $f[g(u, v), h(u, v)]|J(u, v)|$  ohraničená na množině  $M$ . Pak platí

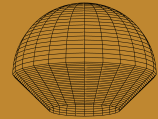
$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_M f[g(u, v), h(u, v)] |J(u, v)| \, du \, dv. \quad (1.3)$$

S využitím předchozí věty lze provádět různé transformace souřadnic, my si zde uvedeme nejčastější transformaci, a to do polárních souřadnic.

## Transformace do polárních souřadnic

Uvažujme bod  $T$  v rovině s kartézskými souřadnicemi  $[x, y]$ . Označme  $r$  vzdálenost bodu  $T$  od počátku  $O$  kartézské soustavy souřadnic a  $\varphi$  úhel, který svírá polopřímka  $OT$  s kladnou částí osy  $x$ .





Z definicí funkcí sinus a kosinus vyplývá, že vztah mezi kartézskými souřadnicemi  $[x, y]$  a polárními souřadnicemi  $[r, \varphi]$  je dán rovnicemi:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Přitom  $r \geq 0$  a  $\varphi$  nabývá hodnot z intervalu  $(0, 2\pi)$  nebo z jiného intervalu délky  $2\pi$ .

Zobrazení  $F$  dané těmito rovnicemi přiřazuje polárním souřadnicím daného bodu kartézské souřadnice téhož bodu, tj.  $F[r, \varphi] = [x, y]$ . Spočtěme si jakobián této transformace:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r$$

$$|J| = r$$

## Typové řešené příklady:

- Vypočítejte dvojný integrál  $\iint_M f(x, y) \, dx \, dy$  (po transformaci dostaneme konstantní meze).

Příklad 1.6

- Vypočítejte dvojný integrál  $\iint_M f(x, y) \, dx \, dy$  (po transformaci dostaneme nekonzstantní meze).

Příklad 1.7

- Vypočítejte objem tělesa.

Příklad 1.8

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 31 z 160

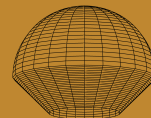


Zpět

Vpřed

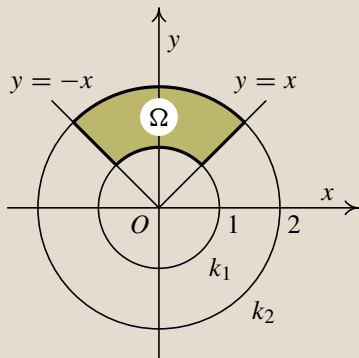
Přepnout režim obrazovky

Konec

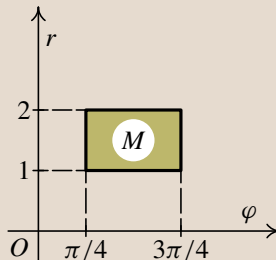


**Příklad 1.6.** Vypočtete  $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$ , kde množina  $\Omega$  je určena podmínkami  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $y \geq |x|$ .

**Řešení:** Rovnice  $x^2 + y^2 = 1$  a  $x^2 + y^2 = 4$  určují kružnice  $k_1$  a  $k_2$  se středy v počátku  $O$  a poloměry 1 a 2. První podmínka tedy zadává mezikruží. Graf funkce  $y = |x|$  je tvořen dvěma polopřímkami (osami prvního a druhého kvadrantu) o rovnicích  $y = x$  a  $y = -x$ . Body splňující nerovnost  $y \geq |x|$  leží nad tímto grafem. Dohromady tudíž obě podmínky zadávají množinu  $\Omega$  – viz obrázek 1.6.



obr. 1.5



obr. 1.6

Určíme, jak bude tato množina popsána v polárních souřadnicích. Polopřímky vycházející z počátku  $O$ , které protínají množinu  $\Omega$ , musí svírat s kladnou částí osy  $x$  úhel v rozmezí  $\pi/4$  ( $y = x$  je osa prvního kvadrantu) až  $3\pi/4$  ( $y = -x$  je osa druhého kvadrantu). Tedy  $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$ .

Libovolná taková polopřímka protíná množinu  $\Omega$  v úsečce, jejíž koncové body mají od počátku  $O$  stále stejné vzdálenosti, a to 1 a 2. Tedy  $1 \leq r \leq 2$ . To znamená,

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 32 z 160



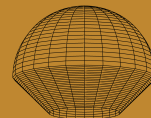
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 33 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

že transformací do polárních souřadnic přejde množina  $\Omega$  v obdélník  $M$  – viz obrázek 1.6.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy = \iint_M ((r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2) r \, dr \, d\varphi = \\ &= \iint_M r^3 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \, dr \, d\varphi = \iint_M r^3 \, dr \, d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left( \int_1^2 r^3 \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[ \frac{r^4}{4} \right]_1^2 d\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{15}{4} d\varphi = \frac{15}{4} [\varphi]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{15}{4} \left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{15\pi}{8}. \end{aligned}$$

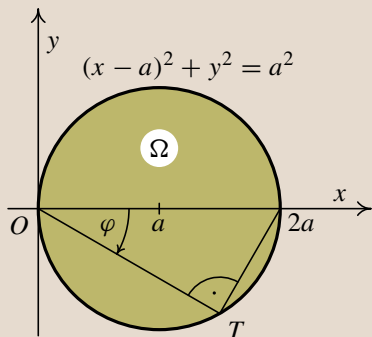
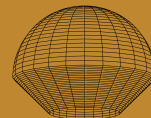
Na výpočet transformovaného integrálu jsme použili Fubiniovu větu.

**Příklad 1.7.** Vypočtěte  $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ , kde množina  $\Omega$  je určena podmínkou  $x^2 + y^2 - 2ax \leq 0$ ,  $a > 0$ .

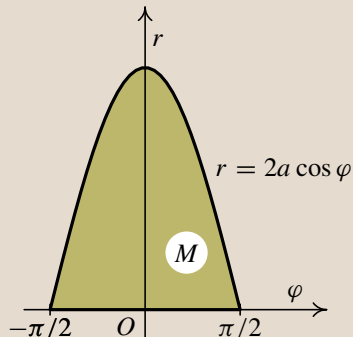
**Řešení:** Rovnice  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$  zadává nějakou kuželosečku. Doplněním na čtverec určíme, o jakou kuželosečku jde:

$$x^2 + y^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Jde o kružnici se středem v bodě  $[a, 0]$  a poloměrem  $a$ . Integračním oborem  $\Omega$  je tedy kruh – viz obr. 1.7, proto použijeme transformaci do polárních souřadnic. Vzhledem k poloze množiny  $\Omega$  (leží v prvním a čtvrtém kvadrantu) bude výhodnější volit rozmezí úhlů z intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Polopřímky vycházející z počátku  $O$ , které protínají množinu  $\Omega$  i v jiných bodech než v počátku  $O$ , svírají potom s kladnou částí osy  $x$  úhly z intervalu  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Protože s uzavřenými množinami se nám lépe pracuje, zahrneme i koncové body, takže budeme mít  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ .



obr. 1.7



obr. 1.8

Nyní určíme omezení pro  $r$ . Z obrázku je zřejmé, že délky úseček  $|\overline{OT}|$ , které jsou průnikem uvažovaných polopřímek s množinou  $\Omega$ , se budou měnit a budou záviset na úhlu  $\varphi$ . Dosazením polárních souřadnic do rovnice kružnice obdržíme:

$$(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 - 2ar \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r - 2a \cos \varphi) = 0.$$

Hodnotě  $r = 0$  odpovídá počátek  $O$ , pro druhý průsečík polopřímky s kružnicí platí  $r = 2a \cos \varphi$ . (Tento výsledek lze snadno zdůvodnit i geometricky. V trojúhelníku s vrcholy  $O$ ,  $[2a, 0]$  a  $T$  je podle Thaletovy věty u vrcholu  $T$  pravý úhel. Z definice kosinu vyplývá, že  $r = |\overline{OT}| = 2a \cos \varphi$ .) Celkově tedy dostáváme, že

$$M: \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 2a \cos \varphi.$$

Množina  $M$  je tudíž elementární vzhledem k  $\varphi$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 34 z 160

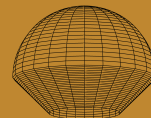


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 35 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Použitím vztahu (1.3) dostaneme:

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \iint_M \sqrt{(r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} r \, dr \, d\varphi = \\
 &= \iint_M r^2 \, dr \, d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{2a \cos \varphi} r^2 \, dr \right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} a^3 \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{8}{3} a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \sin \varphi = t \\ \cos \varphi \, d\varphi = dt \\ -\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow -1, \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = \frac{8}{3} a^3 \int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt = \frac{8}{3} a^3 \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{32}{9} a^3.
 \end{aligned}$$

Na výpočet transformovaného integrálu jsme použili Fubiniovu větu, vzniklý jednoduchý integrál jsme pak řešili substituční metodou.

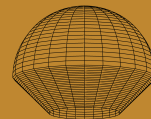
**Příklad 1.8.** Vypočítejte objem tělesa  $S$  ležícího pod rovinou  $z = y$  a nad množinou  $\Omega$ :

$$\Omega = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \wedge x^2 - 4x + y^2 \leq 0 \wedge y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x \wedge y \leq x \right\}.$$

**Řešení:** Pro objem  $m_3(S)$  tělesa  $S$  platí

$$m_3(S) = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy,$$

kde  $\Omega$  představuje „podstavu tělesa  $S$ “ a funkce  $f(x, y)$  ohraničuje těleso  $S$  shora.



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 36 z 160



Zpět

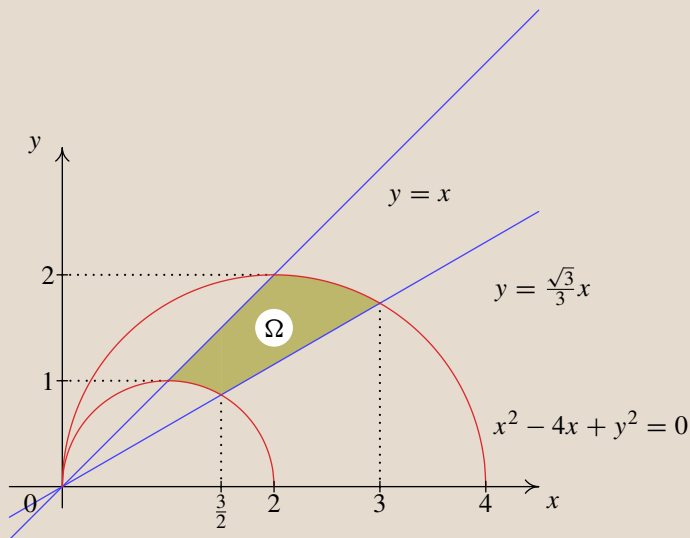
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Ohraničující funkcí je rovina  $z = y$ , tj.  $f(x, y) = y$ . Podívejme se podrobněji na množinu  $\Omega$ . Hraniční křivky množiny  $\Omega$  jsou následující:

- $x^2 - 2x + y^2 = 0$ . Po úpravě na tvar  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  vidíme, že se jedná o kružnici se středem v bodě  $[1, 0]$  a poloměrem 1.
- $x^2 - 4x + y^2 = 0$ . Po úpravě na tvar  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$  vidíme, že se jedná o kružnici se středem v bodě  $[2, 0]$  a poloměrem 2.
- $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  je přímka.
- $y = x$  je také přímka.



