

Přírodovědecká fakulta MU

**Ondřej Došlý — Jaromír Kuben**

# **KŘIVKOVÝ INTEGRÁL**

Brno 2005

Došlý Ondřej, Kuben Jaromír  
Křivkový integrál

# Předmluva

Toto skriptum je určeno pro posluchače distančního studia Přírodovědecké fakulty MU. Jeho obsahem je výklad křivkového a integrálu a některých bezprostředně souvisejících pojmů. Jde o standardní součást matematické analýzy, která má velký význam v aplikacích. Vznikala v průběhu minulého století a mj. reagovala na potřeby zejména fyziky. Je dobré si uvědomit, že většina matematiků této éry se nezabývala jen „čistou“ matematikou, ale byli to současně fyzikové, kartografové, mechanici a pod.

Zvládnutí této látky je poměrně obtížné, protože vyžaduje znalost zejména diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné i více proměnných. Další obtíž spočívá v tom, že je nutné zavést pojem *křivka*. Přestože jde o intuitivně jasný pojem, jeho matematická definice je poměrně komplikovaná. Pro srozumitelné vysvětlení pojmu křivkový integrál je nutné udělat rozumný kompromis mezi obecností, matematickou přesností a názorností výkladu. Pro případné zájemce o podrobnější výklad lze doporučit např. [1], [2] a [4]. Velmi pěkná, ale značně náročná (a obecná) je kniha [8]. Precizní výklad lze najít též v [11] a [12], kde obecnost je volena s ohledem na aplikace.

V textu je zařazena řada řešených i neřešených příkladů, které mají často fyzikální formulaci. Jejich počet by měl být dostatečný pro pokrytí potřeb cvičení i samostatné studium. Text byl vysázen pomocí sázecího systému  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ve formátu  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\varepsilon}$ . Obrázky byly připraveny programem  $\text{M}_{\text{E}}\text{T}_{\text{A}}\text{P}_{\text{O}}\text{S}T$ . Skriptum existuje i v elektronické podobě v hypertextovém formátu PDF.

Každá kapitola má svou pevnou strukturu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci v textu. K tomu využíváme ikony, jejichž význam si nyní vysvětlíme.

## Průvodce studiem

Prostřednictvím průvodce studiem vás chceme seznámit s tím, co vás v dané kapitole čeká, které části by měly být pro vás opakováním, na co je třeba se obzvláště zaměřit, kolik času je dané problematice věnováno v prezenčním studiu atd.



## Cíle

V části cíle se dozvíte, co všechno zvládnete a budete umět po prostudování dané kapitoly.





## **Příklad**

Touto ikonou jsou označeny všechny řešené příklady. Konec řešených příkladů je označen plným trojúhelníčkem.



## **Pojmy k zapamatování**

Pojmy zde uvedené jsou většinou nové a zcela zásadní pojmy, které je třeba umět přesně definovat. To znamená pojem nejen pochopit a umět ilustrovat na příkladech, ale také umět vyslovit jeho přesnou definici.



## **Kontrolní otázky**

Těmito otázkami si ověříte, zda jste daným pojmům porozuměli, zda si uvědomujete rozdíly mezi zdánlivě podobnými pojmy, zda dovedete uvést příklad ilustrující danou situaci atd.



## **Příklady k procvičení**

Tyto příklady slouží k tomu, abyste si důkladně procvičili probranou látku. Výsledky uvedených příkladů jsou zařazeny na konci studijního materiálu.



## **Klíč k příkladům k procvičení**

Na konci obou částí studijního materiálu je uveden klíč ke cvičením, který obsahuje výsledky neřešených příkladů.



## **Literatura**

Jedná se o literaturu použitou autory při vytváření tohoto studijního materiálu, nikoliv o literaturu doporučenou k dalšímu studiu. Pokud některou z uvedených publikací doporučujeme zájemcům, pak je to v textu spolu s odkazem na daný titul jasně uvedeno.



## **Rejstřík**

Rejstřík, uvedený na konci skript, poslouží ke snadné orientaci v textu.

# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>iii</b>
<b>1 Skalární a vektorové pole</b>	<b>1</b>
1.1 Úvod	1
1.2 Skalární pole	3
1.3 Vektorové pole	9
<b>2 Křivky</b>	<b>16</b>
2.1 Délka křivky	24
2.2 Přirozená parametrizace křivky	25
2.3 Orientace křivky	26
<b>3 Křivkový integrál I. druhu</b>	<b>29</b>
3.1 Definice křivkového integrálu I. druhu	29
3.2 Vlastnosti a výpočet křivkového integrálu I. druhu	31
3.3 Aplikace křivkového integrálu I. druhu	33
<b>4 Křivkový integrál II. druhu</b>	<b>44</b>
4.1 Definice křivkového integrálu II. druhu	44
4.2 Vlastnosti a výpočet křivkového integrálu II. druhu	46
4.3 Aplikace křivkového integrálu II. druhu	48
<b>5 Nezávislost na integrační cestě a vztah mezi integrály</b>	<b>52</b>
5.1 Nezávislost křivkového integrálu II. druhu na integrační cestě	53
5.2 Vztah mezi křivkovým integrálem I. a II. druhu	61
5.3 Integrační věta Greenova	62
<b>Klíč k příkladům k procvičení</b>	<b>65</b>
<b>Literatura</b>	<b>69</b>
<b>Rejstřík</b>	<b>70</b>

# Kapitola 1

## Skalární a vektorové pole

### 1.1. Úvod

#### Průvodce studiem



V mnoha fyzikálních partiích má důležitou úlohu pojem pole, který se používá pro kvantitativní popis části prostoru. Každému bodu přísluší právě jedna hodnota nějaké fyzikální veličiny. Jde-li o skalární veličinu, pak se pole nazývá skalární, jde-li o vektorovou veličinu, pak se pole nazývá vektorové.

Uvedeme příklady takových polí.

1. V každém bodě nerovnoměrně zahřátého tělesa je v čase  $t$  určitá teplota  $T$ , která je skalární veličinou. Část prostoru, v němž se toto těleso nachází, je *pole teplot* tohoto tělesa. Zároveň má ale toto těleso v každém bodě definovanou hustotu. Pak tuto část prostoru lze považovat za *pole hustot*. Ačkoliv jde o tutéž část prostoru, definují se na něm dvě různé fyzikální veličiny. Obě pole jsou skalární.
2. Každému bodu té části prostoru, v níž je přítomna atmosféra země, přísluší v daném čase určitý atmosférický tlak. Na tuto část prostoru lze pak pohlížet jako na skalární *pole atmosférického tlaku*. V uvedené části prostoru lze ovšem současně uvažovat vektorové pole *intenzity gravitačního pole* a skalární pole *gravitačního potenciálu*.
3. V elektrostati se zkoumá elektrostatičké pole, které je vytvořeno nabitou elektrickou částicí, umístěnou v bodě. Na každý jednotkový kladný náboj v okolí tohoto bodu působí podle Coulombova zákona síla, která se nazývá *intenzita elektrostatičkého pole*. Vytváří tak vektorové pole *elektrostatičké intenzity*. Zároveň každému bodu tohoto prostoru lze přiřadit hodnotu skalární veličiny, nazývanou *elektrostatičkým potenciálem*, který vytváří *pole elektrostatičkého potenciálu*.
4. Necht' je nějaká část prostoru (např. potrubí nebo koryto řeky) vyplněna proudící kapalinou. Každému bodu této části prostoru přísluší vektor vyjadřující okamžiči-

tou rychlost částice v tomto bodě. V tomto případě se jedná o *pole rychlostí proudící kapaliny*. Toto pole je vektorové.



## Cíle

Po prostudování této kapitoly budete schopni

- objasnit motivaci pro zavedení pojmů skalární a vektorové pole,
- zavést pojem skalárního pole a zavést veličiny, které toto pole charakterizují,
- zavést pojem skalárního pole a zavést veličiny, které toto pole charakterizují,
- výše uvedené pojmy ilustrovat na řešených a neřešených příkladech.

**Poznámka.** Pojem pole se ve fyzice používá nejméně dvojím způsobem:

1. K označení množiny hodnot jisté veličiny charakterizující nějaký jev. V tomto smyslu budeme pojem pole používat v dalším textu.
2. Pojmy jako gravitační pole, elektromagnetické pole označují reálné existující objekty. Tyto objekty mohou být charakterizovány množinou skalárních, vektorových (resp. tenzorových) veličin ve smyslu bodu 1 této poznámky.

Jestliže hodnota skalární, resp. vektorové veličiny v daném bodě závisí také na čase, pak se pole této veličiny nazývá *nestacionární pole*. Jestliže hodnota této veličiny na čase nezávisí, pak pole této veličiny se nazývá *statické pole* (ve speciálním případě též *stacionární*). V tomto skriptu se budeme zabývat pouze statickými poli.

Nyní utvoříme matematický model fyzikálního pole.

V případech skalárních, resp. vektorových fyzikálních polí je z matematického hlediska podstatné to, že každému bodu určité části fyzikálního prostoru, jehož matematickým modelem je euklidovský prostor  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$ , resp.  $\mathbb{R}^3$ , je přiřazeno právě jedno číslo, resp. právě jeden vektor. Toto přiřazení se nazývá *skalární*, resp. *vektorová funkce bodu*.

Pole pak matematicky definujeme následovně.

**Definice 1.1.** Necht'  $\Omega$  je podmnožina prostoru  $\mathbb{R}^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a  $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  skalární, resp.  $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^i$  vektorová funkce definovaná na  $\Omega$ . Pak dvojici  $(\Omega, U)$ , resp.  $(\Omega, F)$  nazveme *skalárním polem*, resp. *vektorovým polem*.

Všimněme si nejprve případu  $\mathbb{R}^3$ . Zvolíme-li kartézskou souřadnou soustavu s osami  $x, y, z$ , hodnota skalární funkce  $U$ , resp. vektorové funkce  $F$  bude závislá na těchto proměnných. Pak skalární, resp. vektorové pole budeme vyjadřovat pomocí těchto proměnných a zapisovat takto:

$$U = U(x, y, z), \quad F = F(x, y, z). \quad (1.1)$$

Vektor v  $\mathbb{R}^3$  je ovšem v souřadnicích popsán trojicí čísel, která se mění v závislosti na  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Označíme-li tyto složky  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  a  $R(x, y, z)$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = \\ &= P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Zde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  a  $\mathbf{k}$  značí jednotkové vektory ve směru souřadných os.

Analogicky v případě, kdy  $\Omega$  je rovinná množina, tj.  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , jsou  $U = U(x, y)$ , resp.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$  funkce dvou proměnných definované na  $\Omega$ . Pak dvojice  $(\Omega, U)$ , resp.  $(\Omega, \mathbf{F})$  se nazývá *rovinné skalární pole*, resp. *rovinné vektorové pole*.

Konečně v případě  $\Omega \subset \mathbb{R}^1$  jsou  $U = U(x)$ , resp.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x) = (P(x)) = P(x) \mathbf{i}$  *skalární pole na přímce*, resp. *vektorové pole na přímce*. S tímto případem se ale v následujícím textu nesetkáme.

V dalších odstavcích se budeme zabývat jednotlivými typy polí a jejich charakteristikami. Výsledky budeme vesměs odvozovat a formulovat pro pole v  $\mathbb{R}^3$ , jednorozměrný a dvojrozměrný případ je obvykle snadnou modifikací.

**Poznámka.** Pokud v dalším textu řekneme, že nějaké pole je spojitě, má parciální derivace a pod., budeme tím rozumět, že příslušnou vlastnost má funkce  $U$  v případě skalárního pole, resp. funkce  $P$ ,  $Q$  a  $R$  v případě vektorového pole.

## 1.2. Skalární pole

Skalární pole v  $\mathbb{R}^3$  jsme definovali dvojicí  $(\Omega, U)$ , kde  $U = U(x, y, z)$ . Při vyšetřování fyzikálních jevů ve skalárním poli je především potřebné vědět, jak se mění hodnota  $U$  tohoto pole při přechodu od jednoho bodu pole k druhému.

Nejprve si všimneme těch bodů množiny  $\Omega$ , na nichž má funkce  $U$  stejnou hodnotu, kterou označíme  $C$ . Tyto body vyhovují rovnici

$$U(x, y, z) = C, \tag{1.2}$$

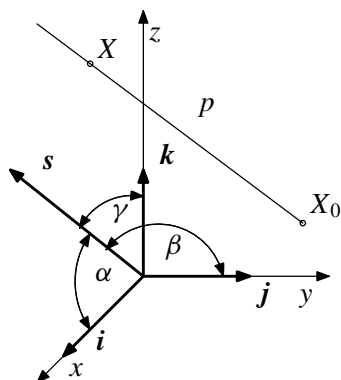
kde  $C \in \mathbb{R}$  je libovolné číslo.

Množiny (v „rozumném“ případě plochy) určené rovnicí (1.2) se nazývají *hladiny* nebo *ekvipotenciální plochy* skalárního pole  $(\Omega, U)$ .

Příkladem hladin mohou sloužit *izotermické plochy* v teplotním poli nebo *izobarické plochy* v poli atmosférického tlaku.

Podobně můžeme postupovat v případě rovinného skalárního pole. Jestliže množina  $\Omega$  leží v  $\mathbb{R}^2$ , má rovnice (1.2) tvar  $U(x, y) = C$  a určuje tzv. *hladiny* nebo *ekvipotenciální křivky* rovinného skalárního pole (v „rozumném“ případě jde skutečně o křivky). Nejnázornějším jejich příkladem jsou vrstevnice na topografické mapě, které spojují body zemského povrchu o stejné nadmořské výšce.





Obr. 1.1

Dále zavedeme pojmy *derivace funkce*  $U$  v daném směru a *gradient funkce*  $U$ .

Uvažujme skalární pole  $(\Omega, U)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Nechť  $X_0$  je libovolný vnitřní bod množiny  $\Omega$  a  $s$  libovolný nenulový vektor. Na polopřímce  $p$ , která vychází z bodu  $X_0$  a jejíž směr je dán vektorem  $s$ , zvolíme bod  $X$ , kde  $X \in \Omega$  (viz obr. 1.1).

Vypočteme hodnoty funkce  $U$  v jejích bodech  $X_0$  a  $X$ , tj. hodnoty  $U(X_0)$  a  $U(X)$ . Změnu funkce  $U$  při přechodu od bodu  $X_0$  k bodu  $X$  po přímce  $p$  nazveme *přírůstkem funkce*  $U$ .

Vyjádříme ji rozdílem hodnot  $U(X)$  a  $U(X_0)$ , tedy  $U(X) - U(X_0)$ . Vydělíme-li přírůstek vzdáleností bodů  $X_0$  a  $X$ , pak podíl

$$\frac{U(X) - U(X_0)}{|\overrightarrow{X_0 X}|},$$

kde  $|\cdot|$  značí velikost vektoru, charakterizuje průměrnou změnu hodnot funkce  $U$  při přechodu od bodu  $X_0$  k bodu  $X$  po polopřímce  $p$ , tj. velikost změny připadající v průměru na jednotku délky.

Velikost okamžité změny funkce  $U$  v bodě  $X$  pak definujeme takto:

**Definice 1.2.** Pokud existuje limita

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in p}} \frac{U(X) - U(X_0)}{|\overrightarrow{X_0 X}|} = \frac{\partial U}{\partial s}(X_0), \quad (1.3)$$

nazýváme ji *derivací funkce*  $U$  v bodě  $X_0$  ve směru vektoru  $s$ . Častěji ji budeme označovat  $U'_s(X_0)$ .

Interpretace derivace funkce  $U$  v bodě  $X_0$  ve směru vektoru  $s$  je následující:

Číslo  $U'_s(X_0)$  charakterizuje, jaká je rychlost změny hodnot veličiny  $U$  v bodě  $X_0$  ve směru vektoru  $s$ . Čím větší je  $|U'_s(X_0)|$ , tím rychleji se mění (zvětšují se nebo zmenšují podle toho, zda je  $U'_s(X_0) > 0$  nebo  $U'_s(X_0) < 0$ ) hodnoty funkce  $U$  při přechodu od bodu  $X_0$  k blízkému bodu ve směru vektoru  $s$ .

Uvedeme podmínky zaručující existenci  $U'_s(X_0)$  a vzorec pro její výpočet.

Uvažujme kartézskou souřadnou soustavu s jednotkovými vektory  $i$ ,  $j$  a  $k$ . V této soustavě mají body  $X_0$  a  $X$  souřadnice  $[x_0, y_0, z_0]$  a  $[x, y, z]$ .

Nechť vektor  $s^0$  je jednotkový vektor, souhlasně kolineární s vektorem  $s$ . Vyjádříme-li jej v souřadnicích, dostaneme

$$s^0 = \cos \alpha i + \cos \beta j + \cos \gamma k,$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  jsou úhly vektoru  $s$  s vektory  $i$ ,  $j$  a  $k$  (viz obr. 1.1).

Pak lze polopřímku  $p$  vyjádřit parametrickými rovnicemi

$$x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cos \gamma, \quad \text{kde } t \geq 0. \quad (1.4)$$

Zavedeme funkci  $\Phi(t)$  tak, že za proměnné  $x$ ,  $y$  a  $z$  funkce  $U$  dosadíme vyjádření z parametrických rovnic přímky  $p$ , tedy

$$\Phi(t) = U(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma).$$

Přírůstek funkce  $U$  lze nyní vyjádřit pomocí proměnné  $t$ :

$$U(X) - U(X_0) = \Phi(t) - \Phi(0).$$

Určíme velikost vektoru  $\overrightarrow{X_0X}$ :

$$|\overrightarrow{X_0X}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = t,$$

neboť  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = |\mathbf{s}^0| = 1$ .

Odtud máme

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}(X_0) = \lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in p}} \frac{U(X) - U(X_0)}{|\overrightarrow{X_0X}|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t - 0} = \Phi'_+(0),$$

tj. derivace funkce  $U$  v bodě  $X_0$  ve směru vektoru  $\mathbf{s}$  existuje právě tehdy, když existuje derivace  $\Phi'_+(0)$  funkce  $\Phi(t)$  v bodě  $t = 0$  zprava.

Z rovnosti  $U'_s(X_0) = \Phi'_+(0)$  odvodíme vzorec pro výpočet derivace funkce  $U$  ve směru vektoru  $\mathbf{s}$ .

Existují-li spojitě parciální derivace  $U'_x(X_0)$ ,  $U'_y(X_0)$  a  $U'_z(X_0)$ , pak je funkce  $U$  diferencovatelná v bodě  $X_0$  a podle pravidel pro derivaci složené funkce více proměnných dostaneme s ohledem na (1.4)

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= U'_x(X_0) x'(0) + U'_y(X_0) y'(0) + U'_z(X_0) z'(0) = \\ &= U'_x(X_0) \cos \alpha + U'_y(X_0) \cos \beta + U'_z(X_0) \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Odtud vyplývá, že existence spojitých parciálních derivací  $U'_x$ ,  $U'_y$  a  $U'_z$  v bodě  $X_0$  implikuje existenci derivace funkce  $U$  v tomto bodě v libovolném směru  $\mathbf{s}$ .

Poslední výraz lze chápat jako skalární součin jednotkového vektoru  $\mathbf{s}^0$  se souřadnicemi  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  a  $\cos \gamma$  a vektoru, majícího souřadnice  $U'_x(X_0)$ ,  $U'_y(X_0)$  a  $U'_z(X_0)$ . Proto je účelné zavést následující pojem.

**Definice 1.3.** Necht' funkce  $U$  má v bodě  $X_0$  parciální derivace prvního řádu. Pak vektor

$$\text{grad } U(X_0) = U'_x(X_0) \mathbf{i} + U'_y(X_0) \mathbf{j} + U'_z(X_0) \mathbf{k} \quad (1.6)$$

nazveme *gradientem funkce  $U$  v bodě  $X_0$* .

Ze vztahu (1.5) pak plyne, že derivaci funkce  $U$  ve směru vektoru  $s$  v bodě  $X_0$  lze vyjádřit pomocí skalárního součinu gradientu funkce  $U$  v bodě  $X_0$  a jednotkového vektoru  $s^0$ . Přesněji platí:

**Věta 1.1.** *Nechť funkce  $U$  má v okolí bodu  $X_0$  spojité první parciální derivace. Pak*

$$U'_s(X_0) = \text{grad } U(X_0) \cdot s^0. \quad (1.7)$$

Uvedeme některé vlastnosti gradientu.

1. Jestliže  $s = i$ , pak  $U'_i(X_0) = U'_x(X_0)$ , tj. parciální derivace funkce  $U$  podle proměnné  $x$  je derivací skalární funkce  $U$  ve směru jednotkového vektoru  $i$ . Analogicky platí  $U'_j(X_0) = U'_y(X_0)$  a  $U'_k(X_0) = U'_z(X_0)$ .
2. Podle věty 1.1 a vlastností skalárního součinu platí, že pokud  $\text{grad } U(X_0) \neq \mathbf{0}$ , je

$$U'_s(X_0) = |\text{grad } U(X_0)| \cos \varphi,$$

kde  $0 \leq \varphi \leq \pi$  je úhel mezi vektory  $\text{grad } U(X_0)$  a  $s^0$ . Největší hodnota, které může nabýt funkce kosinus, je rovna jedné a na předchozím intervalu je to pouze v bodě  $\varphi = 0$ . Odtud plyne, že  $U'_s(X_0)$  nabývá maximální hodnoty pro úhel  $\varphi = 0$ , tedy když vektory  $\text{grad } U(X_0)$  a  $s^0$  jsou souhlasně kolineární.

Jinými slovy, (nenulový)  $\text{grad } U(X_0)$  je vektor, v jehož směru je derivace funkce  $U$  v bodě  $X_0$  maximální. Ta je pak rovna velikosti tohoto vektoru, tj.

$$\frac{\partial U(X_0)}{\partial \text{grad } U(X_0)} = |\text{grad } U(X_0)| = \max_{s \neq \mathbf{0}} [U'_s(X_0)].$$

Analogicky pro  $\varphi = \pi$  je kosinus roven číslu  $-1$ , a tudíž  $-\text{grad } U(X_0)$  je směr, v němž je derivace funkce  $U$  v bodě  $X_0$  minimální, tj.

$$\frac{\partial U(X_0)}{\partial [-\text{grad } U(X_0)]} = -|\text{grad } U(X_0)| = \min_{s \neq \mathbf{0}} [U'_s(X_0)].$$

3. Geometrický význam gradientu funkce  $U$  je následující.

Plocha o rovnici  $U(x, y, z) = C$ , kde  $U(x_0, y_0, z_0) = C$ , je ekvipotenciální plochou skalárního pole  $(\Omega, U)$  procházející bodem  $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ . Rovnice tečné roviny sestrojené k ploše  $U(x, y, z)$  v bodě  $[x_0, y_0, z_0]$  je v případě nenulového gradientu

$$U'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + U'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + U'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

(viz např. [1, str. 132]). Tedy normálový vektor této roviny je až na násobek gradientem skalární funkce  $U$ . Odtud plyne, že gradient funkce  $U$  je kolmý k hladinám skalárního pole.

**Poznámka.** Vše, co bylo v předchozích odstavcích řečeno pro případ skalárního pole v  $\mathbb{R}^3$ , platí s malými obměnami i pro rovinné skalární pole. Zejména

$$\text{grad } U(X_0) = U'_x(X_0) \mathbf{i} + U'_y(X_0) \mathbf{j}.$$

Dále (nenulový) gradient je normálovým vektorem tečny k hladině procházející bodem  $X_0$ .

V rovinném případě si gradient můžeme přiblížit následujícím způsobem. Představme si lyžaře stojícího na šikmém svahu (jenž je grafem funkce  $U$ ) tak, že směr lyží je kolmý k vrstevnicím a špičky míří vzhůru. Pak velikost gradientu je rovna tangentě úhlu, který svírají lyže s vodorovnou rovinou. Kolmý průmět lyží do vodorovné roviny má stejný směr a orientaci (určenou špičkami) jako gradient.

V následujícím příkladu si ukážeme výpočet uvedených charakteristik skalárního pole.

**Příklad 1.1.** Je dáno skalární pole  $(\Omega, U)$ , kde  $\Omega = \{[x, y] \in R^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} \leq 1\}$ ,  $U = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$  a body  $A[3, -1]$ ,  $B[1, 4]$ . Určete:



1. gradient funkce  $U$  v bodech  $A$  a  $B$ ,
2. derivaci funkce  $U$  ve směru vektoru  $\overrightarrow{AB}$  v bodech  $A$  a  $B$ ,
3. bod  $C$  ležící mezi  $A$  a  $B$ , v němž je derivace funkce  $U$  ve směru  $\overrightarrow{AB}$  rovna 0,
4. derivaci funkce  $U$  v bodě  $A$  ve směru  $\text{grad } U(A)$ .

