Návod na 1. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Věta o vlastnostech homogenního markovského řetězce: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0) a maticí přechodu **P**. Pak pro $\forall m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ platí:

a) **P**(n,n+m) = **P**(m) = $\mathbf{P}^m$.

b) **p**(n,n+m) = **p**(m) = **p**(0)$\mathbf{P}^m$.

Příklad 1.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2. Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtěte vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

Řešení: Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1,2}, kde stav 0 znamená úrodný rok, stav 1 průměrný rok a stav 2 neúrodný rok. Náhodná veličina X_n nabývá hodnoty j, když n-tý rok odpovídá stavu j. Sestavíme matici přechodu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Vektor počátečních pravděpodobností je **p**(0) = (1, 0, 0). Hledáme vektor **p**(2) = **p**(0)$\mathbf{P}^2$ = (0,28, 0,48, 0,24).

Návod na řešení v MATLABu:

```
P=[0.4 0.4 0.2;0.2 0.6 0.2;0.2 0.4 0.4];
p0=[1 0 0];
p2= p0*P^2
```

Příklad 2.: V příkladu 1 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je 0,25, průměrný 0,5 a neúrodný 0,25. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?

Řešení: Vektor počátečních pravděpodobností nyní bude **p**(0) = $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. Vypočteme vektor absolutních pravděpodobností **p**(1) = **p**(0)**P** = $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Návod na řešení v MATLABu:

```
P=[0.4 0.4 0.2;0.2 0.6 0.2;0.2 0.4 0.4];
p0=[1/4 1/2 1/4];
p1= p0*P
```

Příklad 3. – k samostatnému řešení: Půjčovna aut, která vlastní 1000 automobilů, působí ve třech pobočkách A, B, C. Zákazník si může vybrat auto v některé z poboček a vrátit ho v kterékoliv jiné pobočce. Dlouhodobým sledováním v týdenním intervalu byly zjištěny tyto skutečnosti: Pravděpodobnost vrácení auta do stejné pobočky, z níž bylo vypůjčeno, je pro pobočky A, B, C postupně 0,6; 0,6; 0,5. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v A bude vráceno v B, je 0,3 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v A, je 0,2. Pravděpodobnost, že auto vypůjčené v B bude vráceno v C, je 0,2 a naopak, pravděpodobnost, že auto vypůjčené v C bude vráceno v B, je 0,4. Zjednodušeně předpokládáme, že žádné auto není ukradeno ani nehavaruje.

a) Modelujte provoz půjčovny aut pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Předpokládejme, že na počátku sledování je 500 aut v pobočce A, 300 v B a 200 v C. Určete, kolik aut bude v jednotlivých pobočkách po uplynutí 1 týdne.

Výsledek: Po týdnu sledování bude v pobočce A 380 aut, v pobočce B 410 aut a v pobočce C 210 aut.

Příklad 4. – k samostatnému řešení: Uvažme podnik, v němž jsou tři oddělené provozy – provoz 1, provoz 2 a provoz 3. V těchto provozech pracují dělníci vykonávající jednostranné úkony. Aby nedocházelo k otupění zaměstnanců, tak se dělníci na konci měsíce v jednotlivých provozech náhodně střídají. Existuje samozřejmě i jistá šance, že si dělník najde jiné zaměstnání a podnik opustí. Předpokládáme, že v takovém případě už se do podniku nevrátí. Dlouhodobým pozorováním pohybu zaměstnanců v tomto podniku byly zjištěny následující skutečnosti:
Dělníci z provozu 1 na konci měsíce s pravděpodobností 1/4 zůstávají v provozu 1, s pravděpodobností 1/4 přecházejí do provozu 2 a s pravděpodobností 1/2 přecházejí do provozu 3.
Dělníci v provozu 2 na konci měsíce s pravděpodobností 1/4 zůstávají v provozu 2, s pravděpodobností 1/4 přecházejí do provozu 1 a s pravděpodobností 1/2 přecházejí do provozu 3.
Jelikož práce v provozu 3 je velmi namáhavá, tak po měsíci dělníci z tohoto provozu odcházejí se stejnou pravděpodobností buď do provozu 1 nebo do provozu 2.
Dále bylo zjištěno, že zaměstnanci z tohoto podniku odcházejí pouze z provozu 3, a to s pravděpodobností 1/9.

a) Modelujte tuto situaci pomocí HMŘ, najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Vypočtěte pravděpodobnost, že zaměstnanec, který na počátku sledování pracoval v provozu 1, ve čtvrtém měsíci sledování již v podniku pracovat nebude.

Výsledek: Pravděpodobnost, že ve 4. měsíci už zaměstnanec nebude v podniku pracovat, je $\frac{1}{12} = 0{,}08\overline{3}$.