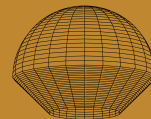
obr. 1.9

Uvedené křivky ohraničují množinu  $\Omega$  – viz obrázek 1.9. Celé těleso je znázorněno na obrázku 1.10.

p28.u3d

obr. 1.10

Vzhledem ke tvaru množiny  $\Omega$  je vhodné provést transformaci do polárních souřadnic. Polopřímky vycházející z počátku  $O$ , které protínají množinu  $\Omega$ , musí



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 37 z 160

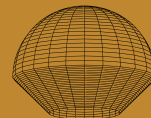


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



svírat s kladnou částí osy  $x$  úhel v rozmezí  $\pi/6$  až  $\pi/4$ . Tedy  $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/4$ . Ukážeme si nyní, jak lze tyto hodnoty dostat dosažením polárních souřadnic do rovnic přímek:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow r \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}r \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$y = x \Rightarrow r \sin \varphi = r \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Nyní určíme omezení pro  $r$ . Z obrázku je zřejmé, že  $r$  bude záviset na  $\varphi$ . Dosažením polárních souřadnic do rovnic kružnic dostáváme:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r \cos \varphi = 0 \Rightarrow r(r - 2 \cos \varphi) = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \Rightarrow r^2 - 4r \cos \varphi = 0 \Rightarrow r(r - 4 \cos \varphi) = 0.$$

Řešení  $r = 0$  předchozích rovnic neodpovídá zadané množině, proto ho neuvažujeme. Pro průsečík libovolné polopřímky vycházející z počátku s menší kružnicí platí  $r = 2 \cos \varphi$  a pro průsečík této polopřímky s větší kružnicí platí  $r = 4 \cos \varphi$ . Integrační meze transformované množiny jsou tedy následující:

$$\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$2 \cos \varphi \leq r \leq 4 \cos \varphi.$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 38 z 160

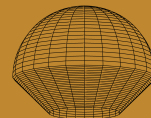


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} y \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} r^2 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{2 \cos \varphi}^{4 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \left( \frac{64}{3} \cos^3 \varphi - \frac{8}{3} \cos^3 \varphi \right) d\varphi = \frac{56}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \left| \begin{array}{l} \cos \varphi = t \\ -\sin \varphi \, d\varphi = dt \\ \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = -\frac{56}{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^3 \, dt = \frac{56}{3} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^3 \, dt = \\ &= \frac{14}{3} \left[ t^4 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{35}{24}. \end{aligned}$$

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

### Dvojný integrál – transformace do polárních souřadnic

1. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do polárních souřadnic při použití  $r$ ,  $\varphi$  je:

$$r \cos \varphi \qquad r \qquad r^2 \qquad r \sin \varphi$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 39 z 160

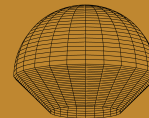


Zpět

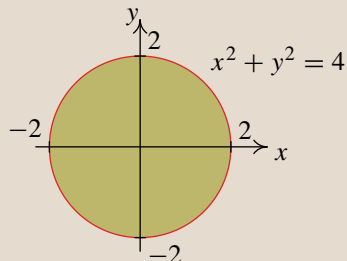
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



2. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$  do polárních souřadnic, je-li  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .



$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 r^2 \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^2 r^2 \left( \int_0^{2\pi} dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 \sqrt{r^2} \, dr \right) d\varphi$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 40 z 160



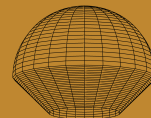
Zpět

Vpřed

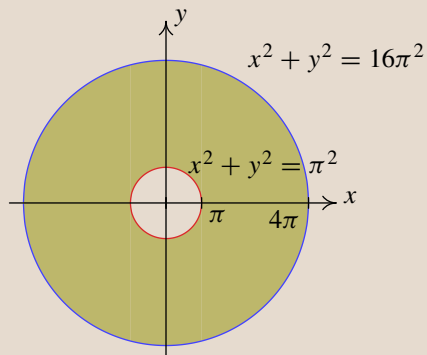
Přepnout režim obrazovky

Konec





3. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iint_{\Omega} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$  do polárních souřadnic, je-li  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq (4\pi)^2\}$ .



$$\int_0^{2\pi} \left( \int_{\pi}^{4\pi} \sin r \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{4\pi} r^2 \left( \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_{\pi}^{4\pi} r \sin r \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\pi}^{4\pi} \left( \int_{\pi}^{4\pi} r \sin \sqrt{r^2} \, dr \right) d\varphi$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 41 z 160

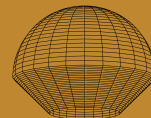


Zpět

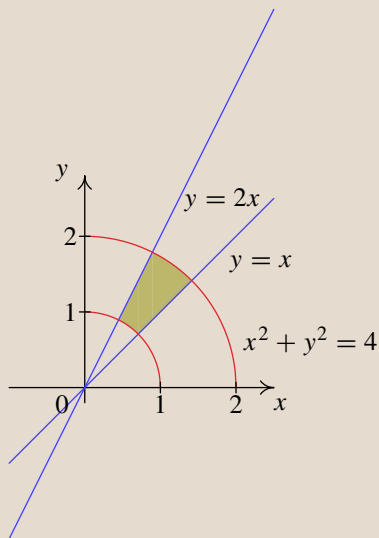
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



4. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$  do polárních souřadnic, je-li  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq 2x\}$ .



$$\int_1^4 \left( \int_{\pi/4}^{2\pi} r^3 d\varphi \right) dr$$

$$\int_1^4 \left( \int_{\pi/4}^{2\pi} r^2 dr \right) d\varphi$$

$$\int_1^2 \left( \int_{\pi/4}^{\pi/3} r^2 d\varphi \right) dr$$

$$\int_1^2 \left( \int_{\pi/4}^{\arctg 2} r^3 d\varphi \right) dr$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 42 z 160

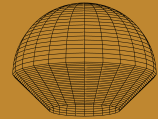


Zpět

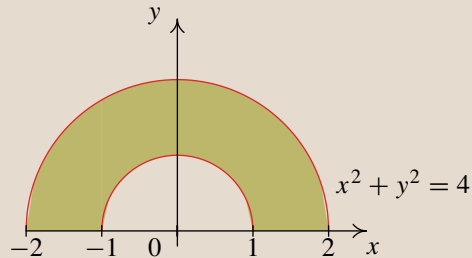
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



5. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$  do polárních souřadnic, je-li  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0\}$ .



$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \frac{\ln r^2}{r^2} d\varphi \right) dr$$

$$\int_0^{\pi} \left( \int_1^2 \frac{\ln r^2}{r^2} r d\varphi \right) dr$$

$$\int_1^2 \left( \int_0^{\pi} \frac{\ln r^2}{r^2} r d\varphi \right) dr$$

$$\int_0^{\pi} \left( \int_1^2 \frac{\ln r^2}{r^2} d\varphi \right) dr$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 43 z 160

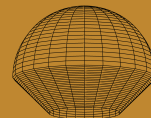


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 44 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

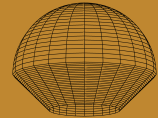
6. (3b.) Transformujte integrál  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ , kde  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x$  do polárních souřadnic.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left( \int_0^{\sqrt{2}} r f(r \sin \varphi, \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\sqrt{2}} r f(r \sin \varphi, \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\sqrt{2}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left( \int_0^{\sqrt{2}} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 45 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

7. (4b.) Nechť  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x + y \geq 1\}$ . Transformujte integrál  $\iint_{\Omega} xy \, dx dy$  do polárních souřadnic.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^1 r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) dr$$

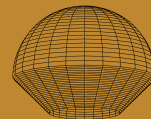
8. (4b.) Nechť  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ . Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte integrál:

$$\iint_{\Omega} (x + y) dx dy =$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Úvod

**Dvojný integrál**

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 46 z 160

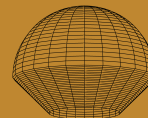


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



# Kapitola 2

## Trojný integrál

Množiny bodů v prostoru	Test
Trojný integrál a Fubiniova věta	
Typové řešené příklady	Test
Transformace trojného integrálu	
Transformace do válcových souřadnic	
Typové řešené příklady	Test
Transformace do sférických souřadnic	
Typové řešené příklady	Test

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 47 z 160



Zpět

Vpřed

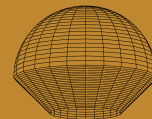
Přepnout režim obrazovky

Konec

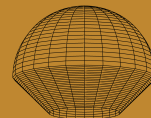
## 2.1. Množiny bodů v prostoru

Při výpočtech trojných integrálů pracujeme s množinami v trojrozměrném prostoru. Integračními obory jsou množiny bodů  $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ . Doporučujeme proto čtenáři, aby si zopakoval rovnice základních kvadrik (koule, elipsoid, jednodílný a dvojdílný hyperboloid, kužel, eliptický a hyperbolický paraboloid) a kvadratických válců (rotační válec, eliptický válec, parabolický válec a hyperbolický válec).

Vzhledem k tomu, že rozpoznání ploch, které ohraničují integrační obor, je pro úspěšné zvládnutí trojného integrálu nezbytné, zařazujeme na začátek test, kde si své znalosti ověříte.

[Úvod](#)[Dvojný integrál](#)[Trojný integrál](#)[Souhrnné testy](#)[Úlohy na procvičení](#)[Odkazy](#)[Titulní strana](#)[Strana 48 z 160](#)[Zpět](#)[Vpřed](#)[Přepnout režim obrazovky](#)[Konec](#)





U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

### Množiny bodů v prostoru

1. (2b.) K množině zobrazené na obrázku přiřadte odpovídající rovnici. Přitom  $a, b, c, p, q > 0$ .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 49 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

2. (2b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

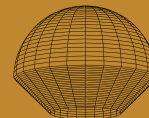
Kvadrík s rovnicí  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ,  $r > 0$  je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 50 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

3. (2b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

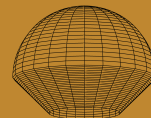
Kvadrík s rovnicí  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ , kde  $a, b, c > 0$ , je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 51 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

4. (2b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

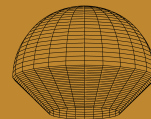
Kvadrika s rovnicí  $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ , kde  $p, q > 0$ , je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 52 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

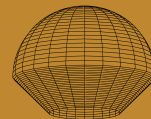
5. (2b.) K množině na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici. Přitom  $a, b, c, p, q > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 53 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

6. (2b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku, je li  $z \geq 0$

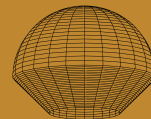
test2.u3d

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = -9$$

$$2y^2 + 2z^2 - x^2 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = -9$$

$$2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 54 z 160

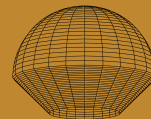


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



7. (2b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test5.u3d

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3 - y$$

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 4, z = 0, z = 3 - y$$

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3 - x$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0, z = 3 - x$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 55 z 160

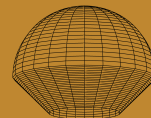


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 56 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

8. (2b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test6.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 - y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$



9. (2b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

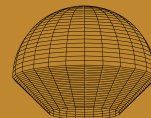
test9.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, y^2 + 2 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 + x^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 - x^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 - x^2 \leq z \leq y^2 + 2\}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 57 z 160



Zpět

Vpřed

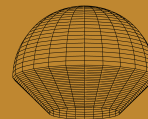
Přepnout režim obrazovky

Konec

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 58 z 160

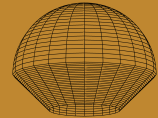


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



## 2.2. Trojný integrál

Trojný integrál přiřazuje omezené funkci tří proměnných definované na nějaké měřitelné množině  $M$  v trojrozměrném prostoru číslo, které může mít v závislosti na konkrétním tvaru integrandu následující geometrický význam:

$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  představuje míru  $m_4(S)$  množiny  $S$ , která je shora ohraničena nezápornou funkcí  $f(x, y, z)$  a zdola funkcí nulovou  $g(x, y, z) = 0$ . Obě funkce uvažujeme na množině  $M$ , tj.  $D(f) = D(g) = M$ .

