Globální analýza. Cvičení ke kapitolam 5–7

1. Dokažte, že difeomorfní hladké variety mají stejné dimenze (návod: ukažte, že tečné zobrazení v libovolném bodě je isomorfismem)

2. Určete tečný prostor k elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ v bodě $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. Určete relace mezi bázovými tečnými vektory odpovídajícím různým lokálním mapám v tomto budě.

3. Ukažte, že $T_{(x,y)}M \times N = T_xM \oplus T_yN$, kde M a N jsou variety a $x \in M$, $y \in N$.

4. Určete Lieovy závorky následujících vektorových polí:

a. $X = \sin u \frac{\partial}{\partial v} + \cos v \frac{\partial}{\partial u}$, $Y = u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}$;

b. $X = z^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = xyz \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$.

5. Necht' M je varieta dimenze 1 a X, Y jsou vektorová pole na M, při tom $X_x \neq 0$ pro všechna $x \in M$ a platí, že $[X, Y] = 0$. Ukažte, že $Y = cX$ pro nějakou konstantu $c \in \mathbb{R}$.

6. Určete vektorová pole X mající následující toky:

a. $Fl_t^X(x, y) = (5t + x, 4t + y)$;

b. $Fl_\varphi^X(x, y) = (x \cos \varphi - y \sin \varphi, x \sin \varphi + y \cos \varphi)$.

7. Určete integrální křivky následujících vektorových polí:

a. $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$;

b. $X = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$;

c. $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$.

8. Určete, které z následujících distribucí na $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ jsou involutivní:

- distribuce generovaná vektorovými poli
  $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$;
- distribuce generovaná vektorovými poli
  $X = xyz \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = x \frac{\partial}{\partial x} + (z + y) \frac{\partial}{\partial z}$.

9. Ukažte, že každá distribuce dimenze 1 je involutivní.