**Řešení.** Ze souřadnic bodů  $A$  a  $B$  určíme souřadnice vektoru  $s = \overrightarrow{AB} = (-2, 5)$ . Jeho velikost  $|s| = \sqrt{29}$ . Tedy jednotkový vektor  $s^0$  bude:

$$s^0 = \frac{s}{|s|} = \frac{-2}{\sqrt{29}} \mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}} \mathbf{j}.$$

Body  $A$  a  $B$  je určena přímka  $p$ , jejíž rovnice je  $5x + 2y = 13$ .

Graf funkce  $U$ , úsečka přímky  $p$  mezi body  $A$  a  $B$  a průsečnice roviny, která je rovnoběžná s osou  $z$  a prochází přímkou  $p$ , s grafem funkce  $U$  jsou znázorněny na obr. 1.2.

Vypočteme funkční hodnoty skalární funkce  $U$ :

$$U(A) = 4 - \frac{3^2}{4} - \frac{1}{9} = \frac{59}{36} \doteq 1,639, \quad U(B) = 4 - \frac{1}{4} - \frac{4^2}{9} = \frac{71}{36} \doteq 1,972.$$

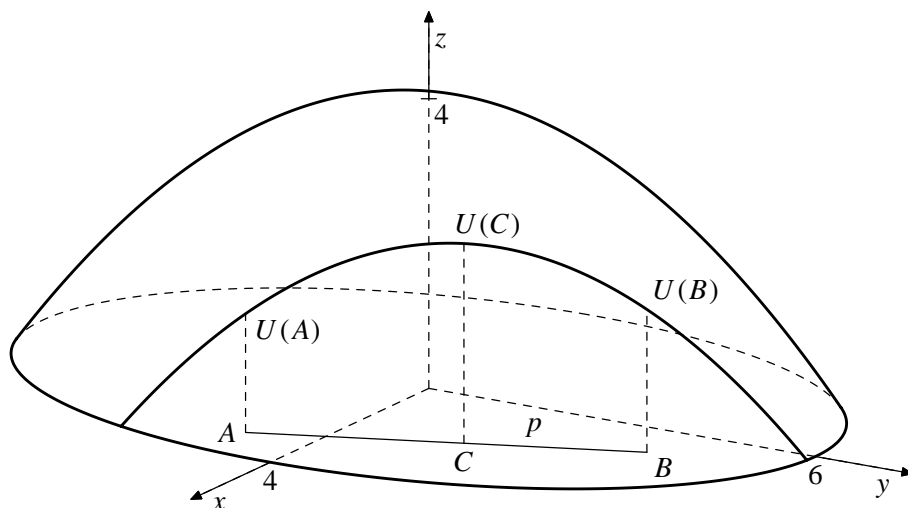
Hodnoty  $U(A)$  a  $U(B)$  jsou znázorněny na obr. 1.2.

Ad 1. Vypočteme gradient v obecném bodě  $X$ . Podle (1.6) bude:

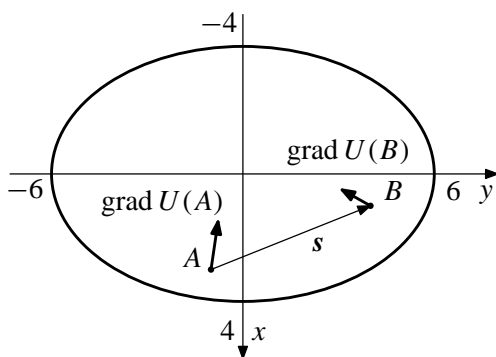
$$\text{grad } U(X) = -\frac{x}{2} \mathbf{i} - \frac{2y}{9} \mathbf{j}.$$

Po dosazení souřadnic bodů  $A$  a  $B$  dostaneme gradienty v těchto bodech:

$$\begin{aligned} \text{grad } U(A) &= -\frac{3}{2} \mathbf{i} + \frac{2}{9} \mathbf{j}, \\ \text{grad } U(B) &= -\frac{1}{2} \mathbf{i} - \frac{8}{9} \mathbf{j}. \end{aligned}$$



Obr. 1.2

Obr. 1.3: Oblast  $\Omega$ 

Na obr. 1.3 jsou znázorněny obor  $\Omega$ , vektory  $\text{grad } U(A)$  a  $\text{grad } U(B)$  a vektor  $s$ .

Získané výsledky lze interpretovat takto: Skalární funkce  $U$  představuje nadmořskou výšku, hodnoty  $\text{grad } U(A)$  a  $\text{grad } U(B)$  pak představují směry, v nichž je nárůst skalární funkce největší.

Ad 2. Vypočteme derivaci funkce  $U$  podle směru  $s$  v obecném bodě podle (1.7):

$$U'_s(X) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{29}} - \frac{2y}{9} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{9x - 10y}{9\sqrt{29}}.$$

Po dosazení souřadnic bodů máme:

$$U'_s(A) = \frac{37}{9\sqrt{29}} \doteq 0,763, \quad U'_s(B) = \frac{-31}{9\sqrt{29}} \doteq -0,640.$$

Tyto výsledky lze interpretovat takto: Budeme-li postupovat z bodu  $A$  ve směru vektoru  $s$ , pak změna je taková, že na kroku délky  $\delta$ , kde  $\delta > 0$  je malé, ve směru  $s$  funkce  $U$  vzroste přibližně o hodnotu rovnu  $0,763\delta$ . V bodě  $B$  pak na kroku délky  $\delta$  funkce  $U$  poklesne přibližně o hodnotu  $-0,640\delta$ .

Ad 3. Bod  $C$ , v němž je derivace funkce  $U$  ve směru vektoru  $\overrightarrow{AB}$  rovna 0, leží na přímkce  $p$ , určené body  $A$  a  $B$ .

K určení jeho souřadnic potřebujeme další rovnici, kterou určíme z podmínky  $U'_s(X) = \frac{9x-10y}{9\sqrt{29}} = 0$ . Hledaná rovnice je  $9x - 10y = 0$ .

Řešením této rovnice a rovnice  $5x + 2y = 13$  dostaneme souřadnice bodu  $C$ :

$$x = 130/68 \doteq 1,91 \quad \text{a} \quad y = 117/68 \doteq 1,72.$$

Vidíme tedy, že při pohybu po přímce  $p$  z bodu  $A$  do bodu  $C$  hodnoty funkce  $U$  rostou, z bodu  $C$  do bodu  $B$  hodnoty funkce  $U$  klesají.

Ad 4. Derivaci funkce  $U$  podle vektoru  $\text{grad } U(A)$  určíme pomocí (1.7):

$$\frac{\partial U(A)}{\partial \text{grad } U(A)} = |\text{grad } U(A)| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} \doteq 1,516.$$

Budeme-li tedy z bodu  $A$  postupovat ve směru  $\text{grad } U(A)$ , pak na kroku délky  $\delta$  v tomto směru vzroste funkce  $U$  přibližně o hodnotu  $1,516\delta$ . Porovnáme-li derivaci v bodě  $A$  ve směru vektoru  $s$  s derivací ve směru gradientu  $\text{grad } U(A)$ , vidíme, že ve směru gradientu je okamžitá rychlost změny téměř dvojnásobná. ▲

V předchozí části jsme hovořili o gradientu skalárního pole v bodě. Nyní zavedeme funkci gradient skalárního pole.

**Definice 1.4.** Necht'  $(\Omega, U)$  je skalární pole. Jestliže v každém bodě  $\Omega$  je definována vektorová funkce  $\text{grad } U$ , pak se tato funkce nazývá *gradient skalárního pole*  $(\Omega, U)$ . Každému skalárnímu poli  $(\Omega, U)$  majícímu potřebné derivace je tedy jednoznačně přiřazeno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde

$$\mathbf{F} = \text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (1.8)$$

### 1.3. Vektorové pole

Vektorové pole jsme definovali jako dvojici  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde ve zvolené kartézské souřadné soustavě je vektorová funkce  $\mathbf{F}$  vyjádřena pomocí svých složek

$$\mathbf{F} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}.$$

O funkci  $\mathbf{F}$  předpokládáme, že je spojitá na  $\Omega$  a má tam spojitě parciální derivace podle všech svých proměnných (tj. funkce  $P$ ,  $Q$  a  $R$  mají uvedené vlastnosti).

Názornou představu o vektorovém poli dávají tzv. vektorové křivky.

**Definice 1.5.** Vektorovou křivkou případně proudnicí vektorového pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  se nazývá orientovaná regulární křivka ležící v  $\Omega$ , jejíž tečný vektor je v každém bodě  $A$  rovnoběžný s vektorem  $\mathbf{F}(A)$ .

**Poznámka.** Pojmy regulární křivka, orientovaná křivka a pod. budou zavedeny v následující kapitole. Pro tuto chvíli postačíme se znalostmi z předchozích partií analýzy.

Například ve vektorovém poli rychlostí proudící kapaliny jsou vektorovými křivkami trajektorie pohybujících se jednotlivých částic tekutiny. V poli intenzit elektrostatického pole vytvořeného bodovým nábojem jsou vektorovými křivkami polopřímky vycházející z bodu, resp. vcházející do bodu, v němž je umístěný náboj, podle toho, zda je tento náboj kladný, resp. záporný.

**Poznámka.** Vektorové křivky v silovém poli se nazývají *siločáry*.

Odvodíme diferenciální rovnice pro vektorové křivky. Nechť vektorová křivka  $K$  vektorového pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  je ve zvolené kartézské souřadné soustavě vyjádřena parametricky polohovým vektorem

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in J.$$

Vektor  $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$  je tečný vektor křivky  $K$  v jejím bodě  $\mathbf{r}(t)$ . Protože tečný vektor křivky  $K$  a vektor  $\mathbf{F}$  jsou kolineární, plyne odtud, že

$$x'(t) = \lambda P(x, y, z), \quad y'(t) = \lambda Q(x, y, z), \quad z'(t) = \lambda R(x, y, z), \quad (1.9)$$

kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  je parametr. Z této soustavy diferenciálních rovnic hledané vektorové křivky určíme.

Předchozí soustava se často zapisuje v tzv. *symetrickém normálním tvaru*

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (1.10)$$

Podrobnosti lze nalézt např. v [9]. Integrace této soustavy je obecně obtížná a souvisí s parciálními diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Řešení obvykle dostáváme v implicitním tvaru, tj. vektorové křivky jsou průsečnicemi dvou soustav ploch ve tvaru  $G_1(x, y, z, c) = 0$  a  $G_2(x, y, z, k) = 0$ , kde  $c, k \in \mathbb{R}$ . V následujícím příkladu ukážeme, jak je možné integraci někdy provést.



**Příklad 1.2.** Určete rovnice siločar vektorového pole  $(\Omega, \mathbf{H})$ , kde

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{[0, 0, z] : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{a} \quad \mathbf{H} = \frac{I(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})}{2\pi(x^2 + y^2)},$$

tj.  $\Omega$  je celý prostor  $\mathbb{R}^3$  bez osy  $z$ . Přitom  $\mathbf{H}$  je vektor intenzity magnetického pole, které je vytvořeno neomezeným lineárním proudovodičem umístěným v ose  $z$ , jímž protéká proud  $I$  ampérů.

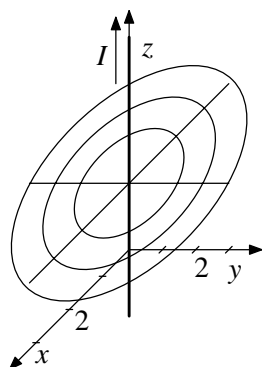
**Řešení.** Pro určení siločar máme soustavu diferenciálních rovnic:

$$x'(t) = \lambda \frac{-Iy}{2\pi(x^2 + y^2)}, \quad y'(t) = \lambda \frac{Ix}{2\pi(x^2 + y^2)}, \quad z'(t) = 0,$$

resp.

$$\frac{dx}{\frac{-Iy}{2\pi(x^2 + y^2)}} = \frac{dy}{\frac{Ix}{2\pi(x^2 + y^2)}} = \frac{dz}{0}.$$

(Zápis s nulou ve jmenovateli chápeme jako formální zlomek.) Z poslední rovnice ihned plyne, že  $z(t) = k$ , kde  $k \in \mathbb{R}$  je integrační konstanta. Jedna soustava ploch je tedy tvořena rovinami kolmými k ose  $z$ .



Obr. 1.4

Dále z rovnice

$$\frac{dx}{\frac{-Iy}{2\pi(x^2+y^2)}} = \frac{dy}{\frac{Ix}{2\pi(x^2+y^2)}}$$

dostaneme po úpravě diferenciální rovnici se separovanými proměnnými

$$x dx = -y dy,$$

která má řešení  $x^2 + y^2 = c^2$ , kde  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  je integrační konstanta (smysl má zřejmě jen kladná pravá strana). Druhá soustava ploch je tudíž tvořena systémem válcových ploch s osami v ose  $z$ .

Siločáry jsou pak soustředné kružnice, které leží v rovině  $z = k$ , mají středy na ose  $z$  a poloměry rovné  $|c|$ . Na obr. 1.4 jsou znázorněny siločáry pro  $z = 2$  a hodnoty  $c = 1, 2, 3$ . ▲

Nejvýznamnějšími diferenciálními charakteristikami vektorového pole jsou divergence a rotace tohoto pole. V následujících definicích předpokládáme, že existují potřebné derivace.

**Definice 1.6.** Divergence vektorového pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  v  $\mathbb{R}^3$  je skalární funkce, kterou označujeme  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  a definujeme vztahem

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (1.11)$$

**Definice 1.7.** Rotace vektorového pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  v  $\mathbb{R}^3$  je vektorová funkce, kterou označujeme  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  a definujeme vztahem

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \quad (1.12)$$

což lze zapsat symbolicky pomocí determinantu takto:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

Přitom součinem tzv. symbolických operátorů  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$  s některou z funkcí  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  rozumíme parciální derivaci této funkce podle příslušné proměnné. Tedy  $(\frac{\partial}{\partial x})Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$  a pod.

**Poznámka.** Zatímco definice divergence vektorového pole se snadno přenese na rovinné vektorové pole, popř. vektorové pole na přímce, je rotace definována pouze pro třírozměrné vektorové pole.



Fyzikálně lze interpretovat tyto charakteristiky následovně:

Uvažujme stacionární proudění kapaliny, jejíž rychlost je charakterizovaná vektorovým polem  $\mathbf{F}$ . Pak pro  $\operatorname{div} \mathbf{F}(A) > 0$  přestavuje bod  $A$  *zřídlo* o vydatnosti  $\operatorname{div} \mathbf{F}(A)$ . V tomto bodě tedy kapalina přibývá (např. jsou v ní tající kousky ledu). Podobně pro  $\operatorname{div} \mathbf{F}(A) < 0$  přestavuje bod  $A$  *noru* o vydatnosti  $\operatorname{div} \mathbf{F}(A)$ . V tomto bodě tedy kapalina ubývá (např. zamrzá nebo se vypařuje). Směr vektoru  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  určuje směr osy, kolem níž se kapalina v malém okolí uvažovaného bodu otáčí jako celek, velikost vektoru  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  určuje dvojnásobek úhlové rychlosti tohoto otáčení.

Jestliže  $\mathbf{F}$  má význam vektoru elektrické indukce  $\mathbf{D}$ , pak  $\operatorname{div} \mathbf{F}$  značí objemovou hustotu náboje, budícího toto pole.

**Definice 1.8.** Jestliže  $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$  pro každý bod  $z \Omega$ , pak pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  se nazývá *nezřídlové* nebo *solenoidální*.

Podrobněji se k významu těchto dvou diferenciálních charakteristik pole vrátíme později. Významnou roli hrají např. v Maxwellových<sup>1</sup> rovnicích:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho^*}{\varepsilon} \quad (\text{zřídlovost elektrostatického pole}), & \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{nezřídlovost magnetického pole}), & \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$



**Příklad 1.3.** Je dáno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\Omega = \mathbb{R}^3$  a  $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$ . Určete divergenci a rotaci  $\mathbf{F}$  v bodě  $A[3, -2, 4]$ .

*Řešení.* Nejdříve vypočteme divergenci v obecném bodě. Podle (1.11) dostaneme:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial(x - z)}{\partial x} + \frac{\partial(-2)}{\partial y} + \frac{\partial(y^3)}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

To značí, že divergence je v každém bodě prostoru  $\Omega$  stejná.

Vypočteme rotaci v obecném bodě. Podle (1.13) bude:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x - z & -2 & y^3 \end{vmatrix}.$$

Determinant rozvineme podle prvního řádku:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial(y^3)}{\partial y} - \frac{\partial(-2)}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial(y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x - z)}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial(-2)}{\partial x} - \frac{\partial(x - z)}{\partial y} \right).$$

Po výpočtu parciálních derivací a úpravě dostaneme  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 3y^2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ . V zadaném bodě bude  $\operatorname{rot} \mathbf{F}(A) = 12\mathbf{i} - \mathbf{j}$ . ▲

<sup>1</sup>**James Clerk Maxwell** (1831–1879) (čti meksvel) — anglický fyzik a mechanik. Zabýval se mj. matematickou fyzikou (zavedl do fyziky matematické metody), teorií pružnosti a stabilitou pohybu. Rozvinul matematickou teorii elektromagnetického pole, jehož zákony vyjádřil ve tvaru soustavy parciálních diferenciálních rovnic.

**Poznámka.** Pro označení předchozích charakteristik se často používá tzv. symbolický *Hamiltonův*<sup>1</sup> operátor  $\nabla$  (čti *nabla*). Je definován vztahem

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Jde o jakýsi symbolický vektor (chybí funkce, která se má derivovat), s jehož pomocí lze předchozí charakteristiky elegantně vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \nabla U && (\text{násobek vektoru skalárem — viz (1.8)}), \\ \text{div } \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} && (\text{skalární součin dvou vektorů — viz (1.11)}), \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \nabla \times \mathbf{F} && (\text{vektorový součin dvou vektorů — viz (1.13)}). \end{aligned}$$

Užitím této symboliky lze snadno formálně odvodit pomocí pravidel vektorové algebry některé užitečné vzorce (korektní ověření se provádí přímým výpočtem). Např. platí (pokud existují potřebné derivace)

$$\text{rot grad } U = \mathbf{0} \quad \text{nebo} \quad \text{div rot } \mathbf{F} = 0,$$

což má v nové symbolice podobu

$$\nabla \times \nabla U = \mathbf{0} \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Více viz např. [1, str. 258]

## Pojmy k zapamatování

- skalární a vektorové pole,
- ekvipotenciální plochy a křivky (vrstevnice) skalárního pole,
- gradient/derivace skalárního pole,
- siločára vektorového pole,
- divergence a zřídlo vektorového pole,
- rotace vektorového pole.

Σ

## Kontrolní otázky

1. Jaký je rozdíl mezi skalárním a vektorovým polem?
2. Je gravitační pole Slunce skalární nebo vektorové pole? Zdůvodněte.
3. Závisí-li skalární pole na dvou proměnných, jaký „geografický“ význam mají ekvipotenciální křivky?
4. Jaký tvar mají siločáry gravitačního pole Slunce?

?

<sup>1</sup>**William Rowan Hamilton** (1805–1865) (čti hemilton) — irský matematik. Zabýval se matematickou optikou, mechanikou a variačním počtem. Vymyslel kvaterniony a zavedl pojem *vektor*. Pracoval též v geometrii, algebře a diferenciálních rovnicích. Ve 13 letech mluvil obstojně třinácti jazyky.



## Příklady k procvičení

1. V rovinném skalárním poli  $(\Omega, U)$  je zadána skalární funkce  $U$  předpisem:

A)  $u = 4 - 2x - \frac{4}{3}y,$

D)  $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9},$

B)  $u = \sqrt{25 - x^2 - y^2},$

E)  $u = \sqrt{16 - y^2},$

C)  $u = 16 - \sqrt{x^2 + y^2},$

F)  $u = 4 - x^2 + y^2, z \geq 0.$

Dále jsou dány body  $R[2, 0], S[0, 3], T[2, 3], O[0, 0]$  a vektory  $\mathbf{a} = \overrightarrow{RO}, \mathbf{b} = \overrightarrow{SO}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OT}$ .  
Náčrtněte graf funkce  $U$  a stanovte pro ni:

a) hladiny,

b) funkční hodnoty v bodech  $R, S, T,$

c) gradienty v bodech  $R, S, T,$

d) derivace ve směru vektorů v bodech  $U'_a(R), U'_b(S), U'_c(T).$

2. V prostorovém skalárním poli  $(\Omega, U)$  je dán vektor  $\mathbf{q} = (1, 4, -2),$  bod  $R[2, -1, 3]$  a skalární funkce  $U$  předpisem:

A)  $U = 2(x - 1)^2 + 3(y + 2)^2 + z^2,$

C)  $U = 4(x - 1) + 3y^2 + 5z^2,$

B)  $U = -x^2 + 2(y + 1)^2 - (z - 1)^2,$

D)  $U = \frac{z}{3} - 4xy.$

Určete:

a) hodnotu funkce  $U(R),$

b) hladinu funkce  $U,$  procházející bodem  $R,$

c) gradient funkce  $U$  v bodě  $R,$

d) derivaci funkce  $U$  v bodě  $R$  ve směru vektoru  $\mathbf{l} = \text{grad } U(R),$

e) derivaci funkce  $U$  v bodě  $R$  ve směru vektoru  $\mathbf{q}.$

3. V prostorovém skalárním poli  $(\Omega, U)$  je zadána skalární funkce  $U$  a bod  $A:$

a)  $U = x^2 + y^2 + z^2 - 16, \quad A[0, 2, -1],$

b)  $U = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad A[2, 0, 1],$

c)  $U = \ln(x^2 - y^2 + z^2), \quad A[1, 1, 1].$

Určete směr, v němž funkce  $U$  v bodě  $A$  klesá nejrychleji, a velikost tohoto klesání.

4. Je dáno skalární pole  $(\Omega, U),$  kde  $U = 2x^2 - y^2 + 3xz + 2y + 5.$  Určete bod  $B,$  v němž je derivace funkce  $U$  v libovolném směru rovna nule.

5. Vypočítejte divergenci a rotaci následujících vektorových polí :

a)  $\mathbf{E} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k},$

b)  $\mathbf{F} = (y + z) \mathbf{i} + (x + z) \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k},$

c)  $\mathbf{G} = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k},$

d)  $\mathbf{H} = -\frac{2Iy}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{2Ix}{x^2+y^2} \mathbf{j}$ , kde  $I$  je konstanta,

e)  $\mathbf{K} = x^2y \mathbf{i} + xy^2 \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ ,

f)  $\mathbf{L} = (y^2 - z^2) \mathbf{i} + (z^2 - x^2) \mathbf{j} + (x^2 - y^2) \mathbf{k}$ ,

g)  $\mathbf{M} = (y - z) \mathbf{i} + (z - x) \mathbf{j} + (x - y) \mathbf{k}$ ,

h)  $\mathbf{N} = -\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ .

6. Najděte vektorovou křivku vektorového pole  $(\mathbb{R}^3, \mathbf{F})$  procházející bodem  $A$ .

a)  $\mathbf{F} = x \mathbf{i} - y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $A[1, 1, 2]$ .

b)  $\mathbf{F} = -yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ ,  $A[1, 0, 0]$ .

c)  $\mathbf{F} = y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $A[1, 0, -1]$ .

d)  $\mathbf{F} = xy^2 \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j} + z(x^2 + y^2) \mathbf{k}$ ,  $A[1, 0, -1]$ .

# Kapitola 2

## Křivky



### Průvodce studiem

V tomto oddílu uvedeme některé základní informace o křivkách, které budeme v dalším výkladu potřebovat. Současně uvedeme grafy některých často používaných křivek, na nichž budeme příslušné pojmy demonstrovat.

V inženýrských aplikacích chápeme intuitivně pod pojmem křivka čáru (trajektorii), kterou opisuje bod při svém spojitém pohybu, tj. množinu všech poloh, které bod zaujal během svého pohybu.



### Cíle

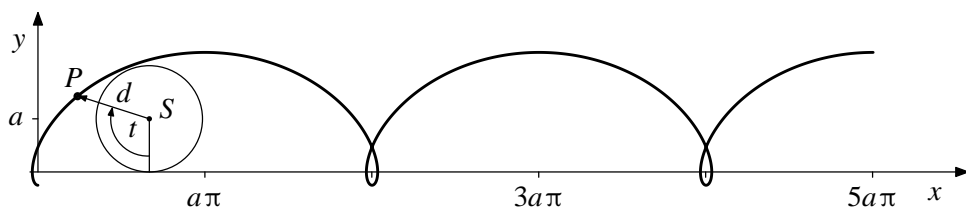
Po prostudování této kapitoly budete znát pojmy

- parametricky zadaná křivka,
- tečný a normálový vektor rovinné křivky,
- parametricky zadaná prostorová křivka,
- délka rovinné a prostorové křivky,
- parametrizace a orientace křivky.