Definice stacionárního vektoru stochastické matice: Nechť **a** je stochastický vektor a **P** stochastická matice odpovídající dimenze. Jestliže platí **a** = **aP**, pak vektor **a** se nazývá stacionární vektor matice **P**.

Definice stacionárního rozložení HMŘ: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Stochastický vektor **a**, který je stacionárním vektorem matice **P**, se nazývá stacionární rozložení daného řetězce.

Definice limitního rozložení HMŘ: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s vektorem počátečních pravděpodobností **p**(0). Jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}(n) = \bar{\mathbf{p}}$, pak vektor $\bar{\mathbf{p}}$ se nazývá limitní rozložení daného řetězce. Jestliže vektor $\bar{\mathbf{p}}$ nezávisí na vektoru počátečních pravděpodobností **p**(0), pak řekneme, že daný řetězec je ergodický (regulární).

Věta o vztahu mezi stacionárním a limitním rozložením HMŘ: Jestliže $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je ergodický homogenní markovský řetězec a existuje jeho stacionární rozložení **a**, pak limitní rozložení $\bar{\mathbf{p}}$ je rovno stacionárnímu rozložení **a**.

Markovova věta: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s maticí přechodu **P**. Jestliže existuje takové číslo $n \in \mathbb{N}$, že matice $\mathbf{P}^n$ má všechny prvky kladné, pak
a) existuje stacionární rozložení daného řetězce a je jediné,
b) řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je ergodický,
c) posloupnost matic $\mathbf{P}^n$ konverguje k limitní matici **A**, jejíž řádky jsou stejné a jsou rovny stacionárnímu vektoru **a**.

Návod na hledání stacionárního vektoru stochastické matice pomocí MATLABu
```
function [a]=sv(P)
%funkce pro vypocet stacionarniho vektoru
%syntaxe: a=sv(P)
%vstupni parametr ... stochasticka matice P
%vystupni parametr ... stacionarni vektor a
%zjistime rad matice P:
n=size(P,1);
%vytvorime pomocnou jednotkovou matici:
I=eye(n);
%sestavime matici soustavy:
A=[[I-P]';ones(1,n)];
%vytvorime vektor pravých stran:
f=[zeros(n,1);1];
%vypocteme stacionární vektor
a=(A\f)';
```

Příklad 5.: Předpokládejme, že v nějaké oblasti může být počasí pouze ve třech stavech, a to déšť, jasno, sníh. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že nikdy nebývají dva jasné dny za sebou. Jestliže je v jistém dni jasno, pak další den bude buď déšť nebo sníh, a to se stejnou pravděpodobností. Jestliže je v jistém dni sníh nebo déšť, pak následující den se počasí buď nezmění, a to s pravděpodobností 0,5 nebo se změní, a pak v polovině případů bude jasno. Popište stav počasí homogenním markovským řetězcem a vypočtěte jeho stacionární rozložení.

Řešení: Homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in$ $\}$ má množinu stavů $J = \{1, 2, 3\}$, kde stav 1 znamená déšť, stav 2 jasno a stav 3 sníh. Matice přechodu **P** má tvar:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Návod na řešení v MATLABu:
```
P=[0.5 0.25 0.25;0.5 0 0.5;0.25 0.25 0.5];
a=sv(P)
```

Výsledek: a = (0,4 0,2 0,4)
Znamená to, že po 40 % dnů prší, po 20 % dnů je jasno a po 40 % dnů sněží.

Příklad 6. – k samostatnému řešení: Obchodník prodává tři druhy pracích prášků, které označíme A, B, C. Aby zjistil, jak se vyvíjí poptávka po těchto prášcích, provedl v 1. měsíci prodeje průzkum, v němž se zjišťovalo, který druh prášku zákazníci kupují. Při tomto průzkumu bylo zjištěno, že prášek A kupuje 50% zákazníků, prášek B 20% a prášek C 30% zákazníků. Za měsíc byl proveden další průzkum, který zjišťoval, ke kterému druhu prášků zákazníci přešli. Výsledky průzkumu zachycuje matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

a) Určete absolutní pravděpodobnosti po dvou měsících a interpretujte je. (Po dvou měsících bude prášek A nakupovat 80,6% zákazníků, prášek B 12,8% a C 6,6% zákazníků.
b) Najděte vektor limitních pravděpodobností a limitní matici přechodu.

$$(\bar{p} = (0{,}828\,1 \;\; 0{,}125 \;\; 0{,}046),\; A = \begin{pmatrix} 0{,}828\,1 & 0{,}125 & 0{,}046 \\ 0{,}828\,1 & 0{,}125 & 0{,}046 \\ 0{,}828\,1 & 0{,}125 & 0{,}046 \end{pmatrix})$$