# Návod na 4. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

**Definice markovského řetězce s oceněním přechodů**
Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J, v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění $r_{ij}$ (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j\in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n; n \in N_0\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

**Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů**
Nechť $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu **P** a matici ocenění **R**. Označme
$v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i,
$q_i = \sum_{j\in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i.
Pak pro $\forall i \in J$ a n = 1, 2, 3, ... platí rekurentní vztah:
$v_i(n) = q_i + \sum_{j\in J} p_{ij} v_i(n-1)$, přičemž $v_i(0) = 0$.
V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, n = 1, 2, …

**Aproximační vzorec pro výpočet středních hodnot celkových výnosů**
$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$, kde **A** je limitní matice přechodu.

**Příklad 1.:** Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

**Řešení:**
Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v okamžiku n je řidič ve městě A (resp. B). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 100 & 1000 \\ 1000 & 100 \end{pmatrix}$.
$q_0 = 0{,}7.100 + 0{,}3.1000 = 370$, $q_1 = 0{,}5.1000 + 0{,}5.100 = 550$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794 \\ 1010 \end{pmatrix}$$

Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

**Návod na řešení v MATLABu:**
Zadáme matice **P**, **R** a vektor **v**0:
P=[0.7 0.3;0.5 0.5]; R=[100 1000;1000 100];v0=[0 0]‘;
Vypočteme vektor q = diag(P*R’);
Vypočteme vektor v1=q+P*v0
Vypočteme vektor v2=q+P*v1

**Upozornění:** Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce vynos.m, která počítá:
- vektory středních hodnot celkových výnosů po jednom období až po n obdobích,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

**Příklad 2.:** Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.
a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.
b) Pomocí rekurentního vzorce **v**(n) = **q + P v**(n-1) vypočtěte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, n = 1, 2, ..., 6.
c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů **v**(n). Pro n = 1, 2, ..., 6 porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

**Řešení:**
ad a) Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in N_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n-tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}.$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:
$q_0 = 0,8.10 + 0,2.5 = 9$, $q_1 = 0,3.10 + 0,7.(-20) = -11$
$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{v}(4) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18,5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20,5 \\ -18,25 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21,75 \\ -17,625 \end{pmatrix}$$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:

Nejprve najdeme stacionární vektor **a** matice **P** (viz Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně) a sestavíme limitní matici **A** = $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Po dosazení do aproximačního vzorce získáme výsledky:

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.

**Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů**
Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase n+1 oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β (0<β<1) je tzv. diskontní faktor. (Může např. vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.) Uvedený řetězec se pak nazývá markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů.

**Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů**
Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:
$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta\mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, n = 1, 2, …, přičemž $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$.

**Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů**
$\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta\mathbf{P})^{-1}\mathbf{q}$

**Příklad 3.:** Výrobce nealkoholických nápojů hodlá nabídnout síti potravinových obchodů nápoj D s novou příchutí. Je si vědom konkurence tří současných oblíbených typů nealkoholických nápojů A, B, C, ale věří, že zákazníci ocení příznivé složení a dobrou chuť nápoje D a budou jej preferovat, jakmile ho ochutnají. Na základě zkušeností s obdobnými produkty byla sestavena matice přechodu (časovým krokem je 1 týden):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}10 & 0{,}15 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}30 \\ 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}05 & 0{,}85 \end{pmatrix}.$$

Výnos nebo ztráta, které plynou z jednotlivých přechodů, jsou uvedeny v matici výnosů:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Diskontní faktor je 0,5. Pro prvních 10 týdnů vypočtěte vektor středních hodnot celkových výnosů. Zjistěte také limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů.

**Návod na řešení v MATLABu:**
Zadáme matice **P**, **R**, vektor **v**0 a diskontní faktor beta:
P=[0.65 0.1 0.15 0.1;0.1 0.75 0.05 0.1;0.05 0.05 0.6 0.3;0.05 0.05 0.05 0.85];
R=[-2 -1 -1 5;-1 -2 -1 5;-1 -1 -2 3;-3 -3 -3 4];
v0=[0 0 0 0]‘; beta=0.5;
Vypočteme vektor q = diag(P*R’);
vektor v1=q+beta*P*v0
vektor v2=q+beta*P*v1
atd. až
vektor v10=q+beta*P*v9

**Výsledek:**

| | **v**(0) | **v**(1) | **v**(2) | **v**(3) | **v**(4) | … | **v**(9) | **v**(10) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | -1,050 | -1,331 | -1,360 | -1,331 | … | -1,255 | -1,253 |
| B | 0 | -1,150 | -1,496 | -1,574 | -1,574 | … | -1,525 | -1,523 |
| C | 0 | -0,400 | -0,133 | 0,110 | 0,255 | … | 0,402 | 0,405 |
| D | 0 | 2,950 | 4,139 | 4,635 | 4,849 | … | 5,023 | 5,025 |

Výpočet limitního vektoru **v**(n):
Zadáme jednotkovou matici I = eye(4);
limitni_v=(I-beta*P)^(-1)*q

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}(n) = (-1{,}2506,\ -1{,}5216,\ 0{,}4069,\ 5{,}0276)$$

**Upozornění:** Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce diskont.m, která počítá:
- vektory středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom období až po n obdobích,
- limitní vektor středních hodnot diskontovaných výnosů,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Dobrovolný samostatný úkol: Upravte funkci vynos.m tak, aby poskytovala ještě zisk řetězce,
tj $\lim_{n\to\infty}\left(v_i(n+1) - v_i(n)\right) = \sum_{j=0}^{m} a_j q_j = g$.