**Příklad 2.1.** Najděte souřadnice hmotného bodu pohybujícího se po *prodloužené cykloidě*, znázorněné na obr. 2.1. Prodlouženou cykloidu opisuje bod nacházející se v rovině kružnice, mající poloměr  $a$ , která se kotálí po přímce. Bod je s kružnicí pevně spojený a jeho vzdálenost od středu kružnice  $S$  je rovna  $d$ , přičemž  $d > a$ .

*Řešení.* Označme  $t$  úhel, který svírá průvodič bodu  $P$ , opisujícího prodlouženou cykloidu, s kolmicí, sestrojenou ze středu  $S$  kotálející se kružnice na osu  $x$ . Tento úhel je orientován po směru pohybu hodinových ručiček. V kartézské souřadné soustavě jsou souřadnice bodu  $S$  pak  $x = at$  (délka kruhového oblouku odpovídajícího úhlu  $t$ ) a  $y = a$ .



Obr. 2.1 : Prodloužená cykloida

Hodnota souřadnic bodu  $P$  prodloužené cykloidy je vzhledem k bodu  $S$  jako počátku souřadné soustavy zřejmě  $(-d \sin t, -d \cos t)$ . Celkově je tudíž

$$x = at - d \sin t, \quad y = a - d \cos t.$$

Pro část prodloužené cykloidy na obrázku je zvoleno  $t \in (0, 5\pi)$ .

Poznamenejme, že pro  $d = a$  dostáváme *obyčejnou cykloidu* a pro  $d < a$  *zkrácenou cykloidu*. ▲

Intuitivní představu o křivce z počátku této kapitoly je třeba zpřesnit a vyjádřit matematicky. Představme si, že hmotný bod se v určitém časovém intervalu  $J$  pohyboval pod účinkem nějakých sil v prostoru nebo v rovině. Tento pohyb je zcela určen, známe-li polohu pohybujícího se bodu v každém časovém okamžiku  $t \in J$ . Poloha bodu v prostoru je však jednoznačně určena jeho polohovým vektorem  $\mathbf{r}$  vzhledem ke zvolenému počátku  $O$  souřadné soustavy. Pohyb bodu je tedy matematicky popsán vektorovou funkcí  $\mathbf{r}(t)$ , která je definována pro  $t \in J$  a jejíž hodnoty jsou polohové vektory pohybujícího se bodu vzhledem k bodu  $O$ . Hodograf této vektorové funkce představuje tedy trajektorii (dráhu) pohybujícího se bodu. V tomto pojetí by tedy měla být křivka hodografem této vektorové funkce. (Připomeňme, že *hodografem* vektorové funkce  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in J$ , rozumíme obor hodnot této funkce, tj. množinu koncových bodů vektorů  $\mathbf{r}(t)$  v  $\mathbb{R}^2$ , resp. v  $\mathbb{R}^3$ . Je zřejmé, že různé vektorové funkce mohou mít tentýž hodograf.) Ukazuje se však, že není vhodné definovat křivku jen jako množinu bodů, ale že je i důležité, jakým způsobem bod křivku probíhá.

Uvažujeme-li pohyb hmotného bodu vlivem účinku sil, pak vektorová funkce, která udává polohu tohoto bodu v čase  $t$ , nemůže být libovolná. Např. podle zákonů mechaniky je zřejmé, že neexistují síly, které by hmotný bod přemístily z jednoho místa na druhé v nulovém čase, tj. skokem. Tedy trajektorie bodu se musí měnit spojitě, což ovšem značí, že funkce  $\mathbf{r}(t)$  musí být spojitá. Pak by bylo možno chápat křivku jako hodograf spojitě vektorové funkce.

Lze ale na příkladech ukázat, že takto chápaná křivka může být zcela vzdálena naší představě o křivce. Hodografem spojitě vektorové funkce může být např. čtverec nebo krychle, což jistě neodpovídá intuitivní představě křivky (viz např. [3, str. 374] nebo [10, str. 3]). Je tedy zřejmé, že na funkci  $\mathbf{r}(t)$  musíme klást další požadavky, aby odpovídala naší intuitivní představě o křivce. Než tyto požadavky budeme formulovat, zavedeme dva pomocné pojmy.

**Definice 2.1.** Necht'  $\mathbf{r}(t)$  je vektorová funkce, kde  $t \in J$ . Řekneme, že funkce  $\mathbf{r}(t)$  je *prostá* neboli *jednojednoznačná* na množině  $M$ , kde  $M \subset J$ , když pro libovolná dvě různá čísla  $t_1, t_2 \in M$  platí  $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ . Fyzikálně lze požadavek jednojednoznačnosti funkce  $\mathbf{r}(t)$  interpretovat tak, že bod, jehož pohyb tato funkce popisuje, nezůstává stát a ani se nevrací do polohy, ve které už byl.

*Rozkladem intervalu  $J$*  nazveme konečný nebo nekonečný systém uzavřených intervalů, označíme jej  $\{\langle t_{k-1}, t_k \rangle\}_k$ , jestliže splňuje podmínky:

1. sjednocením všech intervalů systému je interval  $J$ ,
2. společné body libovolných dvou intervalů systému mohou být pouze jejich koncové body.

Například: Pro interval  $J = \langle 0, 1 \rangle$  je jeden z rozkladů  $\{\langle 0, \frac{1}{2} \rangle, \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle\}$ . Systém intervalů  $\{\langle n-1, n \rangle\}$ , kde  $n$  je celé číslo, je rozkladem intervalu  $J = (-\infty, \infty)$ .

Nyní můžeme zformulovat definici křivky a to následujícím způsobem.

**Definice 2.2.** *Křivkou* budeme nazývat vektorovou funkci  $\mathbf{r}(t)$  jedné reálné proměnné  $t$  mající tyto vlastnosti:

1.  $\mathbf{r}(t)$  je definována na nějakém intervalu  $J$ ,
2.  $\mathbf{r}(t)$  je spojitá na  $J$ ,
3. existuje takový rozklad  $\{\langle t_{k-1}, t_k \rangle\}_k$  intervalu  $J$ , že na množině  $J - \{t_k\}_k$  je  $\mathbf{r}(t)$  jednojednoznačná.

Hodograf  $K$  této funkce nazýváme *trajektorie* neboli *nositelka*.

Třetí vlastnost značí ve fyzikální interpretaci, že bod opisující křivku prochází tímž úsekem křivky pouze jedenkrát, přičemž vícekrát může procházet pouze některými izolovanými body. Geometricky to značí, že křivka může sama sebe protínat, ale její části se nepřekrývají.

**Poznámka.** Všimněme si, že v našem pojetí je křivka zobrazení, ne množina bodů, což je její trajektorie. Z praktického hlediska ovšem tyto pojmy často nerozlišujeme a mluvíme o křivce  $K$  jako o množině bodů. Přesto musíme mít na paměti, že beze zbytku toto ztotožnění není možné a od příslušného zobrazení nelze odhlédnout, jak bude vidět z dalšího.

Rovnici

$$K : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in J, \quad (2.1)$$

budeme nazývat *vektorovou rovnicí křivky  $K$*  a vektorovou funkci  $\mathbf{r}(t)$ , jejímž hodografem je trajektorie  $K$ , budeme nazývat *přípustnou parametrizací* této trajektorie. Číslo  $t$  nazýváme *parametrem*.

V kartézské souřadné soustavě s počátkem v bodě  $O$  a jednotkovými souřadnými vektory  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  lze vektorovou funkci  $\mathbf{r}(t)$  vyjádřit pomocí *souřadnicových funkcí*  $x(t)$ ,  $y(t)$  a  $z(t)$  a jednotkových souřadných vektorů následovně:

$$K : \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in J.$$

Bez použití jednotkových souřadných vektorů pak křivku  $K$  vyjadřujeme *parametrickými rovnicemi*:

$$K : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in J. \quad (2.2)$$

V definici křivky se nepředpokládá, že interval  $J$  je uzavřený, ani to, že musí být ohraničený.

Křivka  $K$ , jejíž všechny body leží v jedné rovině, se nazývá *rovinná křivka*. Jestliže bude křivka ležet v rovině  $z = 0$ , pak její parametrické rovnice budou

$$K : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = 0, \quad t \in J.$$

Je zřejmé, že různé křivky mohou mít stejnou trajektorii. Např. křivky  $K$  a  $L$  v  $\mathbb{R}^2$  o rovnicích

$$\begin{aligned} K : \quad \mathbf{r}_1(t) &= t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad t \in (0, 1), \\ L : \quad \mathbf{r}_2(s) &= s^3\mathbf{i} + s^3\mathbf{j}, \quad s \in (0, 1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

obě představují otevřenou úsečku spojující body  $[0, 0]$  a  $[1, 1]$ . Rozdíl je jen v tom, jakou „rychlostí“ bod úsečku probíhá (podrobněji to bude vysvětleno dále). Máme tedy dvě různé parametrizace téže trajektorie. Někdy je možné považovat pro jisté účely tyto parametrizace za rovnocenné. Zhruba řečeno to bude tehdy, když je rozdíl pouze v „rychlosti“ pohybu bodu a popř. ve „směru“.

**Definice 2.3.** Řekneme, že křivky  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $t \in J_1$ , a  $\mathbf{r}_2(s)$ ,  $s \in J_2$ , jsou *ekvivalentní*, jestliže existuje prostá funkce  $t = \varphi(s)$ , která zobrazuje interval  $J_2$  na interval  $J_1$ , je spojitá a má spojitou nenulovou derivaci, taková, že platí

$$\mathbf{r}_1(\varphi(s)) = \mathbf{r}_2(s), \quad s \in J_2. \quad (2.4)$$

Funkci  $\varphi$  nazýváme *transformace parametru*.

**Poznámka.** Platí:

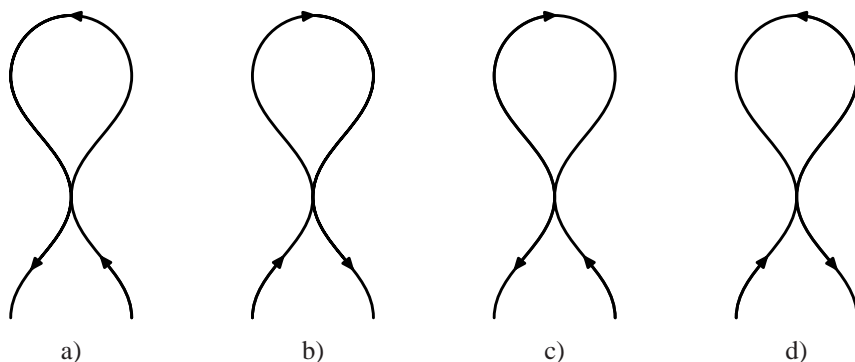
1. Ekvivalentní křivky mají tutéž trajektorii.
2. Funkce  $\varphi$  s uvedenými vlastnostmi je buď rostoucí nebo klesající a intervaly  $J_1$  a  $J_2$  jsou současně buď otevřené nebo uzavřené nebo polootevřené.
3. Křivky vystupují v definici symetricky, tj. lze skutečně mluvit o vzájemné ekvivalenci.



4. Jsou-li křivky  $r_1$  a  $r_2$  ekvivalentní a křivky  $r_2$  a  $r_3$  ekvivalentní, jsou rovněž ekvivalentní křivky  $r_1$  a  $r_3$ . Množinu všech křivek je tedy možné rozdělit na podmnožiny vzájemně ekvivalentních křivek.

5. Křivky  $K$  a  $L$  z (2.3) jsou ekvivalentní — lze volit  $t = \varphi(s) = s^3$ .

V případě, že se křivky protínají, může být situace složitější. Na obr. 2.2 jsou znázorněny čtyři křivky (šipky znázorňují, jak má bod po křivkách probíhat). Zatímco křivky 2.2 a) a 2.2 b) jsou (při rozumné parametrizaci) ekvivalentní a podobně jsou ekvivalentní křivky 2.2 c) a 2.2 d), křivky 2.2 a) a 2.2 c) ekvivalentní nejsou (transformace parametru by musela být nespojitá).



Obr. 2.2

Křivky mohou mít řadu speciálních vlastností. Uvedeme některé nejčastěji se vyskytující.

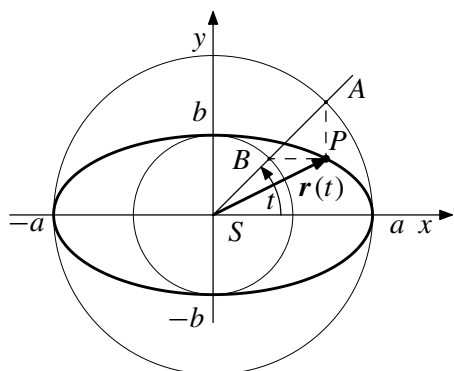
**Definice 2.4.** Necht'  $r(t)$ ,  $t \in J$ , je křivka s trajektorií  $K$ .

1. Je-li  $r(t)$  prostá na celém intervalu  $J$ , říkáme, že křivka je *jednoduchá*.
2. Je-li interval  $J$  ohraničený a uzavřený, tj.  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ , křivku  $K: r(t)$ ,  $t \in J$ , nazýváme *obloukem*.
3. Je-li  $K$  obloukem a  $r(\alpha) = r(\beta)$ , pak  $K$  se nazývá *uzavřený oblouk* neboli *uzavřená křivka*.
4. Křivka, která je současně oblouk a jednoduchá, se nazývá *jednoduchý oblouk* neboli *Jordanův<sup>1</sup> oblouk*.
5. Je-li  $K$  uzavřený oblouk a  $r(t)$  je prostá na  $\langle \alpha, \beta \rangle$ , nazývá se  $K$  *jednoduchá uzavřená křivka* neboli *Jordanova křivka*.



**Příklad 2.2.** Parametrizujte elipsu  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

<sup>1</sup>**Marie Edmond Camille Jordan** (1838–1922) (čti žordan) — významný francouzský matematik. Zabýval se analýzou, algebrou, teorií funkcí, topologií, krystalografií, kinematikou, stabilitou, geometrickou pravděpodobností, teorií čísel a diferenciálními rovnicemi.



Obr. 2.3: Elipsa

*Řešení.* Jedním z možných způsobů jsou parametrické rovnice

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

kde  $t$  je úhel, který svírá polopřímka, sestrojená z bodu  $S$ , s kladným směrem osy  $x$  — viz obr. 2.3.

Bod elipsy, označený  $P$ , sestrojíme takto. Ze středu elipsy vedeme polopřímku, která s osou  $x$  svírá úhel  $t$ . Sestrojíme dvě kružnice, mající střed v bodě  $S$  o poloměrech  $a$  a  $b$ . Průsečík polopřímky s kružnicí o poloměru  $a$  označíme  $A$ ,

průsečík polopřímky s kružnicí o poloměru  $b$  označíme  $B$ . Hledaný bod  $P$  leží na průsečíku kolmice z bodu  $A$  na osu  $x$  a kolmice z bodu  $B$  na osu  $y$ .

Pokud parametr  $t$  volíme v intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , splňuje křivka třetí podmínku v definici 2.2. S touto parametrizací je elipsa jednoduchou uzavřenou křivkou — viz definici 2.4, část 5. Pokud ale volíme  $t$  v intervalu  $\langle 0, 4\pi \rangle$ , pak zmíněná podmínka splněna není. Polohový vektor opisuje v tomto případě elipsu dvakrát a ve smyslu definice 2.2 o křivku nejde. ▲

V některých případech bude vhodné vyjádřit křivku jako spojení několika křivek. Toto spojení definujeme následovně.

Nechť  $K$  je křivka daná vektorovou rovnicí  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in J$ . Nechť  $J_1$  a  $J_2$  jsou takové podintervaly intervalu  $J$ , že koncový bod jednoho z nich je počátečním bodem druhého, přičemž  $J = J_1 \cup J_2$ . Pak říkáme, že křivka  $K$  je spojením svých částí  $K_1$  a  $K_2$  určených intervaly  $J_1$  a  $J_2$ , a píšeme  $K = K_1 \cup K_2$ . Analogicky postupujeme pro více částí.

To ale značí, že každá křivka je buď jednoduchá, nebo se dá vyjádřit spojením konečného, případně nekonečného počtu jednoduchých křivek.

Pro další výklad bude nutné, abychom zavedli pojem tečného vektoru  $\mathbf{r}'(t)$  ke křivce  $K$  a pomocí souřadnicových funkcí této křivky vyjádřili derivaci vektoru  $\mathbf{r}(t)$  podle parametru  $t$  a diferenciál vektoru  $\mathbf{r}(t)$ .

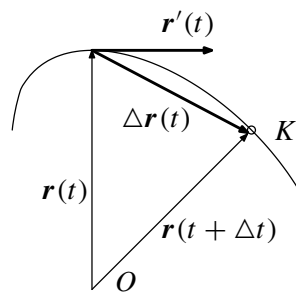
Uvažujme hodnotu parametru  $t$  a vypočteme k němu příslušný vektor  $\mathbf{r}(t)$ . Změňme hodnotu  $t$  o přírůstek  $\Delta t$  a vypočteme vektor  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ .

Utvořme přírůstek vektorové funkce  $\Delta \mathbf{r}(t)$  pro přírůstek parametru  $\Delta t$  (viz obr. 2.4), tj.

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Směr vektoru  $\Delta \mathbf{r}(t)$  odpovídá směru sečny křivky  $K$  procházející koncovými body obou polohových vektorů.

Vydělíme-li vektor  $\Delta \mathbf{r}(t)$  přírůstkem  $\Delta t$ , dostaneme vektor  $\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ , který je s vektorem  $\Delta \mathbf{r}(t)$  kolineární. Derivaci vektorové funkce podle parametru  $t$  definujeme následovně.



Obr. 2.4

**Definice 2.5.** Derivací vektorové funkce  $\mathbf{r}(t)$  podle parametru  $t$  nazveme limitu (pokud existuje)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{r}'(t).$$

Jestliže interval  $J$  je uzavřený, tj.  $J = \langle \alpha, \beta \rangle$ , pak pod derivací funkce  $\mathbf{r}(t)$  v krajních bodech intervalu  $J$  rozumíme jednostranné derivace zprava v bodě  $\alpha$  a zleva v bodě  $\beta$ .

Derivace vektorové funkce  $\mathbf{r}(t)$  podle  $t$  v souřadnicích bude:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}. \quad (2.5)$$

Odtud pro *diferenciál vektoru*  $\mathbf{r}(t)$  dostaneme

$$d\mathbf{r}(t) = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = [x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}] dt. \quad (2.6)$$

Velikost vektoru  $d\mathbf{r}(t)$  označíme  $|d\mathbf{r}(t)|$ .

**Definice 2.6.** Necht'  $K : \mathbf{r}(t), t \in J$ , je křivka.

1. Necht' bod  $P$  křivky  $K$  odpovídá hodnotě parametru  $t_0$ . Jestliže pro  $t_0 \in J$  existuje  $\mathbf{r}'(t_0)$  a  $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , nazýváme bod  $P$  *regulárním bodem křivky*  $K$ . V opačném případě se bod  $P$  nazývá *singulárním bodem křivky*  $K$ .
2. Křivku  $K$  nazveme *regulární*, jestliže existuje spojitá  $\mathbf{r}'(t), t \in J$ , a  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$  pro všechna  $t \in J$ .
3. Křivka  $K$  se nazývá *po částech regulární*, je-li spojením konečně mnoha regulárních křivek.

Máme-li dvě různé parametrizace téže trajektorie, může se stát, že některý bod je regulární v jedné parametrizaci a singulární v druhé. Pak mluvíme o *nepodstatně singulárním bodu trajektorie*. Je-li bod singulární ve všech parametrizacích křivky, mluvíme o *podstatně singulárním bodu trajektorie*.

Jestliže je křivka  $K$  vyjádřena rovnicí  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, t \in J$ , pak podmínku regularity křivky  $K$  lze zformulovat takto:

Funkce  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  mají na intervalu  $J$  spojitě první derivace a pro každé  $t \in J$  platí:

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 > 0,$$

což značí, že první derivace funkcí  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  nejsou zároveň rovny nule pro žádné  $t \in J$ .

Z definice regulární křivky vyplývá, že v každém bodě regulární křivky existuje tečna k této křivce a funkce  $\mathbf{r}'(t)$  se mění spojitě. Ve fyzikální interpretaci křivky to značí, že bod opisující křivku se pohybuje spojitě a má neustále nenulovou okamžitou rychlost, tudíž nemění náhle směr. Geometricky to značí, že křivka neobsahuje žádné hroty. Proto se namísto názvu regulární křivka používá název *hladká křivka*. Po částech regulární křivka se pak nazývá *po částech hladká křivka*.

Např. elipsa z příkladu 2.2 je regulární, zatímco obvod čtverce je (při rozumné parametrizaci) po částech regulární křivka.

Uvažujme dvě křivky

$$\begin{aligned} K : \quad \mathbf{r}_1(t) &= t \mathbf{i} + t \mathbf{j}, \quad t \in (-1, 1), \\ L : \quad \mathbf{r}_2(s) &= s^3 \mathbf{i} + s^3 \mathbf{j}, \quad s \in (-1, 1), \end{aligned} \quad (2.7)$$

Podobně jako v (2.3) jde o dvě otevřené úsečky, které tentokrát vzhledem ke změně intervalů z  $(0, 1)$  na  $(-1, 1)$  spojují body  $[-1, -1]$  a  $[1, 1]$ .

Pro křivku  $K$  platí  $\mathbf{r}'_1(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ ,  $t \in (-1, 1)$ , takže je to regulární křivka (stejně jako první křivka v (2.3)).

Pro křivku  $L$  platí  $\mathbf{r}'_2(s) = 3s^2 \mathbf{i} + 3s^2 \mathbf{j}$ ,  $s \in (-1, 1)$ . Tedy  $\mathbf{r}'_2(0) = \mathbf{0}$ ,  $0 \in (-1, 1)$  a tato křivka není regulární (na rozdíl od druhé křivky v (2.3), kde  $0 \notin (0, 1)$ ).

Křivky  $K$  a  $L$  nejsou ekvivalentní (na rozdíl od křivek z (2.3)). Pripustíme totiž, že by existovala transformace parametru  $\varphi(s)$  splňující (2.4). Derivováním této rovnosti dostaneme (s použitím pravidla pro derivování složené funkce aplikovaného na složky)  $\mathbf{r}'_1(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \mathbf{r}'_2(s)$ ,  $s \in (-1, 1)$ . Protože  $\mathbf{r}'_1(\varphi(0)) = \mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$  a  $\mathbf{r}'_2(0) = \mathbf{0}$ , musí být  $\varphi'(0) = 0$ , což není přípustné.

**Poznámka.** Lze dokázat, že prosté regulární křivky jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejné trajektorie – viz např. [6].

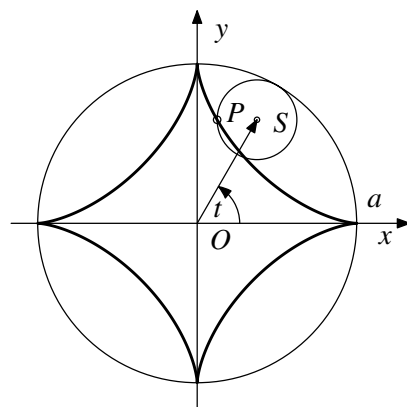
**Příklad 2.3.** Zjistěte, zda křivka daná parametricky rovnicemi

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in (0, 2\pi), \quad (2.8)$$

je regulární.

**Řešení.** Uvedená křivka se nazývá *asteroida* a je znázorněna na obr. 2.5. Asteroidu opisuje bod  $P$ , který se nachází na obvodu kružnice s poloměrem  $a/4$ , která se kotálí zevnitř po kružnici o poloměru  $a$ . Předpokládáme-li, že větší kružnice je ve středu kartézského souřadného systému, vyjadřuje parametr  $t$  úhel, který svírá průvodič středu malé kružnice s kladným směrem osy  $x$ , orientovaný proti směru hodinových ručiček.