$\iiint_M (f(x, y, z) - g(x, y, z)) \, dx \, dy \, dz$ , kde  $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ ,  $[x, y, z] \in M$ , představuje míru  $m_4(S)$  množiny  $S$ , která je shora ohraničena funkcí  $f(x, y, z)$  a zdola funkcí  $g(x, y, z)$ . Obě funkce opět uvažujeme na množině  $M$ , tj.  $D(f) = D(g) = M$ .

$\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz$  představuje míru  $m_4(S)$  množiny  $S$ , která je shora ohraničena konstantní funkcí  $f(x, y, z) = 1$  a zdola funkcí nulovou  $g(x, y, z) = 0$ . Obě funkce uvažujeme na množině  $M$ , tj.  $D(f) = D(g) = M$ . Vzhledem k tomu, že je míra  $m_4(S)$  rovna součinu míry podstavy (množiny  $A$ ) a výšky, platí

$$\iiint_M 1 \, dx \, dy \, dz = m_3(M). \quad (2.1)$$

Tento vztah říká, že číselně je míra  $m_4(S)$  množiny s podstavou  $M$  a výškou rovnou jedné rovna **objemu množiny  $M$** .

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 59 z 160

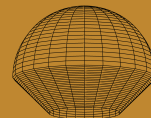


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



## 2.3. Trojný integrál – Fubiniova věta

Fubiniova věta nám dává návod, jak převést trojný integrál na trojnásobný. Převádíme tak výpočet trojného integrálu na výpočet tří po sobě jdoucích jedno-rozměrných integrálů.

**Věta 2.1.** (Fubiniova věta v  $\mathbb{R}^3$ ) Nechť je funkce  $f$  tří proměnných  $x, y, z$  spojitá na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in A; u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\},$$

kde  $u, v$  jsou funkce spojitě na množině  $A$  takové, že  $u(x, y) \leq v(x, y)$  pro každé  $[x, y] \in A$ . Dále nechť

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

kde  $\varphi, \psi$  jsou funkce spojitě na intervalu  $\langle a, b \rangle$  takové, že  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  pro každé  $x \in \langle a, b \rangle$ . Pak platí

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left( \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right\} dx. \quad (2.2)$$

V předchozí větě je množina  $A$  elementární množinou vzhledem k  $x$ . Jednoduše lze přeformulovat Fubiniovu větu pro případ, kdy bude množina  $A$  elementární oblastí vzhledem k  $y$ .

Bude-li integračním oborem množina  $M$  uvedená výše, budeme mluvit o elementární oblasti vzhledem k  $xy$ . A to i v případě, že množina  $A$  je elementární množinou vzhledem k  $y$ .

Analogicky lze Fubiniovu větu použít v případě elementárních oblastí vzhledem k  $xz$  nebo  $yz$ .

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 60 z 160

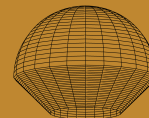


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



## Typové řešené příklady:

- Vypočítejte trojný integrál  $\iiint_M f(x, y, z) \, dx dy dz$ .

Příklad 2.1

- Vypočítejte objem tělesa.

Příklad 2.2

Příklad 2.3

**Příklad 2.1.** Vypočítejte  $\iiint_V 2z \, dx dy dz$ , kde množina  $V$  je omezena plochami  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ ,  $x + y = 1$ , přičemž  $x, y, z \geq 0$ .

**Řešení:** První plochou je dvojdílný rotační hyperboloid s osou rotace v ose  $z$ . Druhou plochou je rovina, která je rovnoběžná s osou  $z$ . Podmínky  $x, y, z \geq 0$  znamenají, že se máme omezit jen na první oktant. Z hyperboloidu nás tedy bude zajímat jen jeho horní část. Integrační obor  $V$  vidíme na obrázku 2.1 a jeho průmět do roviny  $xy$  na obrázku 2.2.

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 61 z 160

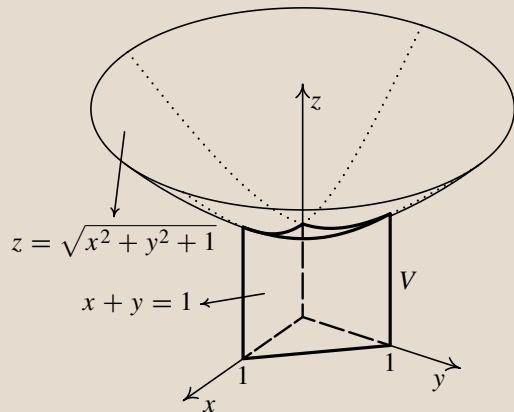
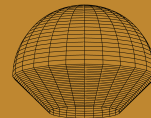


Zpět

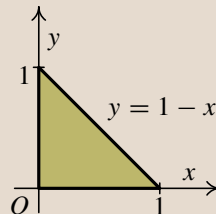
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



obr. 2.1



obr. 2.2

Integrační obor  $V$  je elementární množina vzhledem k  $xy$ . Z rovnice hyperboloidu určíme, že  $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ . Množinu  $V$  popíšeme následovně:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ V: 0 &\leq y \leq 1 - x, \\ 0 &\leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 62 z 160

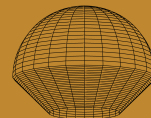


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 63 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Na výpočet integrálu použijeme Fubiniovu větu.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V 2z \, dx dy dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left( \int_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2z \, dz \right) dy \right\} dx = \\
 &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} [z^2]_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} dy \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + 1) dy \right\} dx = \\
 &= \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left( x^2(1-x) + \frac{1}{3} (1-x)^3 + 1-x \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left( -\frac{4}{3} x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3} \right) dx = \left[ -\frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - x^2 + \frac{4}{3} x \right]_0^1 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

**Příklad 2.2.** Vypočítejte objem tělesa  $A$  ohraničeného plochami  $z = 4 - y^2$ ,  $z = 2 + y^2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

**Řešení:** Pro objem  $m_3(A)$  tělesa  $A$  platí

$$m_3(A) = \iiint_A dx dy dz.$$

Nejprve určíme mezní plochy, které ohraničují integrační obor  $A$ :

- $z = 4 - y^2$  (parabolická válcová plocha),
- $z = 2 + y^2$  (parabolická válcová plocha),
- $x = -1$  (rovina),
- $x = 2$  (rovina).

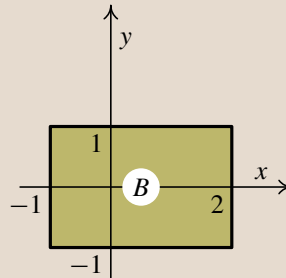
Průmětem tělesa  $A$  do roviny  $xy$  je obdélník  $B$  ohraničený přímkami  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1$  a  $y = 1$ . Meze pro  $x$  jsou přímo zadány. Meze pro  $y$  získáme

jako průsečíky parabolických ploch, tj. jako řešení rovnice  $4 - y^2 = 2 + y^2$ . Odtud  $2y^2 = 2$  a tedy  $y_1 = -1$ ,  $y_2 = 1$ . Integrační obor  $A$  vidíme na obrázku 2.3 a jeho průmět do roviny  $xy$  na obrázku 2.4.

Integrační meze tedy jsou:

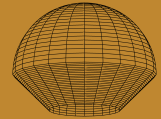
$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 2, \\ -1 &\leq y \leq 1, \\ y^2 + 2 &\leq z \leq 4 - y^2. \end{aligned}$$

o1.u3d



obr. 2.3 Těleso  $A$

obr. 2.4



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 64 z 160



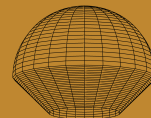
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





$$\begin{aligned} m_3(A) &= \iiint_A dx \, dy \, dz = \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^1 \left( \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz \right) dy \right\} dx = \\ &= \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^1 [z]_{y^2+2}^{4-y^2} dy \right\} dx = 2 \int_{-1}^2 \left\{ \int_{-1}^1 (1 - y^2) dy \right\} dx = \\ &= 2 \int_{-1}^2 \left[ y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^1 dx = 2 \int_{-1}^2 \frac{4}{3} dx = \frac{8}{3} [x]_{-1}^2 = 8. \end{aligned}$$

**Příklad 2.3.** Vypočítejte objem tělesa  $A$  ohraničeného plochami

$$y = x^2, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0, \quad y = 1.$$

**Řešení:** Nejprve určíme mezní plochy, které ohraničují integrační obor  $A$ :

- $z = x^2 + y^2$  (rotační paraboloid),
- $y = x^2$  (parabolická válcová plocha),
- $z = 0$  (rovina),
- $y = 1$  (rovina).

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 65 z 160

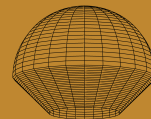


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 66 z 160



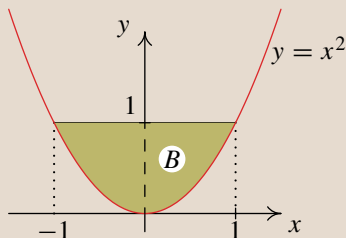
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

o2.u3d



obr. 2.5

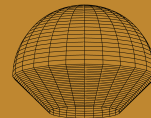
obr. 2.6

Průmětem tělesa  $A$  do roviny  $xy$  je množina  $B$  ohraničená parabolou  $y = x^2$  a přímkou  $y = 1$  – viz obr. 2.6. Vidíme, že těleso  $A$  je souměrné podle roviny  $x = 0$ . Výpočet tedy provedeme pouze pro první oktant a výsledek vynásobíme dvěma. Dostáváme následující integrační meze:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1, \\ x^2 &\leq y \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq x^2 + y^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3(A) &= 2 \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right\} dx = 2 \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy \right\} dx = \\
&= 2 \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^1 dx = 2 \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \\
&= 2 \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x - \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{21} x^7 \right]_0^1 = \frac{88}{105}.
\end{aligned}$$

U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.



Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 67 z 160

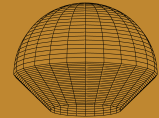


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 68 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

## Trojný integrál — Fubiniova věta

1. (2b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  na trojnásobný, je-li:

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 5\}$$

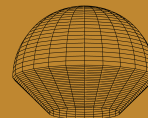
t1.u3d

$$\int_0^5 \left( \int_0^{5-x} \left( \int_0^{5-x-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^5 \left( \int_0^5 \left( \int_0^5 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^5 \left( \int_0^{5-x} \left( \int_0^{5-x-y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^5 \left( \int_0^5 \left( \int_0^{5-x-y} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$



Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 69 z 160



Zpět

Vpřed

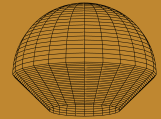
Přepnout režim obrazovky

Konec

2. (2b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  na trojnásobný, je-li:  
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$

t2.u3d

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1+x} \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$
$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$
$$\int_0^1 \left( \int_0^{1+x} \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) dz \right) dx \right) dy$$
$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$



Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 70 z 160



Zpět

Vpřed

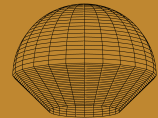
Přepnout režim obrazovky

Konec

3. (2b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  na trojnásobný, je-li:  
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y \leq 4, z \leq 4 - x^2\}$

t3.u3d

$$\int_0^4 \left( \int_0^{2x} \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$
$$\int_0^2 \left( \int_0^{4-2x} \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$
$$\int_0^4 \left( \int_0^{2x} \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$
$$\int_0^2 \left( \int_0^4 \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$



Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 71 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

4. (2b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  na trojnásobný, je-li:  
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \leq 1, z \leq xy\}$

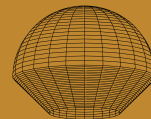
t4.u3d

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{xy} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^{xy} \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^1 f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz$$



5. (2b.) Vypočtete  $\int_0^3 \left( \int_0^1 \left( \int_0^2 dz \right) dy \right) dx =$

6. (3b.) Je-li  $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$ , pak  
 $\iiint_{\Omega} xy^2z \, dx dy dz =$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 72 z 160



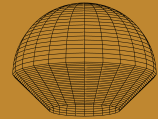
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





## 2.4. Transformace trojného integrálu

Transformace trojného integrálu je velmi podobná transformaci dvojného integrálu. Rozdíl je pouze v prostoru, v němž transformace probíhají.

Buď  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  otevřená množina. Budte  $x = g(u, v, w)$ ,  $y = h(u, v, w)$ ,  $z = k(u, v, w)$  funkce definované na  $A$ , které zde mají spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť  $F$  je zobrazení, které každému bodu  $[u, v, w] \in A$  přiřadí bod  $[g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)] \in F(A)$ .

Je-li  $F$  spojitě diferencovatelné zobrazení, pak se determinant

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} g_u(u, v, w) & g_v(u, v, w) & g_w(u, v, w) \\ h_u(u, v, w) & h_v(u, v, w) & h_w(u, v, w) \\ k_u(u, v, w) & k_v(u, v, w) & k_w(u, v, w) \end{vmatrix}$$

nazývá jakobián zobrazení  $F$ . Připomeňme, že zobrazení  $F$  se nazývá regulární právě tehdy, když je jakobián různý od nuly.

Uveďme nyní větu o transformaci trojného integrálu, kterou budeme používat při řešení konkrétních úloh.

**Věta 2.2.** Buď  $M_1 \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$ , kde  $M_1$  je otevřená množina,  $M$  je měřitelná množina a platí  $m_3(M \setminus M_1) = 0$ .

Nechť  $F$  je spojitě diferencovatelné zobrazení  $M$  do  $\mathbb{R}^3$ , které je regulární a prosté v  $M_1$ . Označme  $\Omega = F(M)$ ,  $\Omega_1 = F(M_1)$ . Dále nechť je množina  $\Omega$  měřitelná a platí  $m_3(\Omega \setminus \Omega_1) = 0$ .

Nechť je funkce  $f$  ohraničená na množině  $\Omega$  a spojitá na  $\Omega_1$ . Dále nechť je funkce  $f[g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]|J(u, v, w)|$  ohraničená na množině  $M$ . Pak platí

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_M f[g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)] |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 73 z 160



Zpět

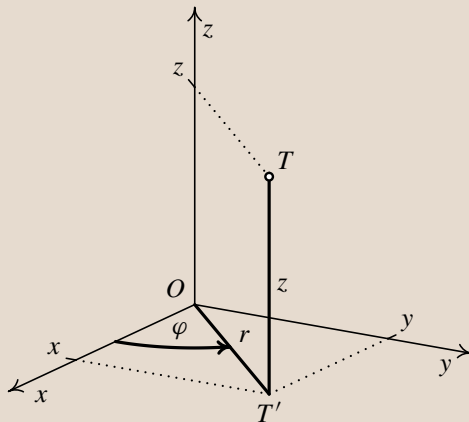
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

## Transformace do válcových souřadnic

Uvažujme bod  $T$  v prostoru s kartézskými souřadnicemi  $[x, y, z]$  a jeho kolmý průmět  $T'$  do roviny  $xy$  s kartézskými souřadnicemi  $[x, y, 0]$ . Jak již víme, v rovině lze provést transformaci kartézských souřadnic  $[x, y]$  bodu  $T'$  do polárních souřadnic  $[r, \varphi]$ . Nyní využijeme tohoto vyjádření prvních dvou souřadnic bodu  $T$  v polárních souřadnicích k zavedení nové transformace kartézských souřadnic  $[x, y, z]$  bodu  $T$  do tzv. válcových (cylindrických) souřadnic  $[r, \varphi, z]$ .

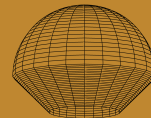


Vztah mezi kartézskými souřadnicemi  $[x, y, z]$  bodu  $T$  a válcovými souřadnicemi  $[r, \varphi, z]$  je dán rovnicemi:

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$z = z.$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 74 z 160

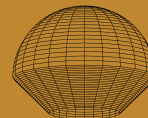


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Přitom  $r \geq 0$  a  $\varphi$  nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  nebo z jiného intervalu délky  $2\pi$ .  
Spočtěme jakobián uvedené transformace.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi) & \frac{\partial}{\partial z}(r \cos \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi) & \frac{\partial}{\partial z}(r \sin \varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r}z & \frac{\partial}{\partial \varphi}z & \frac{\partial}{\partial z}z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r = |J|$$

Vzhledem k tomu, že  $z$ -ová souřadnice zůstává po transformaci stále stejná, posuzujeme vhodnost použití této transformace pouze podle tvaru množiny, která je průmětem integračního oboru  $\Omega$  do roviny  $xy$ . Jinými slovy, množina  $\Omega$  musí být elementární oblastí vzhledem k  $xy$  tvaru

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in A, g(x, y) \leq z \leq f(x, y) \right\},$$

kde  $A$  je množina vhodná pro transformaci do polárních souřadnic.

## Typové řešené příklady:

- Vypočítejte objem tělesa.

**Příklad 2.4**

- Vypočítejte míru množiny.

**Příklad 2.5**

**Příklad 2.4.** Vypočítejte objem tělesa  $\Omega$ . Přitom

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x \right\}.$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 75 z 160

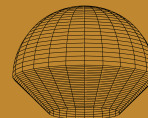


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 76 z 160



Zpět

Vpřed

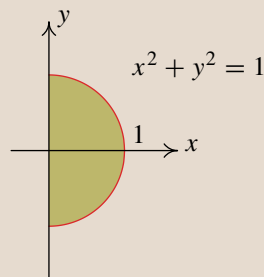
Přepnout režim obrazovky

Konec

**Řešení:** Rovnice  $x^2 + y^2 = 1$  určuje kruhovou válcovou plochu. Rovnice  $z = 0$ ,  $z = x$  jsou roviny, které z válcové plochy vytnou množinu  $\Omega$  — viz obr. 2.7. Použijeme transformaci do válcových souřadnic.

- Určíme průmět prostorové množiny  $\Omega$  do roviny  $xy$ . Průmětem je množina  $A$  — viz obr. 2.8.

o4.u3d

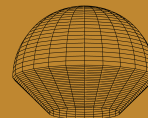


obr. 2.7 Množina  $\Omega$

obr. 2.8 Množina  $A$

- Popíšeme množinu  $A$  v polárních souřadnicích:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$
$$0 \leq r \leq 1.$$



- Určíme omezení pro  $z$ . Dosadíme tedy transformační rovnice do rovnic zadaných ploch, které množinu  $\Omega$  ohraničují shora a zdola.

$$\text{shora : } z = x \Rightarrow z = r \cos \varphi,$$

$$\text{zdola : } z = 0 \Rightarrow z = 0.$$

Celkem tedy  $0 \leq z \leq r \cos \varphi$ .

- Transformací do válcových souřadnic přejde množina  $\Omega$  v množinu  $M$  — viz obr. 2.9. Na obrázku je osa  $\varphi$  označena písmenem  $p$ . Množinu  $M$  popíšeme takto:

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 &\leq r \leq 1, \\ 0 &\leq z \leq r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 77 z 160

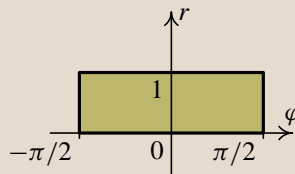
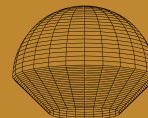


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



obr. 2.9 Množina  $M$

obr. 2.10 Průmět  $M$  do roviny  $\varphi$

$$\begin{aligned} m_3(\Omega) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{r \cos \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r [z]_0^{r \cos \varphi} dr \right) d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} [\sin \varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} (1 - (-1)) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

**Příklad 2.5.** Vypočítejte míru množiny  $\Omega$ , kde

$$\Omega = \left\{ [x, y, z] \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - 3z^2 \leq 0 \wedge z \leq 2 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 78 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

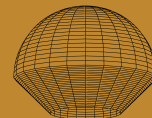
**Řešení:** Rovnice  $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$  určuje kužel s osou v souřadnicové ose  $z$  a vrcholem v počátku. Rovnici  $z = 2 - x^2 - y^2$  upravíme na  $z = -(x^2 + y^2) + 2$ . Vidíme, že se jedná o rotační paraboloid s osou v souřadnicové ose  $z$  otočený dolů a posunutý o 2 nahoru.

Těleso  $\Omega$  je tedy shora ohraničeno rotačním paraboloidem a zdola kuželem — viz obr. 2.11. Použijeme transformaci do válcových souřadnic.

- Určíme průmět prostorové množiny  $\Omega$  do roviny  $xy$ . K určení průmětu do roviny  $xy$  potřebujeme znát křivku, v níž se kužel a paraboloid protínají. Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 3z^2 &= 0 \\ -(x^2 + y^2) + 2 - z &= 0.\end{aligned}$$

Sečtením získáme  $-3z^2 - z + 2 = 0$ . Tato rovnice má dvě řešení  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 2/3$ . Vzhledem ke tvaru tělesa  $\Omega$  vyhovuje pouze řešení  $z_2 = 2/3$ . Dosazením do některé z rovnic dostáváme  $x^2 + y^2 = 4/3$ . Kužel a paraboloid se tedy protínají v kružnici se středem v bodě  $[0, 0, 2/3]$  a poloměrem  $2/\sqrt{3}$  ležící v rovině rovnoběžné s rovinou  $xy$ . Průmětem tělesa  $\Omega$  do roviny  $xy$  je tedy kruh  $A$  — viz obr. 2.12.



