

Návod na 2. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Odhady absolutních pravděpodobností a pravděpodobností přechodu v HMR

Zadání: Dva přátelé, Karel a Jiří, se každý týden pravidelně scházejí na kondičním tenisovém utkání. Karel si poslední dva roky zaznamenává svou úspěšnost. Ze 106 utkání vyhrál 65, přičemž ve 43 případech výhře předcházela výhra a v 16 případech prohře předcházela prohra.

- Modelujte popsanou situaci pomocí homogenního markovského řetězce.
- Najděte bodové odhady počátečních pravděpodobností a 95% intervaly spolehlivosti pro počáteční pravděpodobnosti
- Najděte bodové odhady pravděpodobností přechodu a 95% intervaly spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu.

Upozornění: Před výpočtem intervalů spolehlivosti nezapomeňte ověřit splnění podmínek dobré aproximace.

Vzorce:

Údaje obsažené v textu úlohy se uspořádají do tabulky tvaru:

	1	2	Σ
1	c_{11}	c_{12}	$c_1 = d_1$
2	c_{21}	c_{22}	$c_2 = d_2$
			d

Bodový odhad počáteční pravděpodobnosti $p_i(0)$:

$$\hat{p}_i(0) = \frac{d_i}{d}, i = 1, 2, \dots, k$$

Podmínky dobré aproximace: $\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]d \geq 5$.

Meze 100(1- α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro $p_i(0)$:

$$\hat{p}_i(0) \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_i(0)[1 - \hat{p}_i(0)]}{d}} u_{1-\alpha/2}$$

Bodový odhad pravděpodobnosti přechodu p_{ij} :

$$\hat{p}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i}, i, j = 1, \dots, k$$

Podmínky dobré aproximace $\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})c_i \geq 5$.

Meze 100(1- α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro p_{ij} :

$$\hat{p}_{ij} \pm \sqrt{\frac{\hat{p}_{ij}(1 - \hat{p}_{ij})}{c_i}} u_{1-\alpha/2}$$

Výsledky:

Ad a) Zavedeme HMR $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ s množinou stavů $J = \{1, 2\}$, přičemž $X_n = 1$, když v n -tém týdnu Karel vyhrál nad Jiřím a $X_n = 2$, když v n -tém týdnu Karel s Jiřím prohrál.

Ad b) Odhad vektoru počátečních pravděpodobností: $\hat{p}(0) = (0,61; 0,39)$.

Meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$:

$p_1(0) \in (0,52;0,706)$, $p_2(0) \in (0,294;0,48)$ vždy s pravděpodobností 95 %.

Ad c) Odhadnutá matice přechodu: $\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0,66 & 0,34 \\ 0,61 & 0,39 \end{pmatrix}$.

Meze 95% asymptotických intervalů spolehlivosti pro pravděpodobnosti přechodu:

$p_{11} \in (0,5465;0,7766)$, $p_{12} \in (0,2234;0,4535)$, $p_{21} \in (0,46;0,759)$, $p_{22} \in (0,241;0,54)$ vždy s pravděpodobností 95 %.