Derivováním dostaneme  $\mathbf{r}'(t) = -3a \cos^2 t \sin t \mathbf{i} + 3a \sin^2 t \cos t \mathbf{j}$ . Pro hodnoty  $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  a  $2\pi$  je vektor  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{0}$ , tedy křivka není hladká. Lze ji ale rozdělit na čtyři křivky, každá z nichž je hladká (po transformaci parametru, která ovšem nedá ekvivalentní křivku, ale pouze křivku se stejnou trajektorií — viz přirozený parametr níže a příklad 2.4). Zřejmě asteroida je jednoduchá uzavřená křivka. ▲



Obr. 2.5: Asteroida



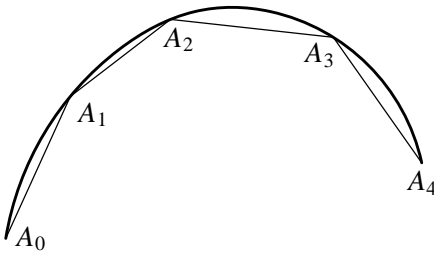
## 2.1. Délka křivky

Všimneme si nyní, jak je definována délka křivky. Budeme předpokládat, že jde o oblouk  $K$  s rovnicí

$$K : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \quad (2.9)$$

Pomocí libovolných čísel  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rozdělíme interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  na  $n$  dílků. Dělicí body přeneseme na  $K$  a označíme je  $A_i = \mathbf{r}(t_i)$ , kde  $i = 0, \dots, n$  — viz obr. 2.6, kde  $n = 4$ . Křivku  $K$  aproximujeme lomenou čarou  $L$  tvořenou úsečkami  $\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$ . Její délka  $m_1(L)$  (m jako *míra*, index 1 jako *jednorozměrná*) je

$$m_1(L) = |\overline{A_0A_1}| + \dots + |\overline{A_{n-1}A_n}|.$$



Obr. 2.6: Aproximace křivky

**Definice 2.7.** Jestliže existuje číslo  $M$  takové, že  $m_1(L) \leq M$  pro libovolnou výše zkonstruovanou lomenou čarou  $L$ , řekneme, že křivka  $K$  má *konečnou délku* neboli je *rektifikovatelná*. Nejmenší číslo  $M$  s touto vlastností (lze ukázat, že takové vždy existuje) nazveme *délka křivky  $K$*  a označíme  $m_1(K)$ .

V opačném případě řekneme, že křivka *nemá konečnou délku* neboli *není rektifikovatelná*.

Na příkladech lze ukázat, že dokonce i jednoduchý oblouk nemusí mít konečnou délku — viz např. [3, str. 405]. Platí ale následující věta.

**Věta 2.1.** *Nechť v (2.9) mají funkce  $x(t)$ ,  $y(t)$  a  $z(t)$  spojitou první derivaci na  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Pak křivka  $K$  má konečnou délku a platí*

$$m_1(K) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (2.10)$$

Důkaz lze nalézt v [5]. Všimněme si, že křivka nemusí být regulární ( $\mathbf{r}'(t)$  může být v některém bodě nulová).

Uvažujme nyní regulární křivku s rovnicí (2.9). Označme  $s(t)$  délku křivky, která odpovídá oboru parametrů  $\langle \alpha, t \rangle$ . Z (2.10) plyne, že

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du. \quad (2.11)$$

Pro „velmi malé“ přírůstky  $dt$  argumentu  $t$  pokládáme velikost diferenciálu  $|d\mathbf{r}|$  za přibližně rovnou délce  $\Delta s$  části křivky, která přísluší hodnotě  $dt$  (nazveme ji *elementem křivky*), tedy  $|d\mathbf{r}| \doteq \Delta s$ .

K elementu křivky odpovídajícímu přírůstku  $dt$  pak přiřadíme vektor  $ds$ , jehož vyjádření v kartézských souřadnicích bude:

$$ds = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k} = [x'(t) \mathbf{i} + y'(t) \mathbf{j} + z'(t) \mathbf{k}] dt. \quad (2.12)$$

Pro délku  $ds$  elementu křivky  $K$  pak máme (pro kladné  $dt$ ) vzorec

$$ds = |ds| = \sqrt{[dx]^2 + [dy]^2 + [dz]^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt, \quad (2.13)$$

což je ve shodě s diferenciálem  $ds$  vypočteným z (2.11). Vzorec (2.12) budeme využívat při výpočtech křivkového integrálu II. druhu, vzorec (2.13) pak při výpočtech křivkového integrálu I. druhu.

## 2.2. Přirozená parametrizace křivky

V případě křivky konečné délky je možné najít parametrizaci, kde parametr vyjadřuje délku oblouku. Přesněji, jsou-li  $s_1 < s_2$  libovolné hodnoty parametru, pak oblouk křivky odpovídající intervalu  $\langle s_1, s_2 \rangle$  má délku  $s_2 - s_1$ . Ukazuje se, že při takové parametrizaci se bod křivky pohybuje rychlostí, jejíž velikost je neustále jednotková.

Nechť  $K: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$  je regulární křivka. Uvažujme funkci  $s(t)$  danou vzorcem (2.11). Ta je definovaná na intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  a má obor hodnot  $\langle 0, m_1(K) \rangle$ . Protože má podle (2.13) spojitou nenulovou derivaci, je prostá, a tudíž existuje inverzní funkce, kterou označíme  $\varphi(s)$ . Lze ukázat (viz např. [10, str. 18]), že parametrizace  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi(s))$ ,  $s \in \langle 0, m_1(K) \rangle$ , má výše uvedenou vlastnost. Taková parametrizace se nazývá *přirozená*. Protože  $\varphi'(s) \neq 0$ , jde ve smyslu definice 2.3 o ekvivalentní křivku s křivkou  $\mathbf{r}(t)$ .

**Příklad 2.4.** Najděte přirozenou parametrizaci jednoho oblouku  $L$  asteroidy popsané v příkladu 2.3.



*Řešení.* Dosazením z (2.8) do (2.11) dostaneme pro  $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{[3a \cos^2 u (-\sin u)]^2 + [3a \sin^2 u \cos u]^2} du = \\ &= 3a \int_0^t \sqrt{\sin^2 u \cos^2 u (\cos^2 u + \sin^2 u)} du = 3a \int_0^t \sin u \cos u du = \\ &= \frac{3a}{2} \int_0^t \sin 2u du = \frac{3a}{4} [-\cos 2u]_0^t = \frac{3a}{4} (1 - \cos 2t) = \frac{3a}{2} \sin^2 t. \end{aligned}$$

Protože  $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ , je  $m_1(L) = s(\pi/2) = \frac{3a}{2}$ . Inverzní funkce  $\varphi(s)$  je tedy definovaná na intervalu  $\langle 0, 3a/2 \rangle$  a platí

$$\varphi: t = \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3a}}, \quad s \in \left\langle 0, \frac{3}{2} a \right\rangle.$$

Po dosazení do (2.8) vyjde

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t = a(\sqrt{1 - \sin^2 t})^3 = a\left(1 - \sin^2 \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3a}}\right)^{\frac{3}{2}} = a\left(1 - \frac{2s}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ y &= a \sin^3 t = a \sin^3 \arcsin \sqrt{\frac{2s}{3a}} = a\left(\frac{2s}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad s \in \left\langle 0, \frac{3}{2}a \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Všimněte si, že křivky (2.8) a (2.14) jsou parametrizací téže trajektorie, ale nejsou ekvivalentní. Křivka (2.8) není totiž regulární (její parametrizace má v krajních bodech nulovou derivaci — viz příklad 2.3), kdežto křivka (2.14) regulární je. Transformace parametru  $\varphi(s)$  má v krajních bodech nevlastní derivaci  $+\infty$ , tj. tato derivace

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\sqrt{2s(3a - 2s)}}$$

není v krajních bodech  $s = 0$  a  $s = \frac{3}{2}a$  spojitá. ▲

### 2.3. Orientace křivky

Při definici integrálu z vektorové funkce budeme potřebovat u křivky její *orientaci*. Orientovat křivku znamená vhodně uspořádat množinu bodů její trajektorie. Fyzikálně značí zadání orientace křivky určení směru, ve kterém se bod vytvářející trajektorii křivky pohybuje. Uspořádání je pak dáno pořadím, ve kterém jsou body procházeny.

Nechť  $\mathbf{r}(t)$ ,  $t \in J$ , je parametrizace křivky  $K$ . Jestliže parametr  $t$  interpretujeme jako čas, vyjadřuje tato parametrizace pohyb bodu po této křivce. Když  $t_1$  a  $t_2$  jsou dva libovolné časové okamžiky z intervalu  $J$  takové, že  $t_1 < t_2$ , pak pohybující se bod se dostane nejdříve do bodu  $P(t_1)$ , určeného polohovým vektorem  $\mathbf{r}(t_1)$ , a poté do bodu  $P(t_2)$ , určeného polohovým vektorem  $\mathbf{r}(t_2)$ . Na křivce  $K$  je tedy bod  $P(t_1)$  před bodem  $P(t_2)$ , což označíme  $P(t_1) < P(t_2)$ .

Bod ale může opisovat tutěž křivku tak, že se po ní pohybuje opačným směrem. V tomto případě by bod  $P(t_1)$  byl za bodem  $P(t_2)$ , tj.  $P(t_1) > P(t_2)$ .

Je tedy vidět, že daná parametrizace křivky určuje dvě navzájem opačná uspořádání jejích bodů.

**Definice 2.8.** Když pro libovolná  $t_1 < t_2$  platí  $P(t_1) < P(t_2)$ , pak řekneme, že křivka je *souhlasně orientovaná* se svým parametrickým vyjádřením. Když pro libovolná  $t_1 < t_2$  platí  $P(t_1) > P(t_2)$ , pak řekneme, že křivka je *nesouhlasně orientovaná* se svým parametrickým vyjádřením.

Křivku  $K$  spolu s jedním z těchto dvou uspořádání jejích bodů budeme nazývat *orientovanou křivkou* a označíme  $\mathbf{K}$ . Tutěž křivku s opačnou orientací označíme  $-\mathbf{K}$ .

Uvažujeme-li trajektorii jednoduché křivky, pak zřejmě při libovolné parametrizaci této trajektorie dostáváme tatáž dvě uspořádání bodů. Pokud ovšem trajektorie odpovídá

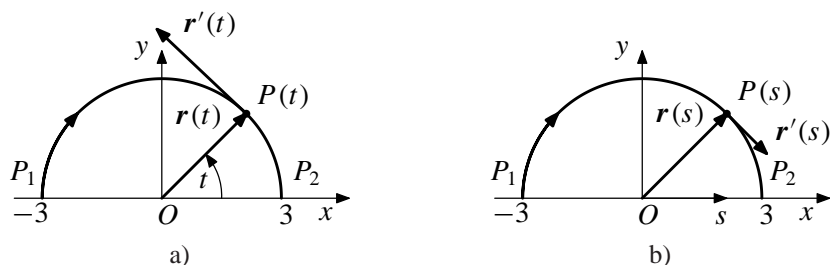


křivce, která sama sebe protíná, můžeme z různých (neekvivalentních) parametrizací dostat více takových uspořádání — viz obr. 2.2.

Při výše uvedené definici orientace křivky se může stát, že některý bod křivky je v tomto uspořádání sám před sebou, což nedává příliš smysl. To nastane tehdy, když křivka sama sebe protíná. Matematicky přesná definice orientace spočívá v tom, že se na křivce zadá spojitě nenulové pole tečných vektorů. Pro naše účely ale s předchozí definicí vystačíme. Na obrázcích budeme orientaci křivky značit šipkou.

Je-li orientovaná křivka  $K$  spojením křivek  $K_1$  a  $K_2$ , přeneseme na  $K_1$  a  $K_2$  uspořádání bodů z  $K$ . Pak řekneme, že křivky (nyní orientované)  $K_1$  a  $K_2$  jsou *souhlasně orientované* s  $K$ .

**Příklad 2.5.** Parametrizujte půlkružnici  $x^2 + y^2 = 9, y \geq 0$ , která je orientována od bodu  $P_1[-3, 0]$  do bodu  $P_2[3, 0]$ , a znázorněte její polohový a tečný vektor.



Obr. 2.7: Parametrizace půlkružnice

**Řešení.** Uvedeme dva způsoby parametrizace této křivky.

První způsob parametrizace je ten, že za parametr  $t$  zvolíme úhel, který svírá polohový vektor  $\mathbf{r}(t)$  bodu křivky s kladným směrem osy  $x$ , orientovaný proti směru pohybu hodinových ručiček.

Parametrické rovnice půlkružnice jsou

$$x = 3 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Odtud pro tečný vektor máme:  $\mathbf{r}'(t) = -3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}$ .

Při druhém způsobu parametrizace zvolíme za parametr  $x$ -ovou souřadnici bodu půlkružnice. Pro odlišení od předchozího parametru jej označíme  $s$ .

V tomto případě jsou parametrické rovnice půlkružnice

$$x = s, \quad y = \sqrt{9 - s^2}, \quad \text{kde } s \in \langle -3, 3 \rangle.$$

Pro tečný vektor v této parametrizaci máme:  $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{i} - \frac{s}{\sqrt{9-s^2}} \mathbf{j}, s \in (-3, 3)$ .

První způsob parametrizace je znázorněn na obr. 2.7 a). Zvolili jsme hodnotu parametru  $t = \frac{\pi}{4}$ . Pak bod  $P(t)$  má souřadnice  $\left[\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$  a  $\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{j}$ .



Druhý způsob parametrizace je znázorněn na obr. 2.7 b). Zvolili jsme hodnotu parametru  $s = 1,5\sqrt{2}$  (dává tentýž bod). Souřadnice bodu  $P(s)$  jsou  $[\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}]$  a  $r'(1,5\sqrt{2}) = i - j$ .

Při prvním způsobu parametrizace je křivka orientována nesouhlasně s parametrickým vyjádřením, při druhém způsobu parametrizace je orientována souhlasně s parametrickým vyjádřením.

Poznamenejme, že při prvním způsobu parametrizace existují v krajních bodech křivky tečné vektory a křivka je regulární, zatímco při druhém způsobu parametrizace tečné vektory v krajních bodech nejsou definovány. ▲

Σ

### Pojmy k zapamatování

- parametrické rovnice křivky,
- uzavřená jednoduchá křivka,
- regulární a po částech regulární křivka,
- vzorec pro délku parametricky zadané křivky,
- přirozená parametrizace křivky,
- orientace (ne)souhlasná s orientací křivky.

?

### Kontrolní otázky

1. Jak vyjádřit v parametrickém tvaru křivku, která je grafem funkce  $y = f(x)$ ?
2. Udejte příklad parametricky zadané křivky, která není grafem funkce tvaru  $y = f(x)$ .
3. Jaký je vztah mezi délkou tečného vektoru ke křivce a elementem délky křivky?
4. Kružnice  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $t \in (0, 2\pi)$  je orientována proti směru pohybu hodinových ručiček. Je tato orientace souhlasná nebo nesouhlasná s daným parametrickým vyjádřením?
5. Vysvětlete pojem *ekvivalentní křivky*.

# Kapitola 3

## Křivkový integrál I. druhu

### Průvodce studiem

V této kapitole uvedeme definici a základní vlastnosti křivkového integrálu I. druhu. Dále ukážeme metody výpočtu tohoto integrálu a na závěr kapitoly popíšeme geometrické a fyzikální aplikace křivkového integrálu I. druhu. Poznamenejme, že tento integrál bývá v některé literatuře nazýván jako křivkový integrál ze skalární funkce.



### Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- zavést a vysvětlit definici křivkového integrálu I. druhu, poukázat na podobnost s konstrukcí Riemannova integrálu ze základního kursu integrálního počtu,
- ukázat, že základní vlastnosti křivkového integrálu I. druhu jsou velmi podobné vlastnostem Riemannova integrálu,
- popsat metodu výpočtu křivkového integrálu I. druhu podél parametricky zadané křivky,
- vysvětlit základní aplikace křivkového integrálu I. druhu.



### 3.1. Definice křivkového integrálu I. druhu

V této části popíšeme konstrukci křivkového integrálu ze skalární funkce.

Uvažujme křivku  $K$ , jejíž souřadnice  $[x, y, z]$  jsou popsány v kartézské souřadné soustavě parametrickými rovnicemi

$$K : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in J = \langle \alpha, \beta \rangle,$$

majícími spojitě derivace, přičemž  $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 0$  nejvýše v konečně

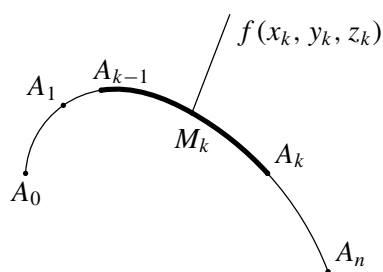
mnoha bodech, a funkci

$$f: u = f(x, y, z),$$

definovanou v bodech křivky  $K$ . O ní budeme předpokládat, že  $f(x(t), y(t), z(t))$  je po částech spojitá na  $\langle \alpha, \beta \rangle$  (což je splněno např. když  $f$  je spojitá).

Pomocí libovolně zvolených hodnot  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rozdělíme interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  na  $n$  dílků. Tyto dělicí body přeneseme na  $K$  a označíme je  $A_k = [x(t_k), y(t_k), z(t_k)]$ . Body  $A_0, \dots, A_n$  rozdělí křivku na  $n$  úseků (oblouků), které nazveme *elementy křivky* a označíme je  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Na obr. 3.1 je  $k$ -tý element vyznačen tučně. Délka  $k$ -tého elementu bude  $m_1(s_k)$ .

V každém z elementů  $s_k$  zvolíme libovolný bod, označme jej  $M_k$ , o souřadnicích  $[x_k, y_k, z_k]$  a vypočteme v něm funkční hodnotu  $f(x_k, y_k, z_k)$ . Body  $M_k$  tvoří tzv. *výběr reprezentantů* příslušející dělení intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  určenému body  $t_1, \dots, t_{n-1}$ . Konstrukce je znázorněna na obr. 3.1.



Obr. 3.1

Utvoříme tzv. *integrální součet*

$$\mathcal{I}_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) m_1(s_k).$$

Zvětšujeme-li počet dělicích bodů na křivce, tudíž  $n \rightarrow \infty$ , přičemž požadujeme, aby délka nejdelšího elementu konvergovala k nule, tj.  $\max_k m_1(s_k) \rightarrow 0$ , lze ukázat, že posloupnost integrálních součtů má za výše uvedených předpokladů limitu, kterou označíme

symbolem  $\int_K f(x, y, z) ds$ . Integrál pak definujeme následovně.

**Definice 3.1.** Za předchozích předpokladů existuje nezávisle na posloupnosti dělení a na výběru reprezentantů limita

$$\lim_{\max_k m_1(s_k) \rightarrow 0} \mathcal{I}_n = \lim_{\max_k m_1(s_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) m_1(s_k) = \int_K f(x, y, z) ds. \quad (3.1)$$

Nazýváme ji *křivkovým integrálem I. druhu* nebo *křivkovým integrálem ze skalární funkce*.

V křivkovém integrálu mají jednotlivé symboly následující význam:

- písmeno  $K$  pod znakem integrálu označuje, že integrujeme po křivce  $K$  (integrační obor),
- $f(x, y, z)$  označuje, kterou funkci integrujeme (integrand),
- $ds$  označuje délku elementu křivky (diferenciál oblouku).

## 3.2. Vlastnosti a výpočet křivkového integrálu I. druhu

Ukazuje se, že pro křivkový integrál I. druhu platí obdobné vlastnosti jako pro obyčejný určitý integrál. Lze dokázat následující věty.

**Věta 3.1.** *Nechť existují integrály  $\int_K f(x, y, z) ds$  a  $\int_K g(x, y, z) ds$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak integrály stojící v následujících rovnostech nalevo existují a platí:*

$$\int_K [f(x, y, z) + g(x, y, z)] ds = \int_K f(x, y, z) ds + \int_K g(x, y, z) ds ,$$

$$\int_K \alpha f(x, y, z) ds = \alpha \int_K f(x, y, z) ds .$$

První vlastnost se nazývá *aditivita vzhledem k integrandu*, druhá *homogenita*.

**Věta 3.2.** *Nechť existuje integrál  $\int_K f(x, y, z) ds$  a oblouk  $K$  je spojením svých částí  $K_1$  a  $K_2$ . Pak integrály stojící v následující rovnosti napravo existují a platí:*

$$\int_K f(x, y, z) ds = \int_{K_1} f(x, y, z) ds + \int_{K_2} f(x, y, z) ds . \quad (3.2)$$

Tato vlastnost se nazývá *aditivita vzhledem k integračnímu oboru*.

Předchozí věta nám umožňuje rozšířit definici křivkového integrálu na širší třídu křivek.

Předpokládejme, že po částech hladký oblouk  $K$  je spojením svých hladkých částí  $K_1, \dots, K_n, n \in \mathbb{N}$ . Pak definujeme

$$\int_K f(x, y, z) ds = \int_{K_1} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{K_n} f(x, y, z) ds . \quad (3.3)$$

Věta 3.2 zajišťuje, že tato definice je korektní (nezávisí na konkrétním rozdělení křivky  $K$  na konečný počet částí).

**Poznámka.** Z definice 2.2 vyplývá, že křivka se smí protínat pouze v izolovaných bodech. Tedy např. kružnice, kterou proběhne bod dvakrát, není křivkou ve smyslu zmíněné definice. V některých aplikacích je to ovšem nepříjemné omezení. Ukazuje se, že pro konstrukci křivkového integrálu není třetí vlastnost z definice 2.2 nutná. Totéž platí i pro většinu výsledků týkajících se křivkového integrálu, které byly nebo budou uvedeny.

Princip výpočtu křivkového integrálu I. druhu spočívá v tom, že tento integrál převedeme na integrál jednoduchý, v němž proměnnou bude parametr  $t$  a integračním oborem obor parametru.

Uvažujme hladkou křivku  $K$  mající parametrické rovnice

$$K: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in J = \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Z parametrických rovnic křivky určíme diferenciály proměnných:

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt.$$

Pak pro délku elementu  $ds$  máme (viz vzorec (2.13))

$$ds = \sqrt{[dx]^2 + [dy]^2 + [dz]^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Integrand  $f(x, y, z)$  vyjádříme pomocí souřadnic křivky jako funkci proměnné  $t$ , tedy  $f(x, y, z) = f[x(t), y(t), z(t)]$ . Meze integrálu budou krajní body  $\alpha$  a  $\beta$  oboru parametru.

Pak lze ukázat, že křivkový integrál lze převést na jednoduchý určitý integrál takto:

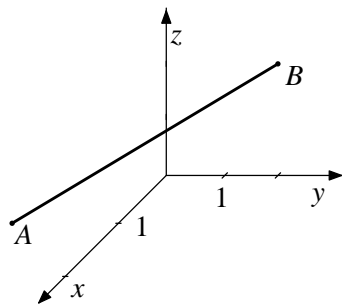
$$\int_K f(x, y, z) ds = \int_\alpha^\beta f[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (3.4)$$

Z tohoto vyjádření snadno vyplývá s použitím věty o substituci do určitého integrálu následující tvrzení.

**Věta 3.3.** *Nechť existuje  $\int_K f(x, y, z) ds$  a křivka  $L$  je ekvivalentní s  $K$ . Pak*

$$\int_K f(x, y, z) ds = \int_L f(x, y, z) ds.$$

**Poznámka.** Předchozí věta zůstane v platnosti, když dovolíme, aby derivace funkce popisující změnu parametru byla v konečně mnoha bodech nulová (srv. příklad 2.4). To plyne z (3.4) a spojitosti závislosti určitého integrálu na dolní a horní mezi,



Obr. 3.2

**Příklad 3.1.** Vypočítejte hodnotu křivkového integrálu  $I = \int_K (x + y^2 - z) ds$ , kde křivka  $K$  je úsečka  $\overline{AB}$ , přičemž souřadnice bodů jsou  $A[2, -1, 1]$ ,  $B[1, 3, 3]$ .

**Řešení.** Nejprve určíme parametrické rovnice přímky, na níž úsečka  $\overline{AB}$  leží.

Směrový vektor  $\overrightarrow{AB}$  má souřadnice  $(-1, 4, 2)$ . Zvolíme-li bod  $A$  za určující bod přímky, dostaneme z vektorové rovnice přímky  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}t$  její parametrické rovnice:

$$x = 2 - t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 1 + 2t.$$

Hodnota parametru  $t_A$  bodu  $A$  je rovna 0, hodnota parametru  $t_B$  bodu  $B$  je rovna 1, tedy parametr  $t$  bude probíhat interval  $(0, 1)$ .

Z parametrických rovnic křivky určíme jejich diferenciály:

$$dx = -dt, \quad dy = 4 dt, \quad dz = 2 dt.$$

Pomocí nich určíme délku elementu křivky  $ds = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 2^2} dt = \sqrt{21} dt$ .