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 79 z 160

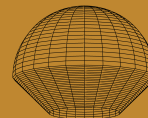


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 80 z 160



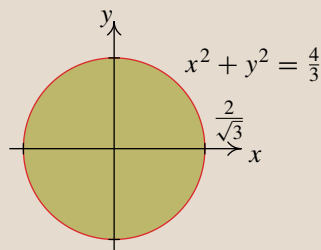
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

o5.u3d



obr. 2.11 Množina  $\Omega$

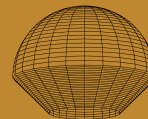
obr. 2.12 Množina  $A$

- Popíšeme množinu  $A$  v polárních souřadnicích:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq r \leq 2/\sqrt{3}.$$





Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 81 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

- Určíme omezení pro  $z$ . Dosadíme tedy transformační rovnice do rovnic zadaných ploch, které množinu  $\Omega$  ohraničují shora a zdola.

$$\begin{aligned} \text{shora : } z = 2 - x^2 - y^2 &\Rightarrow z = 2 - (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = 2 - r^2, \end{aligned}$$

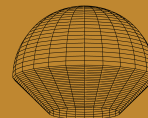
$$\begin{aligned} \text{zdola : } x^2 + y^2 - 3z^2 = 0 &\Rightarrow r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi - 3z^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \pm \frac{r}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vyhovuje pouze } z = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Celkem tedy  $\frac{r}{\sqrt{3}} \leq z \leq 2 - r^2$ .

- Transformací do válcových souřadnic přejde množina  $\Omega$  v množinu  $M$  — viz obr. 2.13, kterou popíšeme takto:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq r \leq 2/\sqrt{3}, \\ r/\sqrt{3} &\leq z \leq 2 - r^2. \end{aligned}$$



obr. 2.13 Množina  $M$

obr. 2.14 Průmět  $M$  do roviny  $\varphi r$

$$\begin{aligned} m_3(\Omega) &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left( \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2-r^2} r \, dz \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} r[z]_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2-r^2} dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left( 2r - r^3 - \frac{r^2}{\sqrt{3}} \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[ r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3\sqrt{3}} \right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{36}{27} - \frac{12}{27} - \frac{8}{27} \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{27} d\varphi = \frac{16}{27} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{32}{27} \pi. \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 82 z 160

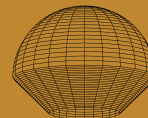


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

### Trojný integrál – transformace do válcových souřadnic

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi při použití  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  je dán rovnicemi:

$$x = r \sin \varphi, y = r \cos \varphi, z = \varphi$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = \varphi$$

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$$

$$x = r \sin \varphi, y = r \cos \varphi, z = z$$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do válcových souřadnic při použití  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  je:

$$r^2$$

$$r$$

$$r \sin \vartheta$$

$$r \cos \vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 83 z 160

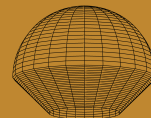


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



3. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test6.u3d

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 84 z 160



Zpět

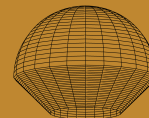
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_0^3 \left( \int_0^3 \left( \int_0^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^3 \left( \int_0^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_0^3 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) dz \right) dr$$



4. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test8.u3d

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 85 z 160



Zpět

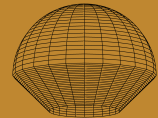
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_1^2 \left( \int_0^3 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_0^4 \left( \int_0^3 \left( \int_0^\pi r \, d\varphi \right) dz \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 \left( \int_1^4 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_{\pi/2}^\pi \left( \int_1^2 \left( \int_0^3 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$



5. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3 - y\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test5.u3d

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 86 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

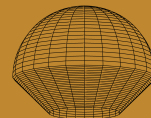
Konec

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{3-y} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

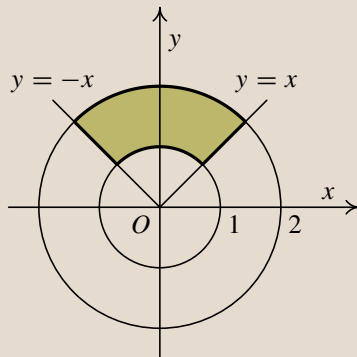
$$\int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 \left( \int_0^{3-r \sin \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{3-r \sin \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$



6. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li

$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4, y \geq |x|\}$ . Průmět množiny  $A$  do roviny  $xy$  je zobrazen na obrázku.



$$\int_0^4 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left( \int_0^2 r dr \right) d\varphi \right) dz$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 \left( \int_0^4 r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left( \int_1^2 \left( \int_0^4 r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^4 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left( \int_1^2 r dr \right) d\varphi \right) dz$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 87 z 160

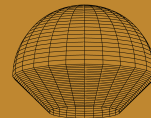


Zpět

Vpřed

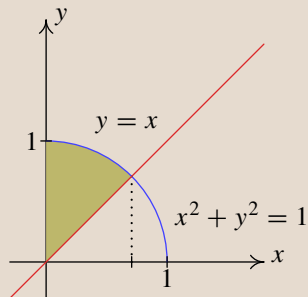
Přepnout režim obrazovky

Konec



7. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li

$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 3, y \geq x, x \geq 0\}$ . Průmět množiny  $A$  do roviny  $xy$  je zobrazen na obrázku.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^3 \left( \int_0^1 r \, dr \right) dz \right) d\varphi$$

$$\int_1^3 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left( \int_0^1 r \, dr \right) d\varphi \right) dz$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^3 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^3 \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 r \, dr \right) d\varphi \right) dz$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 88 z 160



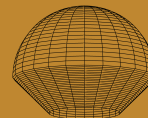
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





8. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - y \leq 0, x^2 + y^2 \geq z \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test10.u3d

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 89 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

$$\int_0^{x^2+y^2} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r dr \right) d\varphi \right) dz$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^{\sin \varphi} \left( \int_0^{r^2} r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^1 \left( \int_0^{r^2} r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^r \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\sin \varphi}^{\cos \varphi} r dr \right) d\varphi \right) dz$$

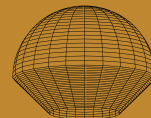
Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

## Transformace do sférických souřadnic

Uvažujme bod  $T$  v prostoru s kartézskými souřadnicemi  $[x, y, z]$  a jeho kolmý průmět  $T'$  do roviny  $xy$  s kartézskými souřadnicemi  $[x, y, 0]$ . Označme  $r$  vzdálenost bodu  $T$  od počátku  $O$  kartézské soustavy souřadnic a  $\varphi$  úhel, který svírá polopřímka  $OT'$  s kladnou částí osy  $x$ . Dále označme  $\vartheta$  úhel, který svírá polopřímka  $OT$  s kladnou částí osy  $z$ . Polohu bodu  $T$  v prostoru pak určíme trojicí čísel  $[r, \varphi, \vartheta]$ , kterou nazveme sférické souřadnice bodu  $T$ .



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 90 z 160

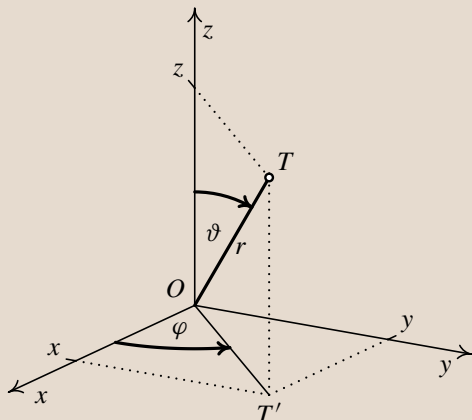
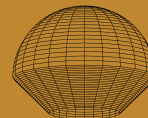


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Z obrázku vidíme, že pro první dvě souřadnice bodu  $T$  platí  $x = |OT'| \cos \varphi$ ,  
 $y = |OT'| \sin \varphi$ . Z pravoúhlého trojúhelníku  $OT'T$  dostaneme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{z}{r} \Rightarrow \cos \vartheta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \vartheta.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{|OT'|}{r} \Rightarrow \sin \vartheta = \frac{|OT'|}{r} \Rightarrow |OT'| = r \sin \vartheta.$$

Dosaďme-li nyní vyjádření  $|OT'|$  do vztahů pro  $x$  a  $y$ , dostáváme vztah mezi kartézskými souřadnicemi  $[x, y, z]$  bodu  $T$  a sférickými souřadnicemi  $[r, \varphi, \vartheta]$ :

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 91 z 160

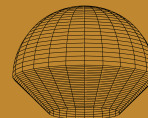


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 92 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

Přitom  $r \geq 0$ , úhel  $\varphi$  nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$  nebo z jiného intervalu délky  $2\pi$  a úhel  $\vartheta$  nabývá hodnot z intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ . Spočtěme ještě jakobián této transformace:

$$\begin{aligned}
 J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \varphi \sin \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \varphi \sin \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(r \cos \varphi \sin \vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \varphi \sin \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \sin \varphi \sin \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(r \sin \varphi \sin \vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(r \cos \vartheta) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(r \cos \vartheta) \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -r \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & r \cos \varphi \sin \vartheta & r \sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & -r \sin \vartheta \end{vmatrix} = \\
 &= -r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \vartheta - r^2 \sin^2 \varphi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta - r^2 \cos^2 \varphi \sin \vartheta \cos^2 \vartheta - \\
 &\quad - r^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \vartheta = \\
 &= -r^2 \left( \sin^3 \vartheta \left( \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) + \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \left( \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right) \right) = \\
 &= -r^2 \sin \vartheta \left( \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \right) = -r^2 \sin \vartheta
 \end{aligned}$$

Absolutní hodnota jakobiánu je:  $|J| = r^2 \sin \vartheta$

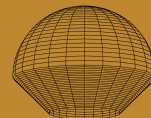
## Typové řešené příklady:

- Vypočítejte integrál  $\iint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz$ .

Příklad 2.6

- Vypočítejte míru množiny.

Příklad 2.7



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 93 z 160



Zpět

Vpřed

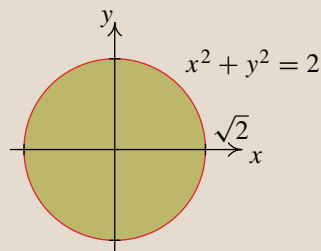
Přepnout režim obrazovky

Konec

**Příklad 2.6.** Vypočítejte  $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ , kde množina  $\Omega$  je určená nerovnostmi  $z^2 \geq x^2 + y^2$ ,  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ , přičemž  $z \geq 0$ .