Nyní dosadíme do daného křivkového integrálu a převedeme jej na jednoduchý:

$$I = \int_K (x + y^2 - z) ds = \int_0^1 [(2-t) + (-1+4t)^2 - (1+2t)]\sqrt{21} dt.$$

V získaném integrálu provedeme úpravy integrandu, určíme primitivní funkci a dosadíme do primitivní funkce horní a dolní mez integrálu:

$$I = \int_0^1 (2 - 11t + 16t^2)\sqrt{21} dt = \sqrt{21} \left[ 2t - \frac{11}{2}t^2 + \frac{16}{3}t^3 \right]_0^1 = \frac{11}{6}\sqrt{21}.$$



### 3.3. Aplikace křivkového integrálu I. druhu

Při odvozování vzorců pro aplikace křivkového integrálu I. druhu budeme používat symbolický přístup, který sestavení vzorce zjednodušuje a zprůhledňuje. Tím se ovšem dopouštíme, co se týče ryzího matematického postupu, jistých nepřesností. Přesnější postup spočívá v odvození příslušného vzorce podle definice uvedené v odstavci 3.1.

#### Délka křivky

Křivku  $K$  rozdělíme na elementy, jejichž délku označíme  $ds$ , a délky těchto elementů „sčítáme“. Protože těchto elementů je nekonečně mnoho a jsou nekonečně malé, sčítání se provede pomocí integrálu.

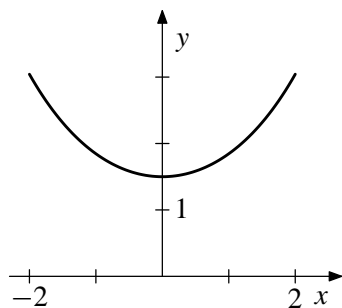
Tedy pro délku křivky, kterou označíme  $m_1(K)$ , dostaneme vzorec

$$m_1(K) = \int_K ds. \quad (3.5)$$

Všimněte si, že správnost vzorce plyne z (2.10) a (3.4).

**Příklad 3.2.** Mezi dvěma sloupy, vzdálenými od sebe 4 m, je napnuto lano. Vlivem vlastní hmotnosti se lano prohne do tvaru křivky, která se nazývá *řetězovka*. Průhyb lana je schématicky zachycen na obr. 3.3. Zavedeme kartézskou souřadnou soustavu s osami  $x$  a  $y$ , kde osa  $x$  prochází patami sloupů, osa  $y$  je uprostřed mezi nimi. V této souřadné soustavě je řetězovka popsána funkcí  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ ,  $a > 0$ . Výška nejnižšího bodu křivky nad rovinou je 1,5 m. Jaká je délka prohnutého lana?





Obr. 3.3

*Řešení.* Protože ve zvolené souřadné soustavě je nejnižší bod v počátku a  $y(0) = a$ , je  $a = 1,5$ .

Nyní sestavíme parametrické rovnice řetězovky. Jako parametr  $t$  je vhodné volit  $x$ -ovou souřadnici, tedy  $x = t$ . Pak  $t \in \langle -2, 2 \rangle$ .

Pro  $y$ -ovou souřadnici vyjde  $y = \frac{a}{2} (e^{t/a} + e^{-t/a})$ , kde  $a = 1,5$ .

Dále vypočteme diferenciály proměnných. Dostaneme  $dx = dt$ ,  $dy = \frac{1}{2} (e^{t/a} - e^{-t/a}) dt$ .

Odtud určíme délku elementu křivky:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{t/a} - e^{-t/a})^2} dt = \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{2t/a} - 2 + e^{-2t/a})} dt = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t/a} + 2 + e^{-2t/a})} dt = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}(e^{t/a} + e^{-t/a})^2} dt = \frac{1}{2} (e^{t/a} + e^{-t/a}) dt. \end{aligned}$$

Pro délku křivky tudíž dostaneme:

$$m_1(K) = \int_K ds = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} (e^{t/a} + e^{-t/a}) dt.$$

Po určení primitivní funkce a dosazení mezí celkově vyjde:

$$m_1(K) = \frac{a}{2} \left[ e^{t/a} - e^{-t/a} \right]_{-2}^2 = a(e^{2/a} - e^{-2/a}) = 2a \sinh \frac{2}{a}.$$

Dosadíme-li za  $a$  hodnotu 1,5, bude délka prohnutého lana rovna přibližně 5,3 m. ▲

### Hmotnost křivky

Pokud má křivka specifickou hustotu  $\rho$  konstantní, pak její hmotnost je rovna součinu její délky a této specifické hustoty.

Pokud však není specifická hustota konstantní, ale je závislá na tom, v jakém bodě křivky se nachází, tedy  $\rho = \rho(x, y, z)$ , pak hmotnost křivky vypočteme pomocí integrálu takto.

Křivku opět rozdělíme na elementy, délku elementu označíme  $ds$ . V každém bodě elementu je specifická hustota  $\rho(x, y, z)$ . Hmotnost tohoto elementu  $dm$  je přibližně rovna součinu hustoty ve zvoleném bodě elementu a délky tohoto elementu, tudíž platí  $dm = \rho(x, y, z) ds$ .

Celkovou hmotnost křivky získáme tedy tak, že sečteme hmotnosti těchto elementů, což vyjádříme vzorcem

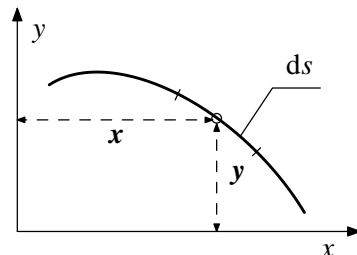
$$m = \int_K dm = \int_K \rho(x, y, z) ds. \quad (3.6)$$

## Statické momenty křivky

Statický moment bodu k rovině v  $\mathbb{R}^3$  nebo k přímce v  $\mathbb{R}^2$  je definován jako součin jeho hmotnosti a (orientované) vzdálenosti od této roviny nebo přímky. (Ve fyzice se tento pojem neuzívá.)

Nejprve odvodíme statické momenty rovinné křivky k souřadným osám.

Uvažujme rovinnou křivku v kartézské souřadné soustavě s osami  $x$  a  $y$ . Máme-li stanovit statický moment této křivky k ose  $x$ , pak postupujeme takto. Křivku rozdělíme na elementy, délku elementu označíme  $ds$ . V každém z elementů zvolíme libovolný bod a určíme jeho vzdálenost od osy  $x$ . Tato vzdálenost je rovna  $y$  — viz obr. 3.4.



Obr. 3.4

Pak statický moment tohoto elementu k ose  $x$ , který označíme  $dS_x$ , bude roven  $dS_x = \rho y ds$ , kde  $\rho = \rho(x, y)$  je specifická hustota.

Statický moment celé křivky k ose  $x$  získáme tedy tak, že sečteme statické momenty těchto elementů, což vyjádříme vzorcem

$$S_x = \int_K dS_x = \int_K \rho y ds. \quad (3.7)$$

Analogicky odvodíme vzorec pro statický moment křivky k ose  $y$ :

$$S_y = \int_K dS_y = \int_K \rho x ds. \quad (3.8)$$

Statické momenty využíváme k určení souřadnic těžiště křivek. Označíme-li souřadnice těžiště  $T$  křivky v kartézské souřadné soustavě  $x_T$  a  $y_T$  a její hmotnost  $m$ , pak pro tyto souřadnice platí:

$$x_T = \frac{S_y}{m}, \quad y_T = \frac{S_x}{m}. \quad (3.9)$$

Výpočet statického momentu a těžiště křivky ukážeme na příkladu.

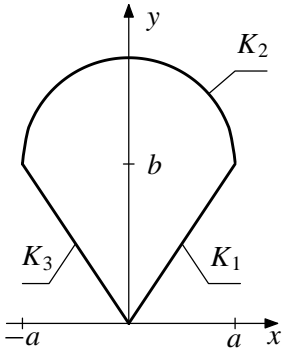
**Příklad 3.3.** Kostra draka sestává z drátu tenkého průřezu a má rozměry uvedené v obr. 3.5. Specifická hustota drátu  $\rho$  je konstantní. Máme určit těžiště draka.



**Řešení.** Nejprve určíme statické momenty křivky. Protože je kostra draka symetrická vzhledem k ose  $y$ , je statický moment  $S_y$  kostry draka k ose  $y$  roven nule. K výpočtu statického momentu  $S_x$  kostry draka k ose  $x$  použijeme vzorec (3.7).

Křivka, která je kostrou draka, sestává ze tří jednodušších křivek. Ramena jsou úsečky, označme je  $K_1$  a  $K_3$ , jejich spojnice je oblouk kružnice, označme jej  $K_2$ . Kostra draka je tedy po částech hladká křivka. Integrál vyjadřující statický moment bychom tedy měli rozdělit na tři integrály. Vzhledem k tomu, že statické momenty k ose  $x$  jsou pro ramena zřejmě stejné, stačí počítat statický moment pro ramena křivky jen pro jednu úsečku a výsledek započítat dvakrát.





Obr. 3.5

Tedy

$$S_x = \int_K \rho y \, ds = 2 \int_{K_1} \rho y \, ds + \int_{K_2} \rho y \, ds.$$

Jednotlivé křivky vyjádříme parametricky .

Křivka  $K_1$  je úsečka o rovnici  $y = \frac{b}{a}x$ . Za parametr  $t$  volíme  $x$ -ovou souřadnici, takže parametrické rovnice křivky jsou:

$$K_1: x = t, \quad y = \frac{b}{a}t, \quad \text{kde } t \in \langle 0, a \rangle.$$

Odtud určíme délku  $ds$  elementu křivky  $K_1$ :  $ds = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} dt$ .

Křivka  $K_2$  je kružnice, jejíž střed je v bodě  $(0, b)$ . Volíme-li za parametr úhel, který opisuje průvodič bodu kružnice, mající počátek v bodě  $(0, b)$ , orientovaný proti směru pohybu hodinových ručiček, pak parametrické rovnice této křivky budou:

$$K_2: x = a \cos t, \quad y = b + a \sin t, \quad \text{kde } t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Odtud dostaneme délku  $ds$  elementu křivky  $K_2$ :  $ds = a \, dt$ .

Nyní převedeme křivkový integrál na jednoduchý:

$$\begin{aligned} S_x &= 2 \int_0^a \frac{b}{a} t \rho \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dt + \int_0^\pi (b + a \sin t) \rho a \, dt = \\ &= \frac{2b\rho}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^a + a\rho [bt - a \cos t]_0^\pi = \\ &= \rho (b\sqrt{a^2 + b^2} + \pi ab + 2a^2). \end{aligned}$$

Hmotnost  $m$  křivky  $K$  určíme jako součin specifické hustoty drátu a délky úseček a kružnice, tedy  $m = \rho(\pi a + 2\sqrt{a^2 + b^2})$ .

Souřadnici těžiště na svislé ose označíme  $y_T$ . Její hodnota je rovna zlomku

$$y_T = \frac{S_x}{m} = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2} + \pi ab + 2a^2}{\pi a + 2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

▲

Chceme-li sestavit vzorce pro výpočet statických momentů prostorové křivky k souřadným rovinám, pak postupujeme analogicky s tím rozdílem, že pro elementy křivky určujeme jejich vzdálenosti od souřadných rovin (viz obr. 3.6).

Označme statické momenty křivky k rovinám  $z = 0$ ,  $y = 0$  a  $x = 0$  symboly  $S_{xy}$ ,  $S_{xz}$  a  $S_{yz}$  a  $\rho = \rho(x, y, z)$  specifickou hustotu křivky v bodě  $[x, y, z]$ .

Dostaneme:

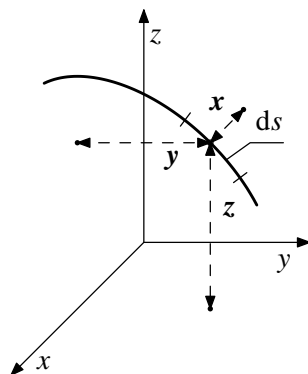
$$S_{xy} = \int_K dS_{xy} = \int_K \rho z \, ds, \quad (3.10)$$

$$S_{xz} = \int_K dS_{xz} = \int_K \rho y \, ds, \quad (3.11)$$

$$S_{yz} = \int_K dS_{yz} = \int_K \rho x \, ds. \quad (3.12)$$

Pro souřadnice  $x_T, y_T, z_T$  těžiště prostorové křivky  $K$  platí následující vzorce:

$$x_T = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{S_{xy}}{m}. \quad (3.13)$$



Obr. 3.6

### Momenty setrvačnosti křivky k osám

Moment setrvačnosti bodu k ose je fyzikálně definován jako součin jeho hmotnosti a čtverce vzdálenosti bodu od osy rotace.

Pokud počítáme moment setrvačnosti křivky k některé ose, pak vzdálenosti bodů křivky od osy rotace se mění, rovněž se může měnit měrná hustota bodů na křivce. Proto k výpočtu momentu setrvačnosti křivky použijeme křivkový integrál.

Odvodíme vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti prostorové křivky k ose  $x$ , která je osou rotace.

Křivku rozdělíme na elementy, jejichž délku označíme  $ds$ . V každém z elementů zvolíme libovolný bod o souřadnicích  $[x, y, z]$  a jeho vzdálenost od osy rotace označíme  $D_x$ . Podle Pythagorovy věty bude  $D_x = \sqrt{y^2 + z^2}$  (viz obr. 3.7).

Pak moment setrvačnosti tohoto elementu k ose  $x$ , který označíme  $dI_x$ , bude roven

$$dI_x = \rho(y^2 + z^2) \, ds.$$

Moment setrvačnosti celé křivky k ose  $x$ , který označíme  $I_x$ , získáme tedy tak, že sečteme momenty setrvačnosti těchto elementů, což vyjádříme vzorcem

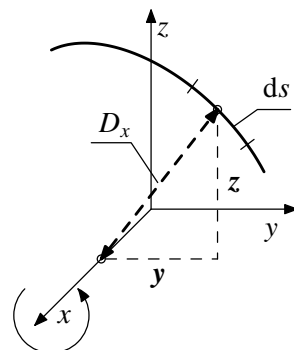
$$I_x = \int_K dI_x = \int_K \rho(y^2 + z^2) \, ds. \quad (3.14)$$

Analogicky odvodíme vzorce pro momenty setrvačnosti křivky k ostatním osám rotace.

Bude:

$$I_y = \int_K dI_y = \int_K \rho(x^2 + z^2) \, ds, \quad (3.15)$$

$$I_z = \int_K dI_z = \int_K \rho(x^2 + y^2) \, ds. \quad (3.16)$$



Obr. 3.7

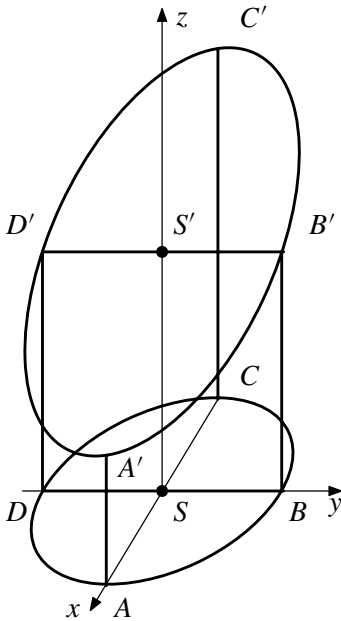


**Příklad 3.4.** Určete moment setrvačnosti k ose  $z$  drátěné konstrukce na obr. 3.8, sestrojené z tenkého drátu. Specifická hustota drátu je rovna konstantě  $\rho$ . Geometricky sestává konstrukce z těchto křivek: Kružnice (křivka  $K_1$ ) o poloměru  $a$  se středem v bodě  $S$ , elipsy (křivka  $K_2$ ) se středem v bodě  $S'$ , jejíž vrcholy jsou v bodech  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  a  $D'$ . Kružnice a elipsa jsou spojeny úsečkami, rovnoběžnými s osou  $z$ . Úsečka  $AA'$  (křivka  $K_3$ ) má délku  $b$ , úsečka  $CC'$  (křivka  $K_5$ ) má délku  $c$ ,  $c > b$ , úsečky  $BB'$  (křivka  $K_4$ ) a  $DD'$  (křivka  $K_6$ ) mají délku  $d = (b + c)/2$ . Konstrukce je úsečkami  $DB$  (křivka  $K_7$ ) a  $D'B'$  (křivka  $K_8$ ) připojena v bodech  $S$  a  $S'$  k ose  $z$ . Bod  $S$  je počátek souřadné soustavy.

**Řešení.** Moment setrvačnosti křivky  $K_1$  k ose  $z$  označíme  $I_{K_1}$ . Nejprve vyjádříme křivku  $K_1$  parametrickými rovnicemi. Protože křivka  $K_1$  je kružnice, jsou nejvhodnější parametrické rovnice:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = 0, \quad t \in (0, 2\pi),$$

kde parametr  $t$  je úhel, který svírá průvodič bodu kružnice s kladným směrem osy  $x$ , orientovaný proti pohybu hodinových ručiček.



Obr. 3.8

Pak délka elementu křivky  $K_1$  bude  $ds = a dt$ .

Protože vzdálenost bodů křivky od osy rotace je rovna  $a$ , dostaneme:

$$I_{K_1} = \int_{K_1} \rho a^2 ds = \rho a^2 \int_{K_1} ds = 2\pi a^3 \rho.$$

Moment setrvačnosti elipsy (křivky  $K_2$ ) k ose  $z$  označíme  $I_{K_2}$ . K parametrizaci této elipsy využijeme jednak toho, že se její body promítají do bodů kružnice (křivky  $K_1$ ) v rovině  $z = 0$ , jednak toho, že elipsa leží v rovině o rovnici  $z = \frac{b-c}{2a}x + d$ , jak si čtenář, který je obeznámen se základy analytické geometrie v prostoru, může snadno ověřit.

Pak lze křivku  $K_2$  vyjádřit těmito parametrickými rovnicemi:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = \frac{b-c}{2a} a \cos t + d,$$

přičemž parametr  $t$  je též jako u křivky  $K_1$ .

Délka elementu křivky  $K_2$  bude  $ds = a \sqrt{1 + \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2 \sin^2 t} dt$ .

Protože vzdálenosti všech bodů elipsy od osy rotace jsou rovny číslu  $a$ , dostaneme pro moment setrvačnosti:

$$I_{K_2} = \int_{K_2} \rho a^2 ds = a^3 \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2 \sin^2 t} dt.$$

Primitivní funkce k integrandu předchozího integrálu není ale v množině elementárních funkcí. Pro konkrétně zadané rozměry  $a, b, c$  lze tento integrál vypočítat pomocí některé z numerických metod.

Jinou možností je převod na úplný eliptický integrál, jehož hodnotu je možné najít ve speciálních tabulkách. Ten je definován vztahem  $E(\varepsilon) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$ . Z periodičnosti a symetrie sinu plyne, že

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \sin^2 t} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \sin^2 t} dt .$$

Dále substitucí  $t = \frac{\pi}{2} - s$  s ohledem na vztah  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \cos s$  dostaneme, že

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \cos^2 s} ds .$$

S použitím rovnosti  $\cos^2 s = 1 - \sin^2 s$  vyjde vzhledem k rovnosti  $\sqrt{(b-c)^2} = c - b$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \cos^2 s} ds &= \\ &= a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2 \sin^2 s} ds = \\ &= a \sqrt{1 + \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{(b-c)^2}{4a^2 + (b-c)^2} \sin^2 s} ds = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 + (c-b)^2} E\left(\frac{c-b}{\sqrt{4a^2 + (c-b)^2}}\right) . \end{aligned}$$

Celkově dostaneme

$$I_{K_2} = 2\rho a^2 \sqrt{4a^2 + (c-b)^2} E\left(\frac{c-b}{\sqrt{4a^2 + (c-b)^2}}\right) .$$

Nyní určíme momenty setrvačnosti křivek rovnoběžných s osou  $z$ .

Moment setrvačnosti křivky  $K_3$  (úsečka  $AA'$ ) k ose  $z$  označíme  $I_{K_3}$ . Protože vzdálenosti všech bodů této křivky od osy  $z$  jsou rovny číslu  $a$ , bude se moment setrvačnosti křivky  $K_3$  rovnat součinu čtverce vzdálenosti bodů křivky od osy rotace a hmotnosti křivky, tj.

$$I_{K_3} = a^2 b \rho .$$

Analogicky pro ostatní křivky rovnoběžné s osou  $z$  bude:

$$I_{K_4} = a^2 d \rho, \quad I_{K_5} = a^2 c \rho, \quad I_{K_6} = a^2 d \rho .$$

Moment setrvačnosti křivky  $K_7$  k ose  $z$  označíme  $I_{K_7}$ .

Křivku  $K_7$  (úsečku  $DB$ ) vyjádříme parametricky takto. Za parametr  $t$  zvolíme  $y$ -ovou souřadnici jejího bodu, příslušné parametrické rovnice budou:

$$x = 0, \quad y = t, \quad z = 0, \quad \text{kde } t \in \langle -a, a \rangle.$$

Odtud pro délku elementu křivky  $K_7$  platí:  $ds = dt$ .

Protože vzdálenost bodu křivky  $K_7$  od osy rotace je rovna jeho  $y$ -ové souřadnici, dostaneme

$$I_{K_7} = \rho \int_{K_7} y^2 ds = \rho \int_{-a}^a t^2 dt = \frac{2}{3} a^3 \rho.$$

Výpočet pro křivku  $K_8$  (úsečku  $D'B'$ ) bude obdobný (pouze platí  $z = d$ ), takže

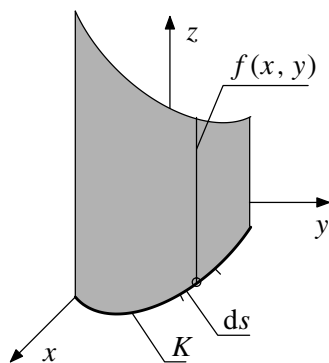
$$I_{K_8} = \frac{2}{3} a^3 \rho.$$

Sečtením jednotlivých momentů setrvačnosti obdržíme

$$I_z = 2a^2 \rho \left[ \left( \pi + \frac{2}{3} \right) a + b + c + \sqrt{4a^2 + (c-b)^2} \operatorname{E} \left( \frac{c-b}{\sqrt{4a^2 + (c-b)^2}} \right) \right].$$

Je třeba uvědomit si, že drátěná konstrukce není křivkou ve smyslu definice 2.2. Vzhledem k aditivitě momentu setrvačnosti (viz poznámka na str. 44) je ale možné rozdělit tuto konstrukci při výpočtu na výše uvedené křivky. ▲

### Obsah válcové stěny



Obr. 3.9

Na obr. 3.9 je schématicky znázorněn výpočet obsahu válcové plochy, jejíž základna je vytvořena křivkou  $K$  v rovině  $z = 0$  (tzv. řídicí křivka). Plocha je tvořena přímkami rovnoběžnými s osou  $z$  a shora je ohraničena grafem funkce  $z = f(x, y)$ , přičemž předpokládáme, že  $f(x, y) \geq 0$ .

Obsah válcové stěny se vypočte takto.

Křivku  $K$ , která tvoří základnu stěny, rozdělíme na elementy o délce  $ds$ . V každém elementu křivky zvolíme libovolný bod a určíme v něm hodnotu funkce  $f(x, y)$ . Stěnu nahradíme (prohnutými) obdélníky. Základny obdélníků budou elementy křivky  $K$ , výšky obdélníků budou rovny

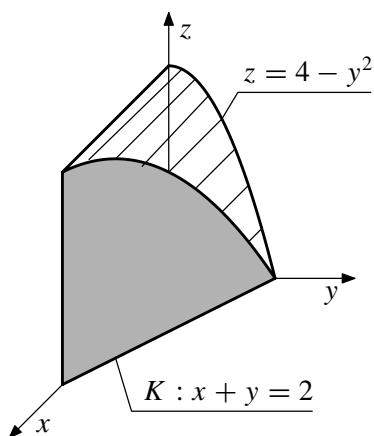
hodnotám  $f(x, y)$ . Pak obsah každého z obdélníků je roven součinu délky základny  $ds$  a výšky  $f(x, y)$ .

Celkový obsah  $m_2$  plochy  $O$  pak získáme součtem obsahů těchto obdélníků, tedy

$$m_2(O) = \int_K f(x, y) ds. \quad (3.17)$$



**Příklad 3.5.** Vypočtete obsah přední stěny klínu, který z trojbokého hranolu, ohraničeného rovinami  $x + y = 2$ ,  $x = 0$  a  $y = 0$  odseknou plochy  $z = 0$  a  $z = 4 - y^2$ .



Obr. 3.10

**Řešení.** Přední stěna klínu je na obr. 3.10 vystínována. Její obsah vypočteme pomocí integrálu následovně.

Základnu plochy tvoří úsečka  $K$ , ležící na přímce s kartézskými souřadnicemi  $x + y = 2$ . Tuto úsečku vyjádříme parametrickými rovnicemi následovně.