**Řešení:** Rovnice  $z^2 = x^2 + y^2$  určuje rotační kuželovou plochu s osou v souřadnicové ose  $z$ . První nerovnost tedy zadává její vnitřek. Vzhledem k nerovnosti  $z \geq 0$  budeme uvažovat pouze horní část. Podmínka  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  říká, že množina  $\Omega$  je dále omezena dvěma soustřednými kulovými plochami o poloměrech 1 a 2. Výsledek je znázorněn na obrázku 2.15. Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

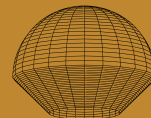
test3.u3d



obr. 2.15 Množina  $\Omega$

obr. 2.16 Množina  $A$

- Určíme průmět tělesa  $\Omega$  do roviny  $xy$  a tím úhel  $\varphi$ . Průmětem  $A$  je zřejmě kruh se středem v počátku, jehož hraniční kružnice je průmětem kružnice, kterou dostaneme jako průnik kuželové plochy a větší kulové plochy. Vyloučením proměnné  $z$  z rovnic



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 94 z 160



Zpět

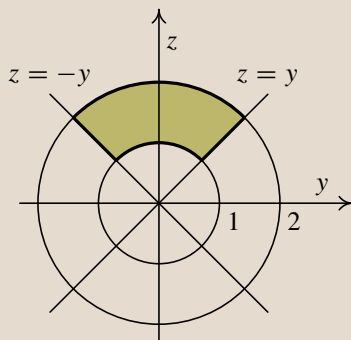
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

$z^2 = x^2 + y^2$  a  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  dostaneme, že  $x^2 + y^2 = 2$ , tj. poloměr kruhu  $A$  je  $\sqrt{2}$ . Tento údaj ale není důležitý, určili jsme jej jen pro úplnost, podstatné je, že pro úhel  $\varphi$  platí  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

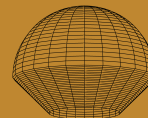
- Určíme řez tělesa  $\Omega$  libovolnou rovinou procházející osou  $z$ . Protože toto těleso je rotační s osou rotace  $z$ , bude řez libovolnou rovinou procházející osou  $z$  stejný. Na obr. 2.17 je znázorněn řez rovinou  $yz$ . Z něho určíme rozmezí pro úhel  $\vartheta$ . Protože přímka  $y = z$  je osou prvního kvadrantu, svírá s osou  $z$  úhel  $\frac{\pi}{4}$ . Tedy  $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$ .



obr. 2.17 Řez rovinou  $yz$

- Určíme meze pro  $r$ . Pro proměnnou  $r$  zřejmě platí  $1 \leq r \leq 2$ .
- Transformací do sférických souřadnic přejde množina  $\Omega$  v množinu  $M$  — viz obr. 2.18 (písmeno „ $\varphi$ “ značí osu  $\varphi$ , písmeno „ $\vartheta$ “ značí osu  $\vartheta$ ), kterou popíšeme takto:

$$M: \begin{aligned} &1 \leq r \leq 2, \\ &0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ &0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



sf1.u3d

obr. 2.18 Množina  $M$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz = \iiint_M r \cdot r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta = \\ &= \int_1^2 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi/4} \sin \vartheta \, d\vartheta = \left[ \frac{r^4}{4} \right]_1^2 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \vartheta]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{15}{4} \cdot 2\pi \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{15\pi(2 - \sqrt{2})}{4}. \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 95 z 160

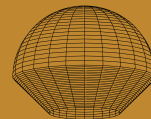


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 96 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

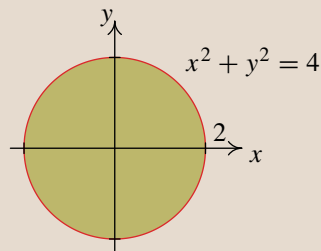
Konec

**Příklad 2.7.** Vypočítejte míru množiny  $T$  dané nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0 \wedge x^2 + y^2 - z^2 \leq 0.$$

**Řešení:** První rovnici  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$  lze upravit na tvar  $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ . Vidíme, že se jedná se o kulovou plochu. První nerovnost tedy zadává vnitřek kulové plochy. Rovnice  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  určuje rotační kuželovou plochu s osou v souřadnicové ose  $z$ . Druhá nerovnost tedy zadává vnitřek kuželové plochy. Množina  $\Omega$  je tedy omezena shora kulovou plochou se středem v bodě  $[0, 0, 2]$  a poloměrem 2 a zdola kuželovou plochou. Výsledek je znázorněn na obrázku 2.19. Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

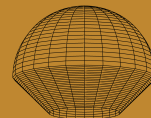
o3.u3d



obr. 2.19 Množina  $\Omega$

obr. 2.20 Množina  $A$





- Určíme průmět prostorové množiny  $\Omega$  do roviny  $xy$  a tím úhel  $\varphi$ . K určení průmětu do roviny  $xy$  potřebujeme znát křivku, v níž se kužel a koule protínají. Řešíme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + (z - 2)^2 &= 4 \\x^2 + y^2 - z^2 &= 0.\end{aligned}$$

- Odečtením získáme  $(z - 2)^2 + z^2 = 4$ . Tato rovnice má dvě řešení  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 2$ . Zajímá nás pouze řešení  $z_2 = 2$ . Dosazením do některé z rovnic dostáváme  $x^2 + y^2 = 4$ . Kužel a koule se protínají v kružnici se středem v bodě  $[0, 0, 2]$  a poloměrem 2, která leží v rovině rovnoběžné s rovinou  $xy$ . Průmětem tělesa  $\Omega$  do roviny  $xy$  je tedy kruh  $A$  — viz obr. 2.20. Pro úhel  $\varphi$  tedy platí  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .
- Určíme řez tělesa  $\Omega$  libovolnou rovinou procházející osou  $z$ . Protože toto těleso je rotační s osou rotace  $z$ , bude řez libovolnou rovinou procházející osou  $z$  stejný. Na obr. 2.21 je znázorněn řez rovinou  $yz$ . Z něho určíme rozmezí pro úhel  $\vartheta$ . Protože přímka  $y = z$  je osou prvního kvadrantu, svírá s osou  $z$  úhel  $\frac{\pi}{4}$ . Tedy  $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$ .

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 97 z 160

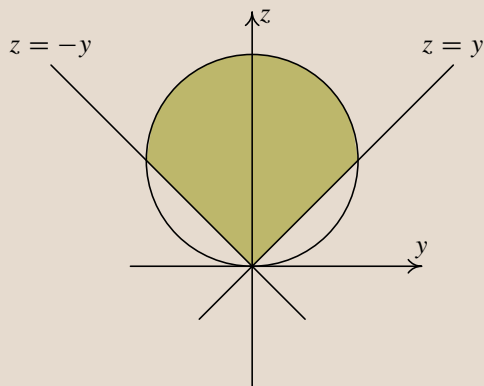


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



obr. 2.21 Řez rovinou  $yz$

- Určíme meze pro  $r$ . Omezení pro  $r$  dostaneme dosazením transformačních rovnic do rovnice kulové plochy, tj.

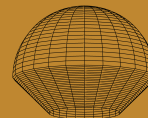
$$r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta - 4r \cos \vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r^2 \sin^2 \vartheta + r^2 \cos^2 \vartheta - 4r \cos \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 4 \cos \vartheta.$$

Celkem tedy pro proměnnou  $r$  platí  $0 \leq r \leq 4 \cos \vartheta$ .

- Transformací do sférických souřadnic přejde množina  $\Omega$  v množinu  $M$  — viz obr. 2.22, kterou popíšeme takto:

$$M: \begin{aligned} 1 &\leq r \leq 4 \cos \vartheta, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 98 z 160

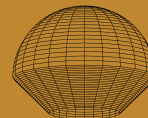


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



sf2.u3d

obr. 2.22

$$\begin{aligned}
 m(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_M r^2 \sin \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta = \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^{4 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\vartheta \right) d\varphi = \\
 &= \frac{16 \cdot 8}{3} \pi \int_0^{\pi/4} 4 \cos^3 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \cos \vartheta = t \\ \sin \vartheta \, d\vartheta = -dt \\ 0 \rightsquigarrow 1, \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1 \\ \text{změna pořadí horní a dolní meze} \Rightarrow \\ \text{změna znaménka před integrálem} \end{array} \right| = \\
 &= \frac{16 \cdot 8}{3} \pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 t^3 \, dt = \frac{32}{3} \pi \left[ t^4 \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = 8\pi.
 \end{aligned}$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 99 z 160

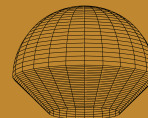


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

### Trojný integrál — transformace do sférických souřadnic

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi je při použití  $r$ ,  $\varphi$  a  $\vartheta$  dán rovnicemi:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

$$x = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \sin \varphi$$

$$x = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \sin \varphi$$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do sférických souřadnic při použití  $r$ ,  $\varphi$  a  $\vartheta$  je:

$$r^2 \sin \vartheta^2 \qquad r \cos \vartheta^2$$

$$r \sin \vartheta \qquad r^2 \sin \vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 100 z 160

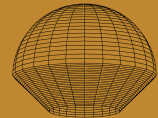


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



3. (4b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li:  $A = \left\{ [x, y, z] : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \right\}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} f(r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} f(r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 101 z 160

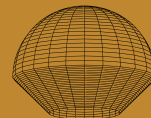


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



4. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z^2\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tsf1.u3d

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 102 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

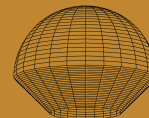
Konec

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$



5. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tsf2.u3d

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 103 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

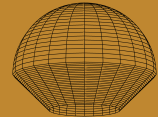
Konec

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$



6. (2b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li:

$$A = \left\{ [x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, x \geq 0 \right\}.$$

Množina  $A$  je zobrazena na obrázku na další straně.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{4 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\cos \vartheta} r^2 dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 104 z 160



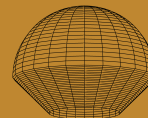
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





Úvod

Dvojný integrál

**Trojný integrál**

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 105 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

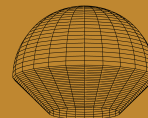
Konec

tsf4.u3d

Správně zodpovězené otázky:




Získané body:

Procento úspěšnosti:



## Kapitola 3

# Souhrnné testy

 <a href="#">Test 1</a>
 <a href="#">Test 2</a>
 <a href="#">Test 3</a>
 <a href="#">Test 4</a>

V této kapitole jsou zařazeny čtyři souhrnné testy, které by měly posloužit k procvičení problematiky dvojných a trojných integrálů. Začínáme otázkami k procvičení dvojných integrálů, dále následují otázky na rozpoznávání prostorových množin a nakonec jsou zařazeny testové otázky k trojnému integrálu. Při vyplňování testu platí stejná pravidla jako v testech zařazených k daným tématům: U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod. Z každého testu lze získat 100 bodů.

[Úvod](#)

[Dvojný integrál](#)

[Trojný integrál](#)

**[Souhrnné testy](#)**

[Úlohy na procvičení](#)

[Odkazy](#)

[Titulní strana](#)

Strana 106 z 160



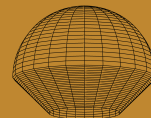
[Zpět](#)

[Vpřed](#)

[Přepnout režim obrazovky](#)

[Konec](#)

Kromě testových otázek, kdy pouze vybíráme odpověď z předem daných možností, jsou na konci testů zařazeny i otázky s tvořenými odpověďmi. Jedná se o jednoduché výpočty integrálů, které lze provést z paměti nebo velmi jednoduchým rozepsáním. Další složitější úlohy k procvičení počítání jsou zařazeny v následující kapitole.