Zvolíme-li  $x$ -ovou souřadnici jejího bodu za parametr  $t$ , pak parametrické rovnice křivky  $K$  budou

$$x = t, \quad y = 2 - t, \quad \text{kde } t \in (0, 2).$$

Délka elementu této křivky bude  $ds = \sqrt{2} dt$ .

Protože stěna je shora ohraničena plochou o rovnici  $z = 4 - y^2$ , získáme po dosazení do výše uvedeného vzorce pro obsah plochy

$$m_2(O) = \int_K (4 - y^2) ds = \int_0^2 (4 - (2 - t)^2) \sqrt{2} dt = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$



**Poznámka.** Pro všechny veličiny, jejichž výpočtem jsme se v tomto oddílu zabývali, platí následující důležitá vlastnost: Rozdělíme-li danou křivku na disjunktní části, je veličina odpovídající celé křivce rovna součtu veličin odpovídajících jednotlivým částem. Tato vlastnost se nazývá *aditivita*. Protože i křivkový integrál I. druhu má tuto vlastnost, je s jeho pomocí možné počítat pouze veličiny mající tuto vlastnost.

## Pojmy k zapamatování

- geometrický význam definice křivkového integrálu I. druhu,
- definice integrálního součtu odpovídajícího křivkovému integrálu I. druhu,
- aditivita a homogenita křivkového integrálu I. druhu,
- výpočet křivkového integrálu I. druhu v konkrétních příkladech.

Σ

## Kontrolní otázky

1. Udejte příklad funkce a regulární křivky  $C$  takové, že křivkový integrál I. druhu  $\int_C f(x, y, z) dz$  neexistuje (využijte příklad riemannovsky neintegrovatelné funkce).
2. Udejte příklad křivky se dvěma různými parametrizacemi, přičemž jedna z nich je regulární a druhá není.
3. Vysvětlete vztah mezi křivkovým integrálem I. druhu a vzorcem pro výpočet délky rovinné křivky ze základního kursu diferenciálního počtu.

?



## Příklady k procvičení

- Pro zadanou rovinnou křivku  $K$  s konstantní specifickou hustotou  $\rho = 1$  vypočtete délku  $L = m_1(K)$ , statické momenty  $M_x, M_y$  k osám  $x, y$  a momenty setrvačnosti  $I_x, I_y$  k osám  $x, y$ :
  - Půlkružnice  $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0, r > 0$ .
  - Řetězovka  $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}), x \in \langle -a, a \rangle, a > 0$ .
  - Cykloida  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .
  - Čtvrtina asteroidy  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, a > 0, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ .
- Pro zadanou rovinnou křivku  $K$  s konstantní specifickou hustotou  $\rho = 1$  vypočtete délku  $L = m_1(K)$ , statické momenty  $M_x, M_y$  k osám  $x, y$  a momenty setrvačnosti  $I_x, I_y$  k osám  $x, y$  (výpočty je nutno provést numericky):
  - Elipsa  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0$ .
  - Parabola  $y = 0,5x^2, x \in \langle -2, 2 \rangle$ .
  - Parabola  $y^2 = 2(x - 1), x \in \langle 1, 3 \rangle$ .
  - Sinusoida  $y = \sin x, x \in \langle 0, \pi \rangle$ .
  - Logaritmus  $y = \ln x, x \in \langle 1, 3 \rangle$ .
- Pro zadanou prostorovou křivku  $K$  s konstantní specifickou hustotou  $\rho = 1$  vypočtete délku  $L = m_1(K)$ , statické momenty  $M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}$  k rovinám  $z = 0, y = 0, x = 0$  a momenty setrvačnosti  $I_x, I_y, I_z$  k osám  $x, y, z$ :
  - Šroubovice  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0, b > 0$ .
  - Půlkružnice, která je průnikem ploch  $x^2 + z^2 = r^2, r > 0, z \geq 0$  a  $y = 1$ , s parametrickými rovnicemi  $x = r \cos t, y = 1, z = r \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$ .
  - Trojúhelník s vrcholy  $A[2, 0, 0], B[0, 2, 4]$  a  $C[0, -2, 4]$ .
- Pro zadanou prostorovou křivku  $K$  s konstantní specifickou hustotou  $\rho = 1$  vypočtete délku  $L = m_1(K)$ , statické momenty  $M_{xy}, M_{xz}, M_{yz}$  k rovinám  $z = 0, y = 0, x = 0$  a momenty setrvačnosti  $I_x, I_y, I_z$  k osám  $x, y, z$  (výpočty je nutno provést numericky):
  - Průnik válcové plochy  $x^2 + y^2 = 4$  a parabolického válce  $z = 0,5x^2$ .
  - Průnik válcové plochy  $x^2 + y^2 = 4$  a roviny  $x + z = 2$ .
  - Průnik válcové plochy  $x^2 + y^2 = 2x$  a kulové plochy  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , kde  $z \geq 0$ .
- Určete obsah pláště, který na válcové ploše, jejíž řídící křivka  $l$  leží v rovině  $z = 0$ , povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou  $z$ , vytíná plocha  $z = f(x, y)$ . Válcová plocha je zdola ohraničena rovinou  $z = 0$ .

- a)  $l: x^2 + y^2 = r^2, \quad f: z = r + \frac{x^2}{r}, \quad r > 0.$
- b)  $l: x^2 + y^2 = r^2, \quad f: z = r - x, \quad r > 0.$
- c)  $l: x^2 + y^2 = rx, \quad f: x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0, \quad r > 0.$
- d)  $l: x^2 + y^2 = rx, \quad f: x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad r > 0.$
- e)  $l: x + 2y = 4, \quad f: z = 4 - x - y.$



# Kapitola 4

## Křivkový integrál II. druhu



### Průvodce studiem

Primární aplikací křivkového integrálu II. druhu je výpočet práce, kterou vykoná hmotný bod při pohybu v silovém poli podél dané křivky. Definice křivkového integrálu II. druhu je v principu stejná jako u integrálu I. druhu, podobně je tomu i s výpočetními metodami a vlastnostmi křivkového integrálu II. druhu (aditivita a homogenita). Důležitým rozdílem mezi integrálem I. a II. druhu je, že integrál I. druhu nezávisí na orientaci integrální křivky, zatímco u integrálu II. druhu je tato orientace podstatná.



### Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- ukázat na podobnosti a rozdílnosti konstrukce křivkového integrálu I. a II. druhu,
- ukázat fyzikální motivaci pro definici křivkového integrálu II. druhu,
- zdůraznit důležitost křivkového integrálu II. druhu ve fyzikálních aplikacích.

### 4.1. Definice křivkového integrálu II. druhu

V tomto odstavci popíšeme konstrukci křivkového integrálu z vektorové funkce.

Uvažujme orientovanou křivku  $K$ , jejíž souřadnice  $[x, y, z]$  jsou popsány v kartézské souřadné soustavě parametrickými rovnicemi

$$K : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in J = \langle \alpha, \beta \rangle,$$

majícími spojitě derivace, přičemž  $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 0$  nejvýše v konečně mnoha bodech, a vektorovou funkci

$$\mathbf{a}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k},$$

definovanou v bodech křivky  $\mathbf{K}$ . O ní předpokládejme, že složky  $\mathbf{a}(x(t), y(t), z(t))$  jsou po částech spojitě na  $\langle \alpha, \beta \rangle$  (což je splněno např. když  $\mathbf{a}$  je spojitá).

Podobně jako při konstrukci křivkového integrálu I. druhu pomocí libovolně zvolených hodnot  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rozdělíme interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  na  $n$  dílků. Tyto dělicí body přeneseme na  $\mathbf{K}$  a označíme  $A_k = [x(t_k), y(t_k), z(t_k)]$ . Body  $A_0, \dots, A_n$  rozdělí křivku na  $n$  úseků (oblouků) orientovaných souhlasně s  $\mathbf{K}$ , které nazveme *orientované elementy křivky* a označíme je  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Na obr. 4.1 je  $k$ -tý element vyznačen tučně. Délka  $k$ -tého elementu bude  $m_1(s_k)$ .

V každém z elementů  $s_k$  zvolíme libovolný bod, označme jej  $M_k$ , o souřadnicích  $[x_k, y_k, z_k]$  a vypočteme v něm funkční hodnotu  $\mathbf{a}(x_k, y_k, z_k)$ . Body  $M_k$  tvoří tzv. *výběr reprezentantů* příslušející dělení intervalu  $\langle \alpha, \beta \rangle$  určenému body  $t_1, \dots, t_{n-1}$ . Dále v každém bodě  $M_k$  sestrojíme vektor  $\mathbf{t}_k$ , který bude kolineární s tečným vektorem  $\mathbf{r}'(M_k)$  a jehož velikost bude  $m_1(s_k)$ . Orientaci vektoru  $\mathbf{t}_k$  zvolíme tak, aby v případě orientace křivky souhlasné s parametrickým vyjádřením to byl kladný násobek tečného vektoru  $\mathbf{r}'(M_k)$  a v případě orientace křivky nesouhlasné s parametrickým vyjádřením to byl záporný násobek tohoto vektoru. Přitom  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ . Konstrukce je znázorněna na obr. 4.1.

Utvoříme tzv. *integrální součet*  $\mathcal{S}_n$ , sestavený ze skalárních součinů:

$$\mathcal{S}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{t}_k.$$

Pokud interpretujeme  $\mathbf{a}(x, y, z)$  jako silové pole, které způsobí přemístění hmotného bodu po křivce  $\mathbf{K}$ , pak skalární součin  $\mathbf{a}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{t}_k$  vyjadřuje přibližně mechanickou práci vykonanou při přemístění bodu podél orientovaného elementu  $s_k$  křivky. Analogicky integrální součet vyjadřuje totéž, ale při přemístění bodu podél celé křivky  $\mathbf{K}$ .

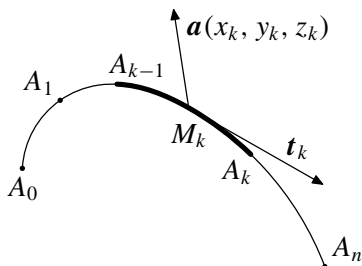
Zvětšujeme-li počet dělicích bodů na křivce, tudíž  $n \rightarrow \infty$ , přičemž požadujeme, aby délka nejdelšího elementu konvergovala k nule, tj.  $\max_k m_1(s_k) \rightarrow 0$ , lze ukázat, že posloupnost integrálních součtů má za výše uvedených předpokladů limitu, kterou označíme symbolem  $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ . Integrál pak definujeme následovně.

**Definice 4.1.** Za předchozích předpokladů existuje nezávisle na posloupnosti dělení a na výběru reprezentantů limita

$$\lim_{\max_k m_1(s_k) \rightarrow 0} \mathcal{S}_n = \lim_{\max_k m_1(s_k) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mathbf{a}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{t}_k = \int_{\mathbf{K}} \mathbf{a}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Nazýváme ji *křivkovým integrálem II. druhu* nebo *křivkovým integrálem z vektorové funkce*.

V křivkovém integrálu mají jednotlivé symboly následující význam:



Obr. 4.1

- písmeno  $\mathbf{K}$  pod znakem integrálu označuje, že integrujeme po orientované křivce  $\mathbf{K}$  (integrační obor),
- $\mathbf{a}(x, y, z)$  označuje, kterou funkci integrujeme (integrand),
- $d\mathbf{r}$  označuje diferenciál polohového vektoru bodu křivky.

Protože  $\mathbf{a} = (P, Q, R)$  a podle (2.6) je  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ , lze křivkový integrál II. druhu rozepsat po provedení skalárního součinu následovně:

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{K}} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz. \quad (4.2)$$

Jestliže orientovaná křivka  $\mathbf{K}$  je uzavřená, pak se pro křivkový integrál z vektorové funkce (který se často nazývá *circulace*) používá označení

$$\oint_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.3)$$

## 4.2. Vlastnosti a výpočet křivkového integrálu II. druhu

I pro křivkový integrál II. druhu platí obdobné vlastnosti jako pro obyčejný určitý integrál.

**Věta 4.1.** *Nechť existují integrály  $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  a  $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r}$  a číslo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pak integrály stojící v následujících rovnostech nalevo existují a platí:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{K}} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{K}} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r}, \\ \int_{\mathbf{K}} \alpha \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \alpha \int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}, \\ \int_{-\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

První vlastnost se nazývá *aditivita vzhledem k integrandu*, druhá *homogenita*. Třetí vlastnost ukazuje, že se změnou orientace křivky se mění znaménko výsledku (na rozdíl od křivkového integrálu ze skalární funkce).

**Věta 4.2.** *Nechť existuje integrál  $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  a orientovaný oblouk  $\mathbf{K}$  je spojením svých částí  $\mathbf{K}_1$  a  $\mathbf{K}_2$ , které jsou souhlasně orientované s  $\mathbf{K}$ . Pak integrály stojící v následující rovnosti napravo existují a platí:*

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{K}_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{K}_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.4)$$

Tato vlastnost se nazývá *aditivita vzhledem k integračnímu oboru*.

Předchozí věta nám umožňuje rozšířit definici křivkového integrálu na širší třídu křivek.

Předpokládejme, že po částech hladký orientovaný oblouk  $K$  je spojením svých hladkých částí  $K_1, \dots, K_n, n \in \mathbb{N}$ , které jsou orientované souhlasně s  $K$ . Pak definujeme

$$\int_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{K_n} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}. \quad (4.5)$$

Věta 4.2 zajišťuje, že tato definice je korektní (nezávisí na konkrétním rozdělení křivky  $K$  na konečný počet částí). Platí rovněž obdobná poznámka jako za větou 3.2.

Princip výpočtu křivkového integrálu z vektorové funkce spočívá v tom, že tento integrál převedeme na jednoduchý Riemannův integrál.

Uvažujme orientovanou křivku  $K$  mající parametrické rovnice

$$K: \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in J = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

Z parametrických rovnic křivky určíme diferenciály proměnných:

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt, \quad dz = z'(t) dt.$$

Integrand  $\mathbf{a}(x, y, z)$  vyjádříme pomocí souřadnic křivky jako funkci proměnné  $t$ , tedy  $\mathbf{a}(x, y, z) = \mathbf{a}[x(t), y(t), z(t)]$ . Meze integrálu budou krajní body  $\alpha$  a  $\beta$  oboru parametru.

Pak lze ukázat, že křivkový integrál lze převést na jednoduchý určitý integrál takto:

$$\int_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pm \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt. \quad (4.6)$$

Znaménko  $+$  platí, pokud je křivka  $K$  orientovaná souhlasně s parametrickým vyjádřením, a znaménko  $-$  v opačném případě.

Z tohoto vyjádření snadno vyplývá užitím substituce do určitého integrálu následující věta.

**Věta 4.3.** *Nechť existuje  $\int_K \mathbf{a} \, d\mathbf{r}$ , křivka  $L$  je ekvivalentní s  $K$  a obě jsou stejně orientované. Pak*

$$\int_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}.$$

Křivky budou stejně orientované právě, když transformace parametru bude rostoucí funkcí. Platí obdobná poznámka jako za větou 3.3.

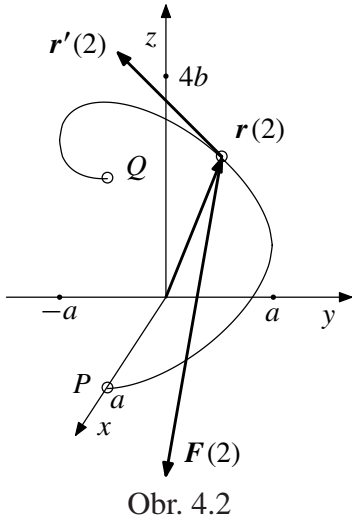
### 4.3. Aplikace křivkového integrálu II. druhu

Za nejdůležitější aplikaci křivkového integrálu II. druhu lze považovat výpočet *mechanické práce*, která je vykonána v silovém poli při přemísťování hmotného bodu po nějaké dráze. Definice křivkového integrálu z vektorové funkce byla motivována výpočtem této práce.

V následujících příkladech některé z těchto aplikací ukážeme.



**Příklad 4.1.** V kartézské souřadné soustavě je zadáno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\Omega = \mathbb{R}^3$  a vektor  $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - \frac{y}{2}\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ . V tomto poli se bod o jednotkové hmotnosti, vzdálený  $a = 2$  m od osy  $z$ , otáčí kolem ní konstantní úhlovou rychlostí  $\omega = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  a současně se pohybuje ve směru této osy rovnoměrným pohybem konstantní rychlostí  $b = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vypočítejte práci, která je při tomto pohybu vykonána za dobu  $t = 4$  s, jestliže bod byl na počátku děje v bodě  $P[a, 0, 0]$ .



Obr. 4.2

*Řešení.* Křivka, po níž se popsáný pohyb realizuje, se nazývá *obyčejná šroubovice*. Její souřadnicové funkce jsou

$$\mathbf{K} : \quad x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt,$$

kde parametr  $t$  značí dobu pohybu v sekundách, přičemž  $t \in (0, 4)$ . Křivka  $\mathbf{K}$  je orientována od bodu  $P$  do bodu  $Q$  a to souhlasně se svou parametrizací.

Diferenciály souřadnicových funkcí jsou

$$dx = -a\omega \sin \omega t \, dt,$$

$$dy = a\omega \cos \omega t \, dt,$$

$$dz = b \, dt.$$

Práce  $A$  síly  $\mathbf{F}$  po křivce  $\mathbf{K}$  bude:

$$A = \int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{K}} -x \, dx - \frac{y}{2} \, dy - 2z \, dz.$$

Po dosazení výše uvedených souřadnicových funkcí a jejich diferenciálů do integrálu jej převedeme na jednoduchý. Dostaneme (orientace je souhlasná s parametrizací)

$$\begin{aligned} A &= + \int_0^4 \left[ -a \cos \omega t \cdot (-a) \omega \sin \omega t - \frac{1}{2} a \sin \omega t \cdot a \omega \cos \omega t - 2bt \cdot b \right] dt = \\ &= \int_0^4 \left[ \frac{1}{2} a^2 \omega \sin \omega t \cos \omega t - 2b^2 t \right] dt = \left[ \frac{a^2}{4} \sin^2 \omega t - b^2 t^2 \right]_0^4 = -36. \end{aligned}$$

Výsledek značí, že při popsáném pohybu síla práci spotřebovala.

Pro ilustraci jsou na obrázku znázorněny pro hodnotu parametru  $t = 2$  vektory  $\mathbf{r}(2) = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}'(2) = -2\mathbf{j} + 1,5\mathbf{k}$  a  $\mathbf{F}(2) = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$ . ▲

**Příklad 4.2.** V kartézské souřadné soustavě je zadáno rovinné silové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  a  $\mathbf{F} = \frac{-xi - yj}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Vypočtete práci, která je vykonána při přemístění hmotného bodu po parabole  $y = 1 + x^2$  z bodu  $P[2, 5]$  do bodu  $Q[0, 1]$  v tomto silovém poli.

**Řešení.** Nejprve křivku  $\mathbf{K}$  vyjádříme parametricky.

Jestliže zvolíme za parametr  $t$  souřadnici  $x$  bodu paraboly, dostaneme parametrické rovnice křivky

$$\mathbf{K} : \quad x = t, \quad y = 1 + t^2, \quad t \in (0, 2).$$

Křivka je nesouhlasně orientovaná s touto parametrizací.

Dále určíme diferenciály souřadnicových funkcí:

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt.$$

Pro názornost je na obr. 4.3 nakreslen bod  $R$  křivky  $\mathbf{K}$  mající souřadnice  $[1, 2]$  a příslušné vektory  $\mathbf{r}'(R) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  a  $\mathbf{F}(R) = (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j})/\sqrt{5}$ . Vykonaná práce  $A$  bude

$$A = \int_{\mathbf{K}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{K}} \frac{-x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dosadíme-li nyní do integrálu za jednotlivé výrazy jejich parametrické vyjádření, dostaneme (orientace je nesouhlasná s parametrizací)

$$A = - \int_0^2 \frac{-t dt - (1 + t^2) 2t dt}{\sqrt{t^2 + (1 + t^2)^2}} = \int_0^2 \frac{(2t^3 + 3t) dt}{\sqrt{t^4 + 3t^2 + 1}}.$$

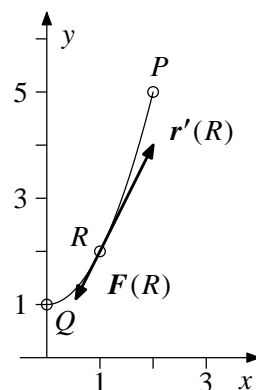
Po substituci  $t^4 + 3t^2 + 1 = z^2$  dostaneme

$$A = \int_1^{\sqrt{29}} dz = \sqrt{29} - 1.$$

Tedy při pohybu po zadané křivce síla vykonala kladnou práci. ▲

## Pojmy k zapamatování

- integrální součet příslušející křivkovému integrálu II. druhu,
- orientace křivky a její vztah k hodnotě křivkového integrálu II. druhu,
- práce při pohybu hmotného bodu v silovém poli.



Obr. 4.3



## Kontrolní otázky

1. Vysvětlete konstrukci křivkového integrálu II. druhu ve vztahu ke konstrukci Riemannova integrálu z funkce jedné proměnné.
2. Jaký je vztah mezi orientací křivky, podél níž se integruje, a hodnotou křivkového integrálu II. druhu?
3. Jak se změní hodnota křivkového integrálu II. druhu při změně parametrizace *téže* křivky?



## Příklady k procvičení

1. Vypočítejte práci  $A$ , která je vynaložena při přemístění hmotného bodu o hmotnosti  $m = 1$  ve vektorovém poli  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{F})$

- a)  $\mathbf{F} = 3\mathbf{j}$ ,
- b)  $\mathbf{F} = 2\mathbf{i}$ ,
- c)  $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ,
- d)  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ,

po orientované křivce  $\mathbf{K}$ :

- A) Půlkružnice  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , orientovaná od bodu  $P_1[-2, 0]$  k bodu  $P_2[2, 0]$ .
  - B) Půlelipsa  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $y \geq 0$ , orientovaná od bodu  $P_1[-2, 0]$  k bodu  $P_2[2, 0]$ .
  - C) Parabola  $y = \frac{1}{2}x^2$ , orientovaná od bodu  $P_1[-2, 2]$  k bodu  $P_2[2, 2]$ .
  - D) Parabola  $y^2 = 2(x - 1)$ , kde  $x \in \langle 1, 3 \rangle$ , orientovaná od bodu  $P_1[1, 0]$  k bodu  $P_2[3, 2]$ .
  - E) Řetězovka  $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ ,  $x \in \langle -2, 2 \rangle$  orientovaná od bodu  $P_1[-2, e + e^{-1}]$  k bodu  $P_2[2, e + e^{-1}]$ .
  - F) Cykloida, zadaná parametricky  $x = 2(t - \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ , jejíž parametr  $t$  je v intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , orientovaná od bodu  $P_1[0, 0]$  k bodu  $P_2[4\pi, 0]$ .
  - G) Asteroida, zadaná parametrickými rovnicemi  $x = 2\cos^3 t$ ,  $y = 2\sin^3 t$ , kde  $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ , orientovaná od bodu  $P_1[2, 0]$  k bodu  $P_2[0, 2]$ .
  - H) Sinusoida  $y = \sin x$ ,  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ , orientovaná od bodu  $P_1[0, 0]$  k bodu  $P_2[\pi, 0]$ .
2. Vypočítejte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli  $(\Omega, \mathbf{F})$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{[0, 0, 0]\}$ ,  $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$ , po části průnikové křivky ploch  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + z = 2$ , orientované při pohledu z kladné části osy  $z$  proti směru hodinových ručiček
    - a) z bodu  $U[2, 0, 0]$  do bodu  $V[-2, 0, 4]$ ,
    - b) z bodu  $V[-2, 0, 4]$  do bodu  $U[2, 0, 0]$ .
  3. Vypočítejte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli  $(\Omega, \mathbf{F})$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{[0, 0, 0]\}$ ,  $\mathbf{F} = \frac{z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$ , po části průnikové křivky ploch  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + (z - 2)^2 = 4$ ,  $z \leq 2$ , orientované při pohledu z kladné části osy  $z$  proti směru hodinových ručiček

- a) z bodu  $U[2, 0, 2]$  do bodu  $T[0, 2, 0]$ ,  
b) z bodu  $T[0, 2, 0]$  do bodu  $V[-2, 0, 2]$ .
4. Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli  $(\Omega, \mathbf{F})$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{[0, y, 0], y \in \mathbb{R}\}$ ,  $\mathbf{F} = \frac{y\mathbf{j}}{x^2+z^2}$ , po obvodu trojúhelníka  $ABC$ , kde  $A[1, 0, 0]$ ,  $B[0, 3, 2]$ ,  $C[0, -3, 2]$ , orientovaného při pohledu z kladné části osy  $z$  proti směru hodinových ručiček.
5. Vypočtěte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti ve vektorovém poli  $(\mathbb{R}^3, \mathbf{F})$ ,  $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ ,
- a) po šroubovici  $C: \mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ , orientované shodně s parametrickým vyjádřením,  
b) po úsečce  $\overline{AB}$ ,  $A[2, 0, 0]$ ,  $B[2, 0, 2\pi]$ , orientované od  $A$  do  $B$ .