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

**Souhrnné testy**

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 107 z 160

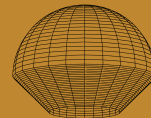


Zpět

Vpřed

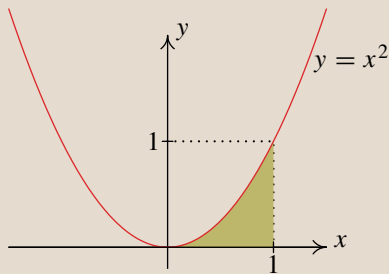
Přepnout režim obrazovky

Konec



## Souhrnný test 1

1. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvyrazněná na obrázku.



$$\int_0^1 \left( \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{x^2} \left( \int_{-1}^0 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^{-1} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 108 z 160

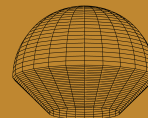


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 109 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

2. (8b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u inte-

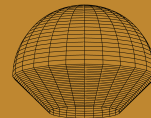
$$\text{grálu: } \int_0^2 \left( \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-y^2+1}}^{-\sqrt{1-y^2+1}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2-1}}^{\sqrt{1-y^2+1}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2+1}}^{\sqrt{1-y^2+1}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{1-y^2-1}}^{\sqrt{1-y^2-1}} f(x, y) dx \right) dy$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 110 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

3. (10b.) Transformujte integrál  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ , kde  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1$  do polárních souřadnic.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 r f(r \sin \varphi, \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}}^1 r f(r \sin \varphi, \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

4. (9b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

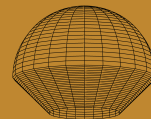
Kvadrík s rovnicí  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$  je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 111 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

5. (9b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

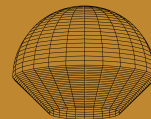
Nechť  $a, b > 0$ . Kvadrík s rovnicí  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 112 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



6. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

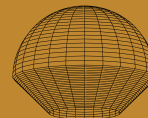
test10.u3d

$$x^2 + y^2 - y = 0, x^2 + y^2 = z, z = 0,$$

$$x^2 - y^2 = z, x^2 + y^2 = z, z = 0,$$

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 = z, z = 0,$$

$$x^2 + y^2 - y = 0, x^2 - y^2 = z$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 113 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

7. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

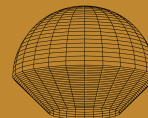
test7.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 114 z 160

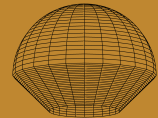


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



8. (10b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  na trojnásobný, je-li:  
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y \leq 4 - 2x, z \leq 6 - x^2\}$

$$\int_0^4 \left( \int_0^{2x} \left( \int_0^{6-x^2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^{4-2x} \left( \int_0^{6-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^4 \left( \int_0^{2x} \left( \int_0^{6-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^4 \left( \int_0^{6-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 115 z 160

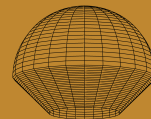


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 116 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq y\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

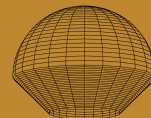
tv1.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 \left( \int_0^y r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^3 \left( \int_0^{r \sin \varphi} r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^3 \left( \int_0^{r \cos \varphi} r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^3 \left( \int_0^y \left( \int_{-\pi}^\pi r d\varphi \right) dz \right) dr$$



10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y - 3 \leq z \leq 3 - y, x \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tv6.u3d

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 117 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

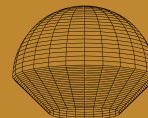
Konec

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^3 \left( \int_{y-3}^{3-y} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_1^3 \left( \int_{y-3}^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^3 \left( \int_{r \sin \varphi - 3}^{3-r \sin \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left( \int_1^9 \left( \int_{3-r \sin \varphi}^{3-r \cos \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$



11. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li

$$A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}.$$

Množina  $A$  je zobrazena na obrázku na další straně.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\cos \vartheta}^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 118 z 160

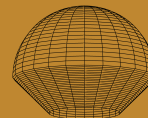


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



*Úvod*

*Dvojný integrál*

*Trojný integrál*

*Souhrnné testy*

*Úlohy na procvičení*

*Odkazy*

*Titulní strana*

*Strana 119 z 160*



*Zpět*

*Vpřed*

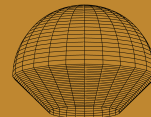
*Přepnout režim obrazovky*

*Konec*

Správně zodpovězené otázky:

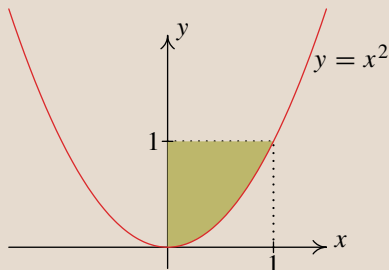
Získané body:

Procento úspěšnosti:



## Souhrnný test 2

1. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvyrazněná na obrázku.



$$\int_0^{x^2} \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{-\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 120 z 160



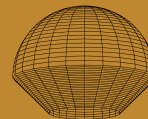
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 121 z 160



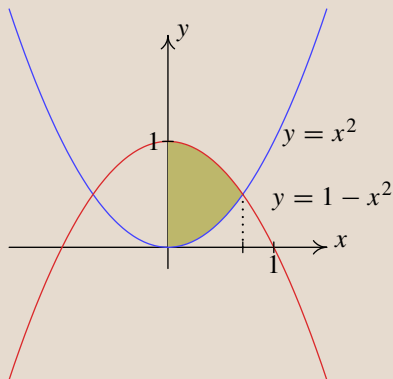
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

2. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvýrazněná na obrázku.

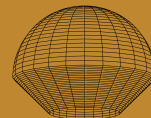


$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{1-x^2}^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$



3. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$  do polárních souřadnic, je-li

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq y, y \geq x, x \geq 0\}.$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sin \varphi} r f(r \sin \varphi, \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sin \varphi} r f(r \sin \varphi, \cos \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sin \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\sin \varphi} r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, dr \right) d\varphi$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 122 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

4. (9b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

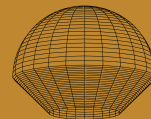
Nechť  $a, b, c > 0$ . Kvadrika s rovnicí  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 123 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

5. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

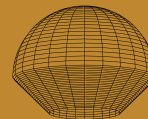
test11.u3d

$$x^2 + y^2 - x = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 124 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

6. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

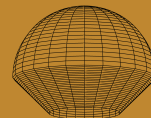
test3.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq -1, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 125 z 160

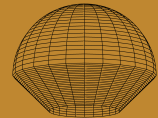


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



7. (10b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  na trojnásobný, je-li:  
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1+x} \left( \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1+x} \left( \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) \, dz \right) dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 126 z 160

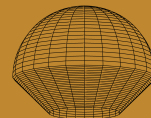


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 127 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, y - 2 \leq z \leq 2 - y\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

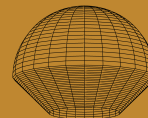
tv3.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \left( \int_{-2}^2 r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 \left( \int_{r \cos \varphi}^{r \sin \varphi} r dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^2 \left( \int_{2-r}^{2+r} \left( \int_0^{2\pi} r d\varphi \right) dz \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 \left( \int_{r \sin \varphi - 2}^{2 - r \sin \varphi} r dz \right) dr \right) d\varphi$$



9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \leq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tv7.u3d

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 128 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

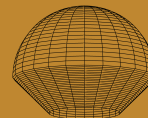
$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 \left( \int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \int_1^2 \left( \int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^2 \left( \int_0^{r \cos \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left( \int_1^2 \left( \int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$





10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tsf3.u3d

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 129 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

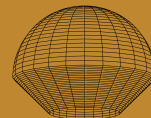
Konec

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_1^4 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 130 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

11. (5b.) Vypočtete dvojnásobný integrál

$$\int_0^4 \left( \int_0^{\sqrt{x}} dy \right) dx =$$

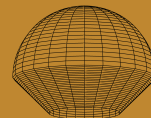
12. (6b.) Vypočtete dvojnásobný integrál

$$\int_1^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y dy \right) dx =$$

Správně zodpovězené otázky:

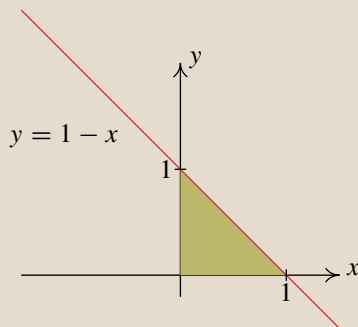
Získané body:

Procento úspěšnosti:



### Souhrnný test 3

1. (6b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^1 \left( \int_0^x f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{-y} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-y} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 131 z 160



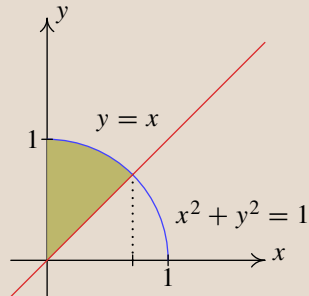
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

2. (8b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvýrazněná na obrázku.

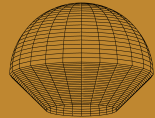


$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) \, dy \right) dx$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 132 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

3. (8b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu:

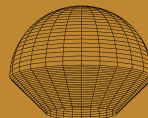
$$\int_0^1 \left( \int_{e^y}^e f(x, y) dy \right) dx.$$

$$\int_0^e \left( \int_1^{\ln x} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_1^e \left( \int_0^{\ln x} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_1^e \left( \int_1^{-\ln x} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^e \left( \int_e^{\ln x} f(x, y) dx \right) dy$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 133 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

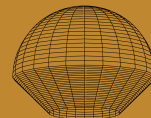
4. (9b.) K množině na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 134 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

5. (9b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

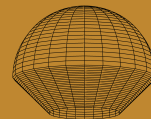
Nechť  $a, b > 0$ . Kvadrík s rovnicí  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 135 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

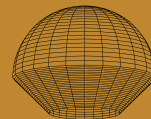
6. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

$$x^2 + y^2 + z^2 - z = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x = 0, x^2 + y^2 - z^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 136 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



7. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

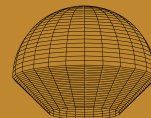
test4.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 - z^2 \geq 3\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 - y^2, x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 137 z 160

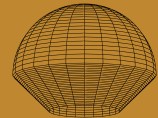


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 138 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

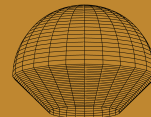
8. (10b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$  na trojnásobný, je-li:  
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$



9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tv2.u3d

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 139 z 160



Zpět

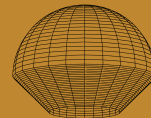
Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 \left( \int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_0^2 \left( \int_{-2}^2 \left( \int_0^{\pi} r \, d\varphi \right) dz \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 \left( \int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 \left( \int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$



10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu  $\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, R > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^R f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^R f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^R f(r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} f(r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 140 z 160

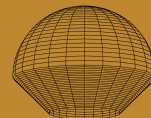


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 141 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

11. (6b.) Vypočtete dvojnásobný integrál

$$\int_0^2 \left( \int_0^1 (x^2 + y^3) dy \right) dx =$$

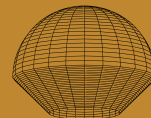
12. (6b.) Vypočtete trojnásobný integrál

$$\int_{-1}^1 \left( \int_{-\frac{1}{2}}^0 \left( \int_0^{\frac{1}{2}} dz \right) dy \right) dx =$$

Správně zodpovězené otázky:

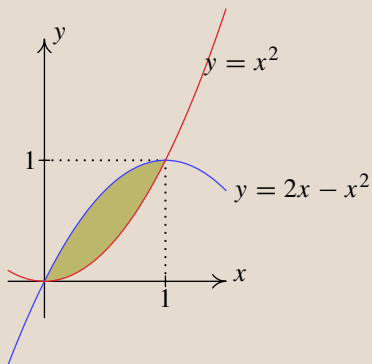
Získané body:

Procento úspěšnosti:



## Souhrnný test 4

1. (8b.) Převedte dvojný integrál  $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$  na dvojnásobný, je-li množina  $A$  zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^1 \left( \int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{2x-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{2x-x^2}^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_{x^2}^{2x-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

**Souhrnné testy**

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 142 z 160

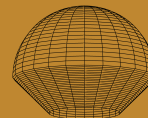


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 143 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

2. (8b.) Vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u inte-

$$\text{grálu: } \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{\sqrt{y}}^{-\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt[3]{y}}^{-\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

3. (9b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

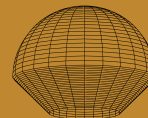
Kvadrík s rovnicí  $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$ , kde  $p, q > 0$ , je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 144 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

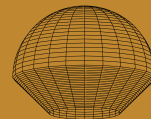
Konec



4. (9b.) K množině na obrázku přiřadte odpovídající rovnici. Přitom necht'  $a, b, c, p, q > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 145 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

5. (9b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

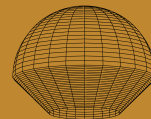
test1.u3d

$$x^2 + y^2 = 1, z = 1 - x^2 - y^2, z = 4$$

$$x^2 - y^2 = 1, z = 1 - x^2 - y^2, z = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2, z = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 4$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 146 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

6. (9b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

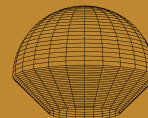
test8.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 147 z 160

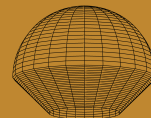


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



7. (10b.) Převedte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  na trojnásobný, je-li těleso  $A$  ohraničené plochami:  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $-x + 3y + 3z = 3$ .

$$\int_{-3}^2 \left( \int_0^{\frac{1}{3}(x+3)} \left( \int_0^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_{-2}^2 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^{x+1} \left( \int_0^{\frac{1}{3}(3+x-3y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 148 z 160

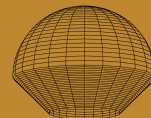


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, y - 3 \leq z \leq 3 - y, x \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tv4.u3d

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 149 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

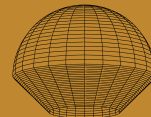
Konec

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^3 \left( \int_{y-3}^{3-y} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{y-3}^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^3 \left( \int_{r \sin \varphi - 3}^{3-r \sin \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 \left( \int_{3-r \sin \varphi}^{3-r \cos \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$



9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li

$$A = \left\{ [x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2, R > 0 \right\}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2R \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{R \cos \vartheta} r^2 dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2R \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 150 z 160

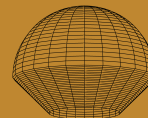


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 151 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

10. (9b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_0^\pi \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y \, dy \right) dx =$$

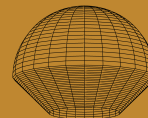
11. (9b.) Vypočtěte dvojnásobný integrál

$$\int_1^4 \left( \int_{-2}^3 x^2 y \, dy \right) dx =$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



# Kapitola 4

## Úlohy na procvičení

### Úlohy k procvičení výpočtů

1. (3b.) Nechť je množina  $\Omega$  určena křivkami:  $x + y = 1$ ,  $x + y = 2$ ,  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y = 2x$ .

Pak

$$\iint_{\Omega} dx dy =$$

2. (3b.) Nechť je množina  $\Omega$  určena křivkami:  $y = x^2$ ,  $y = 4 - x^2$ . Pak

$$\iint_{\Omega} dx dy =$$

3. (3b.) Nechť je množina  $\Omega$  určena křivkami:  $y = x^2$ ,  $y^2 = x$ . Pak

$$\iint_{\Omega} (x^2 + y) dx dy =$$

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 152 z 160



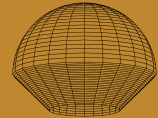
Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec





Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 153 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

4. (3b.) Nechť je množina  $\Omega$  určena křivkami:  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $x + y = 2$ . Pak

$$\iint_{\Omega} (x - y) dx dy =$$

5. (3b.) Nechť je množina  $\Omega$  určena křivkami:  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$ . Pak

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{y}{x}\right) dx dy =$$

6. (3b.) Nechť  $\Omega = \{[x, y] : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ . Pak

$$\iint_{\Omega} dx dy =$$

7. (3b.) Nechť  $\Omega = \left\{[x, y] : 1 \leq x \leq 4, \frac{1}{x} \leq y \leq \sqrt{x}\right\}$ . Pak

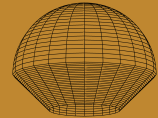
$$\iint_{\Omega} xy dx dy =$$

8. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic. Přitom  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, x \geq 0$ .

$$\iint_{\Omega} 15x^2y dx dy =$$

9. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic. Přitom  $\Omega: 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \geq 3, x^2 + y^2 \leq 5$ .

$$\iint_{\Omega} (x^2 - y^2) dx dy =$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 154 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

10. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic: Přitom  $\Omega: x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 16, x \leq 0, y \geq 0$ .

$$\iint_{\Omega} xy \, dx dy =$$

11. (4b.) Vypočítejte integrál pomocí transformace do polárních souřadnic. Přitom  $\Omega: x^2 + y^2 \leq ax, y \geq 0, a > 0$

$$\iint_{\Omega} y \, dx dy =$$

12. (2b.)  $\int_{-1}^0 \left( \int_{-\frac{1}{4}}^{-x} \left( \int_{-1}^{x^2} dz \right) dy \right) dx =$

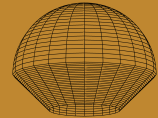
13. (2b.)  $\int_0^1 \left( \int_0^{1-x^2} \left( \int_0^{2-x-y} dz \right) dy \right) dx =$

14. (2b.)  $\int_0^2 \left( \int_x^{x+1} \left( \int_0^{xy} dz \right) dy \right) dx =$

15. (2b.)  $\int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \left( \int_0^{4-x-y} dz \right) dy \right) dx =$

16. (3b.) Nechť  $\Omega: y^2 \leq x \leq 2 - y, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x - y$ .

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz =$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 155 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

17. (3b.) Nechť  $\Omega: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$ .

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz =$$

18. (3b.) Nechť  $\Omega: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - x - 2y$ .

$$\iiint_{\Omega} dx dy dz =$$

19. (2b.)  $\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz \right) dy \right) dx =$

20. (2b.)  $\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} x^2 y dz \right) dy \right) dx =$

21. (2b.)  $\int_0^1 \left( \int_1^2 \left( \int_0^2 (3x^2 y + z) dz \right) dy \right) dx =$

22. (3b.) Nechť  $\Omega: 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2$ .

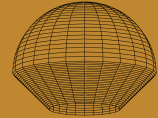
$$\iiint_{\Omega} xy^2z dx dy dz =$$

23. (3b.) Nechť  $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4$ .

$$\iiint_{\Omega} x^2 + y^2 dx dy dz =$$

24. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)$ . Vypočítejte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} 3z^2 dx dy dz =$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 156 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

25. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz =$$

26. (4b.) Nechť  $\Omega: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) \, dx dy dz =$$

27. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 4z \leq 16$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} \frac{xy}{(4 + z)^2} \, dx dy dz =$$

28. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

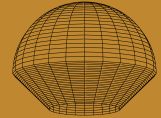
$$\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz =$$

29. (4b.) Nechť  $\Omega: \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} (1 - 2x - y) \, dx dy dz =$$

30. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2z, z \leq 2$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do válcových souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy dz =$$



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 157 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec

31. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} (x + y + z) \, dx \, dy \, dz =$$

32. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  v prvním oktantu,  $a > 0$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz =$$

33. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, a > 0, z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} 15\sqrt{2}yz \, dx \, dy \, dz =$$

34. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq z$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz =$$

35. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, z^2 \geq x^2 + y^2$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} dx \, dy \, dz =$$

36. (4b.) Nechť  $\Omega: x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ . Vypočtěte integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} xy \, dx \, dy \, dz =$$

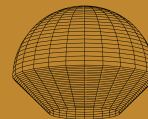
37. (4b.) Necht'  $\Omega: z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ . Vypočtete integrál pomocí transformace do sférických souřadnic.

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz =$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 158 z 160

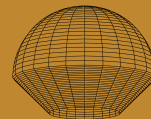


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



## Odkazy

- [1] Grahn A.: *The movie15 package*, 2008. Dostupné online na:  
<http://ftp.cstug.cz/pub/tex/CTAN/macros/latex/contrib/movie15/doc/movie15.pdf>.
- [2] Hošková Š., Kuben J., Račková P.: *Integrální počet funkcí více proměnných*, skriptum Univerzita obrany, Brno, 2005.
- [3] Jalová N.: *Testy z Integrálního počtu funkcí více proměnných*, bakalářská práce, MU Brno, 2008. Dostupná online na:  
<http://www.math.muni.cz/~plch/diplomky/jalova.pdf>.
- [4] Mařík R., Tihlaříková M.: *Pojďte pane, budeme si hrát (... s PDF)*, In Proceedings of 7th International Conference APLIMAT 2008, Bratislava: Department of Mathematics, Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology, 2008, s. 63–73.
- [5] Mařík R.: *Dvojný integrál*, duben 2009. Dostupné online na:  
<http://user.mendelu.cz/~marik/kvizy/dvojint-CZ.pdf>.
- [6] Musil V.: *Prezentace matematické grafiky (Integrální počet funkcí více proměnných) na webu s programem JavaView*, diplomová práce MU Brno, 2007.

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 159 z 160

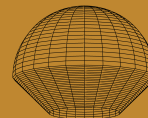


Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec



- [7] Plch R., Šarmanová P.: *Interaktivní prezentace matematické grafiky na webu a v PDF dokumentech*. Sborník semináře Technologie pro e-vzdělávání, Praha, 2007, s. 31–38.
- [8] Plch R., Šarmanová P.: *Galerie interaktivní grafiky pro podporu výuky matematické analýzy*. Sborník příspěvků 3. konference Využití počítačů ve výuce matematiky. 1. vydání. České Budějovice, 2007, s. 193–198.
- [9] Plch R., Šarmanová P.: *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*, Zpravodaj CSTUG, CSTUG, **18**, č. 1–2, 2008, s. 76–92.
- [10] Plch R., Šarmanová P.: *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*, Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, Volume 2, Number 3, 2008, s. 281–290.
- [11] Plch R., Šarmanová P.: *Multimediální sbírka příkladů z Integrálního počtu funkcí více proměnných*, Sborník konference Setkání učitelů matematiky Srní 2008, Plzeň, 2008, s. 243–246.
- [12] Stewart J.: *Calculus, fifth edition*, Thomson Learning, Brooks/Cole, 2003.
- [13] Story D.: *AcroTeX*, <http://www.acrotex.net/>, 2008.
- [14] Deep Exploration,  
[http://www.righthemisphere.com/products/dexp/de\\_std.html](http://www.righthemisphere.com/products/dexp/de_std.html), 2008.

Úvod

Dvojný integrál

Trojný integrál

Souhrnné testy

Úlohy na procvičení

Odkazy

Titulní strana

Strana 160 z 160



Zpět

Vpřed

Přepnout režim obrazovky

Konec