## Kapitola 5

# Nezávislost na integrační cestě a vztah mezi integrály



### Průvodce studiem

*Ze základního kursu fyziky je známo (viz například tzv. jednoduché stroje), že „práce se neušetří, pouze se usnadní“, což v terminologii této kapitoly znamená, že vykonaná (spotřebovaná) práce v gravitačním poli závisí pouze na počátečním a koncovém bodu křivky, po níž se těleso pohybuje, nikoliv na tvaru křivky spojující tato dva body. V této kapitole odvodíme nutné a postačující podmínky pro obecné vektorové pole, v němž křivkový integrál II. druhu nezávisí na integrační cestě mezi dvěma danými body. Zaměříme se rovněž na souvislost mezi integrálem I. a II. druhu a na tzv. Greenovu integrální větu.*



### Cíle

Po prostudování této kapitoly budete umět

- odvodit nutnou a postačující podmínku pro nezávislost křivkového integrálu II. druhu na integrační cestě,
- ukázat vztah těchto podmínek s pojmy z diferenciálního počtu funkcí více proměnných,
- odvodit vzorce ukazující souvislost mezi křivkovými integrály I. a II. druhu,
- odvodit tzv. Greenovu integrální větu a ukázat její souvislost s nezávislostí křivkového integrálu na integrační cestě.

## 5.1. Nezávislost křivkového integrálu II. druhu na integrační cestě

Při výpočtech křivkových integrálů z některých vektorových funkcí po různých křivkách lze pozorovat, že tyto integrály mají stejnou hodnotu, tedy na volbě křivky nezávisí.

V následujícím příkladu ukážeme, že práce vykonaná v silovém poli z předchozího příkladu je stejná po úsečce  $PQ$  jako po zadané parabole.

**Příklad 5.1.** Uvažujme stejné silové pole jako v předchozím příkladu s tím rozdílem, že vypočteme práci při pohybu po úsečce  $PQ$  (srv. obr. 4.3).



**Řešení.** Úsečka  $PQ$  leží na přímce  $y = 1 + 2x$ . Budeme ji parametrizovat. Za parametr  $t$  volíme souřadnici  $x$  bodu přímky. Pak

$$L: \quad x = t, \quad y = 1 + 2t, \quad t \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Orientace je opět nesouhlasná s parametrickým vyjádřením. Diferenciály souřadnicových funkcí budou

$$dx = dt, \quad dy = 2 dt.$$

Nyní vypočteme integrál:

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_L \frac{-x dx - y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Po dosazení parametrického vyjádření křivky  $L$  a úpravě dostaneme s využitím substituce  $5t^2 + 4t + 1 = z^2$

$$A = - \int_0^2 \frac{(-5t - 2) dt}{\sqrt{5t^2 + 4t + 1}} = \int_1^{\sqrt{29}} dz = \left[ \sqrt{5t^2 + 4t + 1} \right]_0^2 = \sqrt{29} - 1,$$

což je stejný výsledek jako v předchozím příkladu. Tedy po dvou různých křivkách  $K$  a  $L$  majících stejné počáteční a stejné koncové body má integrál stejnou hodnotu. ▲

Níže ukážeme, že tento výsledek není náhodný, tj. že za určitých podmínek nezávisí hodnota integrálu na volbě integrační křivky. Nejprve přesně nadefinujeme, co tato nezávislost znamená, a pak zformulujeme podmínky zaručující nezávislost křivkového integrálu z vektorového pole na křivce.

**Definice 5.1.** Necht' je dáno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ . Řekneme, že křivkový integrál z vektorového pole  $\mathbf{F}$  nezávisí v  $\Omega$  na integrační cestě, když pro libovolné dvě orientované po částech regulární křivky  $K_1, K_2$ , které leží v  $\Omega$  a mají společné počáteční a koncové body, platí

$$\int_{K_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.1)$$

Protože spojením  $K_1$  a  $-K_2$  vznikne uzavřená křivka  $K$ , plyne z (5.1), že

$$\oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.2)$$

pro libovolnou uzavřenou po částech regulární orientovanou křivku  $K$  ležící v  $\Omega$ . Úvahu lze obrátit, takže (5.1) a (5.2) jsou ekvivalentní.

Otázka nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě je důležitá především z fyzikálního hlediska. Jestliže vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  interpretujeme jako intenzitu silového pole, pak integrál  $\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  určuje práci tohoto pole po křivce  $K$ . Jestliže tato práce nezávisí na tvaru křivky, ale jen na jejích koncových bodech, pak toto pole nazýváme *konzervativní*.

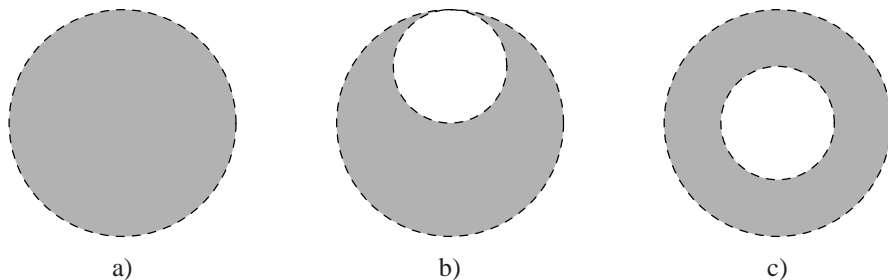
V odstavci 1.2 jsme uvedli, že když je skalární funkce  $U$  diferencovatelná na množině  $\Omega$ , pak skalárnímu poli  $(\Omega, U)$  je jednoznačně přiřazeno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\mathbf{F} = \text{grad } U$ . Vektorové pole mající takové vyjádření nazýváme *potenciálovým polem* a funkci  $U$  jeho *kmenovou funkcí*. Funkci  $-U$  nazýváme *potenciálem pole*.

Než zformulujeme nutné a postačující podmínky nezávislosti na integrační cestě, musíme zavést několik důležitých pojmů.

**Definice 5.2.** Necht'  $\Omega$  je podmnožina  $\mathbb{R}^2$  nebo  $\mathbb{R}^3$ . Pak  $\Omega$  se nazývá

1. (obloukovitě) *souvislá*, jestliže libovolné dva body v  $\Omega$  lze spojit obloukem, který leží celý v  $\Omega$ ;
2. *oblast*, jestliže je otevřená a souvislá;
3. *jednoduše souvislá oblast*, jestliže je to oblast, v níž libovolnou jednoduchou uzavřenou křivku lze spojitě „stáhnout“ do bodu, přičemž při této deformaci neopustíme  $\Omega$ .

Zjednodušeně lze říci, že souvislá množina je „z jednoho kusu“, oblast je navíc otevřená, tj. neobsahuje žádné hraniční body, a jednoduše souvislá oblast nesmí mít „otvory“. Na obr. 5.1 jsou znázorněny tři oblasti — první dvě jsou jednoduše souvislé, třetí ne (čárkovaná čára značí, že hranice k množině nepatří).



Obr. 5.1: Příklady oblastí v  $\mathbb{R}^2$

Nyní už můžeme zformulovat příslušnou větu.

**Věta 5.1.** *Nechť funkce  $F$  je spojitá v oblasti  $\Omega$ .*

- a) *Křivkový integrál  $\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  nezávisí v  $\Omega$  na integrační cestě právě tehdy, když je vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  potenciálové.*
- b) *Jestliže  $U$  je kmenová funkce potenciálového pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , pak pro libovolnou po částech regulární orientovanou křivku  $K$  ležící v  $\Omega$  s počátečním bodem  $A$  a koncovým bodem  $B$  (ve smyslu orientace; u uzavřené křivky je pro tento účel  $A = B$  její libovolný bod) platí*

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A). \quad (5.3)$$

Uvedená věta je z fyzikálního hlediska velmi důležitá. Jestliže je potenciálové vektorové pole silové, pak integrál  $\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  vyjadřuje práci tohoto pole po křivce  $K$ . Podle vzorce (5.3) je tato práce rovna rozdílu hodnot kmenové funkce  $U$  v koncovém a počátečním bodě křivky. Z předchozího rovněž plyne:

- i) *Jestliže se bod pohybuje po křivce, která leží na ekvipotenciální ploše kmenové funkce  $U$ , pak je práce pole určeného vektorem  $\text{grad } U$  rovna nule.*
- ii) *Při přechodu hmotného bodu z ekvipotenciální plochy  $U(x, y, z) = C_1$  na ekvipotenciální plochu  $U(x, y, z) = C_2$  vykoná silové pole práci  $C_2 - C_1$  nezávisle na tom, po jaké křivce se tam tento bod dostal.*

Za předpokladu, že vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  je potenciálové, odvodíme vzorec (5.3). Jestliže je  $(\Omega, \mathbf{F})$  potenciálové pole, pak existuje na  $\Omega$  taková funkce  $U$ , že  $\mathbf{F} = \text{grad } U$ . Vyjádříme-li  $\mathbf{F}$  a  $\text{grad } U$  v souřadnicích, tj.

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k} \quad \text{a} \quad \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k},$$

pak

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R. \quad (5.4)$$

Počítejme integrál  $\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Jestliže je  $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ , parametrické vyjádření souhlasné s orientací křivky  $K$ , pak

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt.$$

V integrálu nahradíme funkce  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  derivacemi  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z}$ .

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt.$$

Zavedme složenou funkci  $\Phi(t) = U(x(t), y(t), z(t))$  pro  $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ . Podle pravidel pro derivaci složené funkce bude

$$\Phi'(t) = \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t).$$

Pak dostáváme

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi'(t) dt = [\Phi(t)]_{\alpha}^{\beta} = U(x(\beta), y(\beta), z(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)).$$

Protože  $[x(\beta), y(\beta), z(\beta)]$  jsou souřadnice bodu  $B$  a  $[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)]$  souřadnice bodu  $A$ , bude

$$\int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(B) - U(A),$$

což jsme chtěli dokázat.

V následující větě uvedeme kritérium udávající, kdy je pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  potenciálové.

**Věta 5.2.** *Nechť funkce  $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  má v oblasti  $\Omega$  spojité parciální derivace prvního řádu podle proměnných  $x, y, z$ .*

a) *Nutnou podmínkou k tomu, aby vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  bylo potenciálové, je, aby v každém bodě  $\Omega$  platilo*

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (5.5)$$

b) *Jestliže je oblast  $\Omega$  jednoduše souvislá, pak podmínka (5.5) je postačující k tomu, aby vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  bylo potenciálové.*

Protože  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$ , je podmínka (5.5) splněna právě tehdy, když

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (5.6)$$

**Poznámka.** V případě rovinného vektorového pole nemá rotace smysl. Ale každé takové pole můžeme považovat za zvláštní případ prostorového pole, u něhož  $P$  a  $Q$  závisí jen na  $x$  a  $y$  a  $R \equiv 0$ . Pak jsou první dvě podmínky v (5.6) triviálně splněny. Tedy v případě rovinného vektorového pole  $F = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  platí analogie věty 5.2, kde podmínka (5.6) bude nahrazena podmínkou

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (5.7)$$

**Příklad 5.2.** Ukažte, že pole  $(\Omega, F)$  zadané v příkladu 4.2 je potenciálové, a určete jeho kmenovou funkci.



**Řešení.** Nejprve ověříme, zda vektor  $F$  splňuje podmínky věty 5.2. Vzhledem k předchozí poznámce stačí ověřit (5.7). Je

$$\begin{aligned} P(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \\ Q(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &\implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}. \end{aligned}$$

Tím jsem ukázali, že je splněna nutná podmínka pro to, aby pole bylo potenciálové.

Protože oblast  $\Omega$  je jednoduše souvislá (je to horní polorovina), je splněna i postačující podmínka, a tudíž pole je potenciálové.

Nyní vypočteme kmenovou funkci  $U(x, y)$  tohoto pole. Protože

$$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{a} \quad \text{grad } U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

dostaneme pro určení funkce  $U$  diferenciální rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (5.8)$$

Z první rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int \frac{-x \, dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = t^2 \\ x \, dx = t \, dt \end{array} \right| = \\ &= - \int dt = -t + C(y) = -\sqrt{x^2 + y^2} + C(y), \end{aligned}$$

kde  $C(y)$  je neznámá funkce. (Uvědomme si, že zkoušku správnosti bychom provedli derivováním vzhledem k proměnné  $x$  a derivace podle  $x$  libovolné funkce závislé pouze na proměnné  $y$  je nula.) Funkci  $C(y)$  určíme tak, že získaný dílčí tvar funkce  $U$  zderivujeme podle  $y$  a dosadíme do druhé rovnice v (5.8):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\sqrt{x^2 + y^2} + C(y) \right) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C'(y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

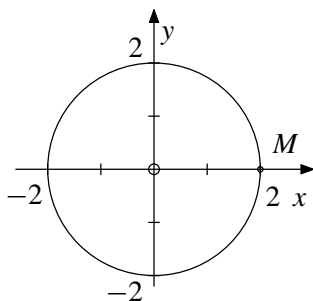
Odtud plyne, že  $C'(y) = 0$  a tedy  $C(y) = K$ , kde  $K \in \mathbb{R}$  je integrační konstanta. Hledaná kmenová funkce je tedy  $U = -\sqrt{x^2 + y^2} + K$ .

Pomocí získané kmenové funkce vypočteme pomocí vzorce (5.3) pro kontrolu práci, která je vykonaná při přemístění bodu jednotkové hmotnosti z  $P$  do  $Q$ . Dostaneme

$$A = U(Q) - U(P) = \left[ -\sqrt{x^2 + y^2} + K \right]_{[2,5]}^{[0,1]} = -1 + \sqrt{29},$$

což je stejný výsledek jako v příkladu 4.2. ▲

V následujících příkladech ukážeme, že při nesplnění podmínky b) věty 5.2 ( $\Omega$  je jednoduše souvislá) pole může, ale nemusí mít kmenovou funkci.



Obr. 5.2

**Příklad 5.3.** V kartézské souřadné soustavě je dáno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$  a  $\mathbf{F} = \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Vypočítejte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti podél celé kružnice  $x^2 + y^2 = 4$ , která je orientována proti směru hodinových ručiček. Za výchozí bod zvolte bod  $M[2, 0]$ .

*Řešení.* Nejprve zjistíme, zda integrál, který chceme počítat, závisí na integrační cestě.

V příkladu 5.2 jsme ověřili, že pro  $\mathbf{F}$  platí (5.7). Je tedy splněna nutná podmínka k tomu, aby pole bylo potenciálové — viz věta 5.2 a).

Není ale splněna postačující podmínka této věty, neboť oblast  $\Omega$  není jednoduše souvislá. Jde totiž o rovinu  $\mathbb{R}^2$  s vyjmutým počátkem (funkce  $\mathbf{F}$  není v tomto bodě definována).

Jsou však splněny podmínky věty 5.1 — kmenovou funkci  $U = -\sqrt{x^2 + y^2} + K$  jsme již našli v příkladu 5.2. Tedy hledaná práce je podle (5.2) rovna nule. ▲



**Příklad 5.4.** V kartézské souřadné soustavě je dáno vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$  a  $\mathbf{F} = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ . Vypočítejte práci, která je vykonána při přemístění bodu jednotkové hmotnosti podél celé kružnice  $x^2 + y^2 = 4$ , která je orientována proti směru hodinových ručiček. Za výchozí bod zvolte bod  $M[2, 0]$ .

*Řešení.* Integrační cesta je znázorněna na obr. 5.2. Ověříme, zda jsou splněny podmínky věty 5.2. Protože jde o rovinné pole, zajímá nás vztah (5.7).

$$\begin{aligned} P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} &\implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} &\implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Nutná podmínka nezávislosti na cestě je splněna, ale postačující ne, protože zadaná oblast  $\Omega$  není jednoduše souvislá. Stejně jako v příkladu 5.3 jde o rovinu  $\mathbb{R}^2$  s vyjmutým počátkem. Větu 5.2 nemůžeme proto použít.

Abychom mohli použít větu 5.1, pokusíme se najít kmenovou funkci. Pro její určení máme diferenciální rovnice

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Z první rovnice dostaneme pro  $y \neq 0$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int \frac{-y \, dx}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} x = ty \\ dx = y \, dt \end{array} \right| = \\ &= - \int \frac{dt}{t^2 + 1} = - \operatorname{arctg} t + C(y) = - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C(y), \end{aligned}$$

kde  $C(y)$  je neznámá funkce. Tu určíme tak, že dílčí tvar funkce  $U$  zderivujeme podle  $y$  a dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C(y) \right) = - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left( - \frac{x}{y^2} \right) + C'(y) = \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + C'(y) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že  $C'(y) = 0$ , a tedy  $C(y) = K$ , kde  $K \in \mathbb{R}$  je integrační konstanta.

Hledaná kmenová funkce je tedy  $U = - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + K$ , ovšem jen pro  $y \neq 0$ . Kdybychom použili diferenciální rovnice pro  $U$  v opačném pořadí, dostali bychom analogicky  $U = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + K$ , tentokrát ale jen pro  $x \neq 0$ . To by nás mohlo přivést k myšlence zvolit konstantu  $K$  odlišně pro  $y > 0$  a pro  $y < 0$  tak, aby  $U$  byla spojitá v  $\mathbb{R}^2$ .

Jestliže zvážíme, že

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} t &= \pm \frac{\pi}{2}, & \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \frac{x}{y} &= \pm\infty, \quad x > 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \frac{x}{y} &= \mp\infty, \quad x < 0, & \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \frac{x}{y} &= 0, \quad x = 0, \end{aligned}$$

dostaneme

$$- \lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \mp \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

Skok při přechodu z dolní do horní poloroviny je na kladné části osy  $x$  roven  $-\pi$  a na záporné části osy  $x$  je roven  $\pi$ . Rozdíl mezi konstantami  $K_1$  (pro  $y > 0$ ) a  $K_2$  (pro  $y < 0$ ) by musel být současně  $\pi$  a  $-\pi$ , což je pochopitelně nemožné. Kmenovou funkci



na celém  $\Omega$  se nám tedy nepodařilo najít (ale mohlo by to být způsobeno nevhodným postupem).

Hledanou práci vypočteme přímo integrálem

$$A = \oint_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_K \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

Kružnice  $K: x^2 + y^2 = 4$  má parametrické rovnice

$$K: \quad x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

přičemž orientace je souhlasná s touto parametrizací. Diferenciály těchto funkcí jsou  $dx = -2 \sin t dt$ ,  $dy = 2 \cos t dt$ . Po dosazení do integrálu dostaneme

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{-2 \sin t \cdot (-2) \sin t dt + 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt}{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Tedy integrál po uzavřené křivce není roven nule a závisí proto na cestě. Z věty 5.1 a) vyplývá, že pole není na  $\Omega$  potenciálové a že naše předchozí neúspěšné hledání kmenové funkce nebylo způsobeno nevhodným postupem, ale je v podstatě věci.  $\blacktriangle$



**Příklad 5.5.** Ověřte, že vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$ , kde  $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$  a  $\mathbf{F} = \left(\frac{1}{y} + yz\right)\mathbf{i} + \left(xz - \frac{x}{y^2}\right)\mathbf{j} + (xy + 2z)\mathbf{k}$  je potenciálové, a najděte jeho kmenovou funkci  $U$ , pro niž platí  $U(2, 1, -1) = 5$ .

**Řešení.** Množina  $\Omega$  je otevřený poloprostor, a proto je to jednoduše souvislá oblast. Funkce  $\mathbf{F}$  má spojité parciální derivace. Ověříme (5.5). Je

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{y} + yz & xz - \frac{x}{y^2} & xy + 2z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(xz - \frac{x}{y^2}\right)\right)\mathbf{i} - \\ &- \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy + 2z) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y} + yz\right)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xz - \frac{x}{y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + yz\right)\right)\mathbf{k} = \\ &= (x - x)\mathbf{i} - (y - y)\mathbf{j} + \left(z - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - z\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Podle věty 5.2 b) je tudíž pole potenciálové.

Protože  $\text{grad } U = (U_x, U_y, U_z)$ , máme pro určení kmenové funkce tři diferenciální rovnice (viz (5.4))

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y} + yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xz - \frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = xy + 2z.$$

Z první rovnice dostaneme

$$U(x, y, z) = \int \left(\frac{1}{y} + yz\right) dx = \frac{x}{y} + xyz + C(y, z).$$

Dosazením dílčího výsledku do druhé rovnice dostaneme pro neznámou funkci  $C(y, z)$

$$-\frac{x}{y^2} + xz + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + xz.$$

Tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \implies C(y, z) = \int 0 \, dy = K(z) \implies U(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + K(z).$$

Dosazením dalšího dílčího výsledku do třetí rovnice vyjde pro neznámou funkci  $K(z)$

$$xy + K'(z) = xy + 2z \implies K'(z) = 2z \implies K'(z) = \int 2z \, dz = z^2 + L.$$

Celkově

$$U(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + z^2 + L, \quad L \in \mathbb{R}.$$

Zbývá určit hodnotu  $L$ . Dosadíme bod  $[2, 1, -1]$ . Dostaneme

$$5 = U(2, 1, -1) = 2 - 2 + 1 + L \implies L = 4.$$

Kmenová funkce je tudíž

$$U(x, y, z) = \frac{x}{y} + xyz + z^2 + 4.$$

▲

## 5.2. Vztah mezi křivkovým integrálem I. a II. druhu

Uvažujme hladkou orientovanou křivku

$$\mathbf{K}: \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

a vektorovou funkci  $\mathbf{a}$  definovanou na  $\mathbf{K}$ . Předpokládejme, že  $\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$  existuje. Pak vztah (4.6) lze přepsat a upravit do podoby

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{a}[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \left( \mathbf{a}[\mathbf{r}(t)] \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \right) |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (5.9)$$

Označíme-li jednotkový tečný vektor  $\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$  jako  $\mathbf{r}'_0(t)$ , je možné s ohledem na (3.4) chápat poslední integrál v (5.9) jako integrál ze skalární funkce  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'_0$  přes křivku  $\mathbf{K}$ , kde  $\mathbf{r}'_0$  je pole jednotkových tečných vektorů na  $\mathbf{K}$ , tj.

$$\int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \pm \int_{\mathbf{K}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'_0 \, ds, \quad (5.10)$$

přičemž znaménko  $+$  platí v případě orientace shodné s danou parametrizací a znaménko  $-$  platí v případě orientace neshodné s danou parametrizací.

Je tedy možné převést křivkový integrál z vektorové funkce na křivkový integrál z vhodné skalární funkce, jehož výpočet může být někdy jednodušší.



**Příklad 5.6.** Vypočítejte křivkový integrál  $\int_K 2 dx - 3 dy + dz$ , kde  $K$  je úsečka určená body  $A[1, 0, 2]$  a  $B[2, 1, 1]$  orientovaná od  $A$  do  $B$ .

*Řešení.* Pomocí vzorce (5.10) převedeme zadaný integrál na křivkový integrál ze skalární funkce. Máme  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Směrový vektor úsečky je  $\vec{AB} = B - A = (1, 1, -1)$ , takže její parametrické rovnice jsou

$$K: \quad \mathbf{r}(t) = (1+t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2-t)\mathbf{k}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Tedy  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$  a  $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$ . Odtud dostaneme  $\mathbf{r}'_0(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$ . Obě funkce  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{r}'_0$  jsou konstantní, takže i skalární funkce  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2 - 3 - 1) = \frac{-2}{\sqrt{3}}$  je konstantní. Protože orientace  $K$  je souhlasná s parametrickým vyjádřením, vyjde s použitím (3.5)

$$\begin{aligned} \int_K 2 dx - 3 dy + dz &= + \int_K \frac{-2}{\sqrt{3}} ds = -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_K ds = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} m_1(K) = -\frac{2}{\sqrt{3}} |\vec{AB}| = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3} = -2. \end{aligned}$$

▲



**Příklad 5.7.** Vypočítejte  $\int_K x dx + y dy$  přes horní půlkružnici se středem v počátku a poloměrem  $c > 0$ , která je orientovaná proti směru hodinových ručiček.

*Řešení.* Opět použijeme převod (5.10). Parametrické rovnice půlkružnice jsou

$$K: \quad \mathbf{r}(t) = c \cos t \mathbf{i} + c \sin t \mathbf{j}, \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

Tedy  $\mathbf{r}'(t) = -c \sin t \mathbf{i} + c \cos t \mathbf{j}$ . Vektorová funkce je  $\mathbf{a} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = c \cos t \mathbf{i} + c \sin t \mathbf{j}$ , takže  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}' = 0$  na  $K$ . Nemusíme tedy určovat ani  $\mathbf{r}'_0$ , protože

$$\int_K x dx + y dy = \int_K 0 ds = 0.$$

▲

### 5.3. Integrální věta Greenova

Integrální větu Greenovu<sup>1</sup> formulujeme takto.

<sup>1</sup>George Green (1793–1841) (čti grín) — anglický matematik a fyzik. Zabýval se matematickou fyzikou, rozvinul teorii elektřiny a magnetismu.

**Věta 5.3.** Necht'  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  je oblast a  $\overline{D} \subset \Omega$  je jednoduše souvislá regulární oblast, jejíž hranicí je po částech regulární kladně orientovaná křivka  $\mathbf{K}$ . Necht' vektorová funkce  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  je definovaná na  $\Omega$  a funkce  $P$ ,  $Q$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  a  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  jsou zde spojité. Pak platí

$$\oint_{\mathbf{K}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\overline{D}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (5.11)$$

Věta dává do souvislosti cirkulaci rovinného vektoru po uzavřené rovinné křivce s dvojným integrálem z jisté funkce přes vnitřek této křivky.

**Příklad 5.8.** Vypočítejte cirkulaci vektoru  $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$  podél kladně orientované kružnice  $\mathbf{K}$  se středem v počátku a poloměrem  $a > 0$ .



*Řešení.* Protože všechny předpoklady předchozí věty jsou splněny, podle (5.11) dostaneme ( $\overline{D}$  je uzavřený kruh):

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{K}} -x^2y dx + xy^2 dy &= \iint_{\overline{D}} (y^2 + x^2) dx dy = \iint_L (u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v) u du dv = \\ &= \iint_L u^3 du dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a u^3 du = \frac{1}{2} \pi a^4, \end{aligned}$$

kde na dvojný integrál jsme použili transformaci do polárních souřadnic  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $J = u$ , (kruh  $\overline{D}$  se transformuje na obdélník  $L = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ ) a poté Fubiniovu větu. ▲

## Pojmy k zapamatování



- potenciál vektorového pole,
- vztah nezávislosti křivkového integrálu II. druhu na integrační cestě a křivkového integrálu přes uzavřenou křivku,
- Greenova integrovaná věta a její aplikace.

## Kontrolní otázky



1. Jaký je vztah mezi kmenovou funkcí z teorie diferenciálu funkce více proměnných a potenciálem potenciálového vektorového pole?
2. Pomocí skalárního součinu tečného vektoru k integrované křivce s vektorem vektorového pole vysvětlete vztah mezi integrálem I. a II. druhu.
3. Je gravitační pole vytvořené bodovým gravitačním zdrojem potenciálové?



## Příklady k procvičení

1. Ukažte, že křivkový integrál z vektorového pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  je nezávislý na integrační cestě, a stanovte jeho hodnotu přes křivku z bodu  $A$  do bodu  $B$ .

a)  $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $A[0, 1]$ ,  $B[3, -4]$ .

b)  $\mathbf{F} = y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $A[-1, 2]$ ,  $B[2, 3]$ .

c)  $\mathbf{F} = (x + y) \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $A[0, 1]$ ,  $B[2, 3]$ .

d)  $\mathbf{F} = \frac{y}{x^2} \mathbf{i} - \frac{1}{x} \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ,  $A[2, 1]$ ,  $B[1, 2]$ .

e)  $\mathbf{F} = (x^4 + 4xy^3) \mathbf{i} + (6x^2y^2 - 5y^4) \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,  $A[-2, -1]$ ,  $B[3, 0]$ .

f)  $\mathbf{F} = \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, 0]\}$ ,  $A[1, 0]$ ,  $B[6, 8]$ .

g)  $\mathbf{F} = \frac{1-y^2}{(1+x)^3} \mathbf{i} + \frac{y}{(1+x)^2} \mathbf{j}$ ,  $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > -1\}$ ,  $A[0, 0]$ ,  $B[1, 1]$ .

h)  $\mathbf{F} = (x^2 + yz) \mathbf{i} + (y^2 + xz) \mathbf{j} + (z^2 + xy) \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ,  $A[1, -2, 3]$ ,  $B[2, 3, 4]$ .

i)  $\mathbf{F} = (x + yz) \mathbf{i} + (y + xz) \mathbf{j} + (z + xy) \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ,  $A[0, 0, 0]$ ,  $B[1, 2, 3]$ .

j)  $\mathbf{F} = \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{[0, 0, 0]\}$ ,  $A[1, 1, 1]$ ,  $B[2, 2, 2]$ .

k)  $\mathbf{F} = \frac{a}{y} \mathbf{i} - \frac{ax+by}{y^2} \mathbf{j} + \frac{b}{z} \mathbf{k}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0\}$ ,  $A[0, 1, 1]$ ,  $B[-1, 1, 3]$ .

2. Ukažte, že vektorové pole  $(\Omega, \mathbf{F})$  je potenciálové, a najděte jeho kmenovou funkci.

a)  $\mathbf{F} = z \mathbf{i} + (y^2 + z) \mathbf{j} + (x + y) \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .

b)  $\mathbf{F} = 3 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .

c)  $\mathbf{F} = (3x^2y^2 - 2z^4) \mathbf{i} + 2x^3y \mathbf{j} - 8xz^3 \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^3$ .

d)  $\mathbf{F} = \left[3x^2 - \frac{y}{(x+z)^2}\right] \mathbf{i} + \frac{1}{x+z} \mathbf{j} - \frac{y}{(x+z)^2} \mathbf{k}$ ,  $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x + z > 0\}$ .

3. Užitím Greenovy věty odvoďte, že pro obsah vnitřku  $D$  jednoduché uzavřené po částech regulární kladně orientované rovinné křivky  $K$  platí vzorec

$$m_2(D) = \frac{1}{2} \oint_K x \, dy - y \, dx.$$

Pomocí něho pak vypočítejte obsah vnitřku elipsy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

# Klíč k příkladům k procvičení



## Kapitola 1. Skalární a vektorové pole

1. **Aa)** Přímky  $2x + \frac{4}{3}y = 4 - C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,
- b)  $U(R) = 0$ ,  $U(S) = 0$ ,  $U(T) = -4$ ,
- c)  $\text{grad } U(R) = -2\mathbf{i} - \frac{4}{3}\mathbf{j} = \text{grad } U(S) = \text{grad } U(T)$ ,
- d)  $U'_a(R) = 2$ ,  $U'_b(S) = \frac{4}{3}$ ,  $U'_c(T) = -\frac{8}{\sqrt{13}}$ .
- Ba)** Kružnice  $x^2 + y^2 = 25 - C^2$ ,  $0 \leq C \leq 5$ ,
- b)  $U(R) = \sqrt{21}$ ,  $U(S) = 4$ ,  $U(T) = \sqrt{12}$ ,
- c)  $\text{grad } U(R) = -\frac{2}{\sqrt{21}}\mathbf{i}$ ,  $\text{grad } U(S) = -\frac{3}{4}\mathbf{j}$ ,  $\text{grad } U(T) = \frac{-2}{\sqrt{12}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{12}}\mathbf{j}$ ,
- d)  $U'_a(R) = \frac{2}{\sqrt{21}}$ ,  $U'_b(S) = \frac{3}{4}$ ,  $U'_c(T) = -\sqrt{\frac{13}{12}}$ .
- Ca)** Kružnice  $x^2 + y^2 = (16 - C)^2$ ,  $0 \leq C \leq 16$ ,
- b)  $U(R) = 14$ ,  $U(S) = 13$ ,  $U(T) = 16 - \sqrt{13}$ ,
- c)  $\text{grad } U(R) = -\mathbf{i}$ ,  $\text{grad } U(S) = -\mathbf{j}$ ,  $\text{grad } U(T) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ ,
- d)  $U'_a(R) = 1$ ,  $U'_b(S) = 1$ ,  $U'_c(T) = -1$ .
- Da)** Elipsy  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = C$ ,  $C \geq 0$ ,
- b)  $U(R) = 1$ ,  $U(S) = 1$ ,  $U(T) = 2$ ,
- c)  $\text{grad } U(R) = \mathbf{i}$ ,  $\text{grad } U(S) = \frac{2}{3}\mathbf{j}$ ,  $\text{grad } U(T) = \mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j}$ ,
- d)  $U'_a(R) = -1$ ,  $U'_b(S) = -\frac{2}{3}$ ,  $U'_c(T) = \frac{4}{\sqrt{13}}$ .
- Ea)** Přímky  $y^2 = 16 - C^2$ ,  $0 \leq C \leq 4$ ,
- b)  $U(R) = 4$ ,  $U(S) = \sqrt{7}$ ,  $U(T) = \sqrt{3}$ ,
- c)  $\text{grad } U(R) = \mathbf{0}$ ,  $\text{grad } U(S) = -\frac{3}{\sqrt{7}}\mathbf{j}$ ,  $\text{grad } U(T) = -\frac{3}{\sqrt{7}}\mathbf{j}$ ,
- d)  $U'_a(R) = 0$ ,  $U'_b(S) = \frac{3}{\sqrt{7}}$ ,  $U'_c(T) = -\frac{9}{\sqrt{91}}$ .
- Fa)** Hyperboly  $x^2 - y^2 = 4 - C$ ,  $C \geq 0$ ,
- b)  $U(R) = 0$ ,  $U(S) = 13$ ,  $U(T) = 9$ ,
- c)  $\text{grad } U(R) = -4\mathbf{i}$ ,  $\text{grad } U(S) = 6\mathbf{j}$ ,  $\text{grad } U(T) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ,
- d)  $U'_a(R) = 4$ ,  $U'_b(S) = -6$ ,  $U'_c(T) = \frac{10}{\sqrt{13}}$ .

2. **Aa)**  $U(R) = 14$ ,  
**Ab)**  $\frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y+2)^2}{14/3} + \frac{z^2}{14} = 1$  (elipsoid),  
**c)**  $\text{grad } U(R) = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ ,  
**d)**  $U'_l(R) \doteq 9,38$ ,  
**e)**  $U'_q(R) \doteq 3,49$ .
- Ba)**  $U(R) = -8$ ,  
**b)**  $\frac{x^2}{8} - \frac{(y+1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{8} = 1$  (jednodílný hyperboloid),  
**c)**  $\text{grad } U(R) = -4(\mathbf{i} + \mathbf{k})$ ,  
**d)**  $U'_l(R) \doteq 5,66$ ,  
**e)**  $U'_q(R) \doteq 0,87$ .
- Ca)**  $U(R) = 52$ ,  
**b)**  $3y^2 + 5z^2 = -4(x - 14)$  (eliptický paraboloid),  
**c)**  $\text{grad } U(R) = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$ ,  
**d)**  $U'_l(R) \doteq 30,85$ ,  
**e)**  $U'_q(R) \doteq -17,46$ .
- Da)**  $U(R) = 9$ ,  
**b)**  $z = 27 + 12xy$  (hyperbolický paraboloid),  
**c)**  $\text{grad } U(R) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$ ,  
**d)**  $U'_l(R) \doteq 8,94$ ,  
**e)**  $U'_q(R) \doteq -6,26$ .
3. **a)**  $-\text{grad } U(A) = -4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ,  $|\text{grad } U(A)| = \sqrt{20}$ ,  
**b)**  $-\text{grad } U(A) = \frac{10}{9}\mathbf{i} + \frac{5}{9}\mathbf{k}$ ,  $|\text{grad } U(A)| = \frac{5}{9}\sqrt{5}$ ,  
**c)**  $-\text{grad } U(A) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ,  $|\text{grad } U(A)| = 2\sqrt{3}$ .
4.  $B[0, 1, 0]$ .
5. **a)**  $\text{div } \mathbf{E} = 3$ ,  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , **b)**  $\text{div } \mathbf{F} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ,  
**c)**  $\text{div } \mathbf{G} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{0}$ , **d)**  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{0}$ ,  
**e)**  $\text{div } \mathbf{K} = 4xy$ ,  $\text{rot } \mathbf{K} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + (y^2 - x^2)\mathbf{k}$ ,  
**f)**  $\text{div } \mathbf{L} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{L} = -2[(y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}]$ ,  
**g)**  $\text{div } \mathbf{M} = 0$ ,  $\text{rot } \mathbf{M} = -2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ ,  
**h)**  $\text{div } \mathbf{N} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ,  $\text{rot } \mathbf{N} = \mathbf{0}$ .
6. **a)**  $xy = c$ ,  $z = kx$ , kde  $c = 1$ ,  $k = 2$ ,  
**b)**  $x^2 + y^2 = c$ ,  $z^2 - 2y = k$ , kde  $c = 1$ ,  $k = 0$ ,  
**c)**  $x^2 - y^2 = c$ ,  $x + y = kz$ , kde  $c = 1$ ,  $k = -1$ ,  
**d)**  $x^2 - y^2 = c$ ,  $xy = kz$ , kde  $c = 3$ ,  $k = -2$ .

## Kapitola 3. Křivkový integrál I. druhu

1. a)  $L = r\pi$ ,  $M_x = 2r^2$ ,  $M_y = 0$ ,  $I_x = \frac{1}{2}\pi r^3$ ,  $I_y = \frac{1}{2}\pi r^3$ ,
- b)  $L = a(e - 1/e)$ ,  $M_x = \frac{a^2}{4}(e^2 + 4a^2 - 1/e^2)$ ,  $M_y = 0$ ,  
 $I_x = \frac{a^3}{12}(e^3 + 9e - 9/e - 1/e^3)$ ,  $I_y = a^3(e - 5/e)$ ,
- c)  $L = 8a$ ,  $M_x = \frac{32}{3}a^2$ ,  $M_y = 8\pi a^2$ ,  
 $I_x = \frac{256}{15}a^3$ ,  $I_y = a^3(16\pi^2 - 2048/45)$ ,
- d)  $L = \frac{3}{2}a$ ,  $M_x = \frac{3}{5}a^2$ ,  $M_y = \frac{3}{5}a^2$ ,  
 $I_x = \frac{3}{8}a^3$ ,  $I_y = \frac{3}{8}a^3$ .
2. a)  $L = 7,933$ ,  $M_x = 10,770$ ,  $M_y = 0$ ,  $I_x = 17,428$ ,  $I_y = 32,181$ ,  
b)  $L = 5,916$ ,  $M_x = 4,851$ ,  $M_y = 0$ ,  $I_x = 6,241$ ,  $I_y = 9,701$ ,  
c)  $L = 2,958$ ,  $M_x = 3,393$ ,  $M_y = 5,383$ ,  $I_x = 4,851$ ,  $I_y = 10,929$ ,  
d)  $L = 3,820$ ,  $M_x = 2,296$ ,  $M_y = 6,001$ ,  $I_x = 1,748$ ,  $I_y = 12,889$ ,  
e)  $L = 2,302$ ,  $M_x = 1,436$ ,  $M_y = 4,505$ ,  $I_x = 1,123$ ,  $I_y = 9,598$ .
3. a)  $L = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $M_{xy} = 2\pi^2 b\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $M_{xz} = 0$ ,  $M_{yz} = 0$ ,  
 $I_x = \frac{\pi}{3}(3a^2 + 8b^2\pi^2)\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $I_y = I_x$ ,  $I_z = 2a^2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  
b)  $L = \pi r$ ,  $M_{xy} = 2r^2$ ,  $M_{xz} = \pi r$ ,  $M_{yz} = 0$ ,  
 $I_x = \pi r(1 + \frac{r^2}{2})$ ,  $I_y = \pi r^3$ ,  $I_z = \frac{1}{2}\pi r^3 + \pi r$ ,  
c)  $L = 4(1 + \sqrt{6})$ ,  $M_{xy} = 8(2 + \sqrt{6})$ ,  $M_{xz} = 0$ ,  $M_{yz} = 4\sqrt{6}$ ,  
 $I_x = \frac{16}{3}(5\sqrt{6} + 13)$ ,  $I_y = \frac{16}{3}(5\sqrt{6} + 12)$ ,  $I_z = \frac{16}{3}(2\sqrt{6} + 1)$ .
4. a)  $L = 15,281$ ,  $M_{xy} = 15,281$ ,  $M_{xz} = 0$ ,  $M_{yz} = 0$ ,  
 $I_x = 52,835$ ,  $I_y = 52,835$ ,  $I_z = 61,123$ ,  
b)  $L = 15,281$ ,  $M_{xy} = 30,562$ ,  $M_{xz} = 0$ ,  $M_{yz} = 0$ ,  
 $I_x = 122,246$ ,  $I_y = 117,060$ ,  $I_z = 61,123$ ,  
c)  $L = 7,640$ ,  $M_{xy} = 9,182$ ,  $M_{xz} = 0$ ,  $M_{yz} = 8,289$ ,  
 $I_x = 17,818$ ,  $I_y = 26,728$ ,  $I_z = 16,577$ .
5. 5a)  $3\pi r^2$ , 5b)  $2\pi r^2$ , 5c)  $2r^2$ , 5d)  $2r^2$ , 5e)  $2\sqrt{5}$ .



**Kapitola 4. Křivkový integrál II. druhu**

1. **Aa)** 0    **Ab)** 8    **Ac)** 0    **Ad)** 0  
**Ba)** 0    **Bb)** 8    **Bc)** 0    **Bd)** 0  
**Ca)** 0    **Cb)** 8    **Cc)** 0    **Cd)** 8  
**Da)** 3    **Db)** 3    **Dc)** 6    **Dd)** 6  
**Ea)** 0    **Eb)** 8    **Ec)** 0    **Ed)**  $4(e + 1/e)$   
**Fa)** 0    **Fb)**  $8\pi$     **Fc)**  $8\pi^2$     **Fd)** 0  
**Ga)** 6    **Gb)**  $-4$     **Gc)** 0    **Gd)** 0  
**Ha)** 0    **Hb)**  $2\pi$     **Hc)**  $\frac{1}{2}\pi^2$     **Hd)** 0

2. **a)**  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2$ ,    **b)**  $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2$ .

3. **a)**  $-\frac{1}{2} \ln 2$ ,    **b)**  $\frac{1}{2} \ln 2$ .

4. 0.

5. **a)**  $-2\pi$ ,    **b)** 0.

**Kapitola 5. Nezávislost na integrační cestě a vztah mezi integrály**

1. **a)** 12,    **b)** 8,    **c)** 4,    **d)**  $-1,5$ ,    **e)** 62,  
**f)**  $\ln 10$ ,    **g)**  $1/2$ ,    **h)**  $169/3$ ,    **i)** 13,    **j)**  $\sqrt{3}$ ,  
**k)**  $-a + b \ln 3$ .

2. **a)**  $U = xz + y^3/3 + yz + C$ ,    **b)**  $U = 3x - 4y + z + C$ ,

**c)**  $U = x^3y^2 - 2xz^4 + C$ ,    **d)**  $U = \frac{y}{x+z} + x^3 + C$ .

3.  $\pi ab$ .

# Literatura

- [1] Budak, B. M. — Fomin, S. V. : *Multiple Integrals, Field Theory and Series*. Mir, Moskva 1973.
- [2] Fichtengoľc, G. M. : *Kurs diferencialnogo i integralnogo isčislenija, díl III*. Páté vyd., Nauka, Moskva 1969.
- [3] Ivan, J. : *Matematika 2*. ALFA, Bratislava 1989.
- [4] Nagy, J. — Nováková, E. — Vacek, M. : *Vektorová analýza*. Matematika pro vysoké školy technické, sešit VIII. SNTL, Praha 1984.
- [5] Novotný, M. : *Integrální počet*. Skriptum PřF UJEP Brno. SPN, Praha 1969.
- [6] Postnikov, M. M. : *Lekcii po geometrii. Semestr III. Gladkije mnogoobrazija*. Nauka, Moskva 1977.
- [7] Rektorys, K. a kol. : *Přehled užité matematiky*. Druhé opravené vyd., SNTL, Praha 1968.
- [8] Sikorski, R. : *Diferenciální a integrální počet. Funkce více proměnných*. Academia, Praha 1973.
- [9] Stěpanov, V. V. : *Kurs diferencíálních rovnic*. Druhé. vyd., Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950.
- [10] Vondra, A. : *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. Skriptum VA Brno. VA, Brno 1994.
- [11] Ženíšek A. : *Green's theorem from the viewpoint of applications*. Appl. Math. vol. 44, 1 (1999), str. 55–80.
- [12] Ženíšek A. : *Surface integral and Gauss-Ostrogradskij theorem from the viewpoint of applications*. Appl. Math. vol. 44, 3 (1999), str. 169–241.

# Rejstřík

## A

- aditivita, 41
  - vzhledem k integračnímu oboru, 31, 47
  - vzhledem k integrandu, 31, 46
- asteroida, 23

## B

- bod křivky
  - regulární, 22
  - singulární, 22
- bod trajektorie
  - nepodstatně singulární, 22
  - podstatně singulární, 22

## C

- cirkulace, 46
- cykloida
  - obyčejná, 17
  - prodloužená, 16
  - zkrácená, 17

## D

- délka
  - elementu křivky, 25, 30
  - křivky, 24, 33
- derivace
  - funkce  $U$  v daném směru, 4
  - vektorové funkce, 22
- diferenciál
  - vektoru, 22
- divergence vektorového pole, 11

## E

- element
  - křivky, 24, 30
  - orientovaný, 45

## F

- funkce
  - bod
    - skalární, 2
    - vektorová, 2
  - kmenová, 54

## G

- gradient
  - funkce  $U$ , 4
  - v bodě, 5
  - skalárního pole, 9
- gravitační potenciál, 1

## H

- Hamiltonův operátor, 13
- hladina, 3
- hmotnost
  - křivky, 34
- hodograf, 17
- homogenita, 31, 46

## I

- integrální součet, 30, 45
- intenzita gravitačního pole, 1

## K

- křivka, 18
  - ekvipotenciální, 3
  - hladká, 22
  - jednoduchá, 20
  - Jordanova, 20
  - konečné délky, 24
  - orientovaná, 26
  - nesouhlasně s parametrickým vyjádřením, 26

souhlasně s parametrickým vyjádřením, 26  
 po částech hladká, 22  
 po částech regulární, 22  
 regulární, 22  
 rektifikovatelná, 24  
 rovinná, 19  
 uzavřená, 20  
   jednoduchá, 20  
 vektorová, 9  
 křivkový integrál  
   I. druhu, 30  
   II. druhu, 45  
 z vektorové funkce, 45  
 ze skalární funkce, 30  
 křivky  
   ekvivalentní, 19  
   souhlasně orientované, 27

**M**

množina  
   souvislá, 54  
 moment setrvačnosti  
   křivky, 37

**N**

nezávislost integrálu na integrační cestě, 53  
 nora, 12  
 nositelka křivky, 18

**O**

oblast, 54  
   jednoduše souvislá, 54  
 oblouk, 20  
   jednoduchý, 20  
 Jordanův, 20  
 uzavřený, 20

**obsah**

  válcové stěny, 40  
 operátor  $\nabla$ , 13  
 orientace  
   křivky, 26

**P**

parametr  
   křivky, 18  
 parametrizace  
   trajektorie  
   připustná, 18  
   přirozená, 25  
 plocha  
   ekvipotenciální, 3  
   izobarická, 3  
   izotermická, 3  
 pole  
   atmosférického tlaku, 1  
   elektrostatické intenzity, 1  
   elektrostatického potenciálu, 1  
   hustot, 1  
   konzervativní, 54  
   na přímce  
   skalární, 3  
   vektorové, 3  
   nestacionární, 2  
   nezřídlové, 12  
   potenciálové, 54  
   rovinné  
   skalární, 3  
   vektorové, 3  
   rychlostí proudící kapaliny, 2  
   skalární, 2  
   solenoidální, 12  
   stacionární, 2  
   statické, 2  
   teplot, 1  
   vektorové, 2  
 potenciál pole, 54  
 práce, 48  
 proudnice, 9  
 přírůstek funkce  $U$ , 4

**R**

rotace vektorového pole, 11  
 rovnice křivky  
   parametrická, 19  
   vektorová, 18

rozklad  
intervalu, 18

## Ř

řetězovka, 33

## S

siločára, 10

souřadnicová funkce, 19

spojení částí křivky, 21

statický moment

křivky, 35

symetrický normální tvar soustavy diferenciálních rovnic, 10

## Š

šroubovice obyčejná, 48

## T

tečna

křivky, 22

tečný vektor

křivky, 21

těžiště

křivky, 35

trajektorie, 16

trajektorie křivky, 18

transformace parametru, 19

## U

úplný eliptický integrál, 39

## V

vektorová funkce

jednojednoznačná, 18

prostá, 18

výběr reprezentantů, 30, 45

vydatnost

nory, 12

zřídla, 12

## Z

zřídlo, 12