

Návod na 4. cvičení v počítačové učebně, Markovské řetězce, PS 2011

Definice markovského řetězce s oceněním přechodů

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J , v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů

Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu \mathbf{P} a matici ocenění \mathbf{R} . Označme $v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i ,

$q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i .

Pak pro $\forall n \geq 1$ a $n = 1, 2, 3, \dots$ platí rekurentní vztah:

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1), \text{ přičemž } v_i(0) = 0.$$

V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, $n = 1, 2, \dots$

Aproximační vzorec pro výpočet středních hodnot celkových výnosů

$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$, kde \mathbf{A} je limitní matice přechodu.

Příklad 1.: Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

Řešení:

Zavedeme HMŘ $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ s množinou stavů $J = \{0,1\}$, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v okamžiku n je řidič ve městě A (resp. B). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 100 & 1000 \\ 1000 & 100 \end{pmatrix}$.

$$q_0 = 0,7 \cdot 100 + 0,3 \cdot 1000 = 370, \quad q_1 = 0,5 \cdot 1000 + 0,5 \cdot 100 = 550$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794 \\ 1010 \end{pmatrix}$$

Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice \mathbf{P} , \mathbf{R} a vektor \mathbf{v}_0 :

$\mathbf{P}=[0.7 \ 0.3; 0.5 \ 0.5]$; $\mathbf{R}=[100 \ 1000; 1000 \ 100]$; $\mathbf{v}_0=[0 \ 0]^T$;

Vypočteme vektor $\mathbf{q} = \text{diag}(\mathbf{P}^* \mathbf{R}')$;

Vypočteme vektor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{P}^* \mathbf{v}_0$

Vypočteme vektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{q} + \mathbf{P}^* \mathbf{v}_1$

Upozornění: Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce vynos.m, která počítá:

- vektory středních hodnot celkových výnosů po jednom období až po n obdobích,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Příklad 2.: Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.

a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.

b) Pomocí rekurentního vzorce $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1)$ vypočtěte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, $n = 1, 2, \dots, 6$.

c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů $\mathbf{v}(n)$. Pro $n = 1, 2, \dots, 6$ porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

Řešení:

ad a) Zavedeme HMR $\mathbf{X}_n, n \in \mathbb{N}$ s množinou stavů $J = \{0, 1\}$, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n -tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:

$$q_0 = 0,8 \cdot 10 + 0,2 \cdot 5 = 9, \quad q_1 = 0,3 \cdot 10 + 0,7 \cdot (-20) = -11$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(3) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}(4) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(5) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(6) = \mathbf{q} + \mathbf{P} \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 20 \\ -18 \end{pmatrix}$$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:

Nejprve najdeme stacionární vektor \mathbf{a} matice \mathbf{P} (viz Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně) a sestavíme limitní matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$. Po dosazení do aproximačního vzorce

získáme výsledky:

$$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.

Definice markovského řetězce s diskontovaným oceněním přechodů

Nechť v homogenním markovském řetězci s oceněním přechodů je přechod ze stavu i v čase n do stavu j v čase $n+1$ oceněn číslem $\beta^n r_{ij}$, kde číslo β ($0 < \beta < 1$) je tzv. diskontní faktor. (Může např. vyjadřovat pravděpodobnost, že proces bude dále pokračovat.) Uvedený řetězec se pak nazývá markovský řetězec s diskontovaným oceněním přechodů.

Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů

Pro vektor středních hodnot diskontovaných celkových výnosů platí rekurentní vztah:

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \beta \mathbf{P} \mathbf{v}(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \text{přičemž } \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Limitní hodnota vektoru středních hodnot celkových výnosů

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{v}(n) = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{P})^{-1} \mathbf{q}$$

Příklad 3.: Výrobce nealkoholických nápojů hodlá nabídnout síti potravinových obchodů nápoj D s novou příchutí. Je si vědom konkurence tří současných oblíbených typů nealkoholických nápojů A, B, C, ale věří, že zákazníci ocení příznivé složení a dobrou chuť nápoje D a budou jej preferovat, jakmile ho ochutnají. Na základě zkušeností s obdobnými produkty byla sestavena matice přechodu (časovým krokem je 1 týden):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,10 & 0,15 & 0,10 \\ 0,10 & 0,75 & 0,05 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,60 & 0,30 \\ 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,85 \end{pmatrix}$$

Výnos nebo ztráta, které plynou z jednotlivých přechodů, jsou uvedeny v matici výnosů:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Diskontní faktor je 0,5. Pro prvních 10 týdnů vypočítejte vektor středních hodnot celkových výnosů. Zjistěte také limitní hodnotu vektoru středních hodnot celkových výnosů.

Návod na řešení v MATLABu:

Zadáme matice **P**, **R**, vektor **v0** a diskontní faktor **beta**:

$P = [0.65 \ 0.1 \ 0.15 \ 0.1; 0.1 \ 0.75 \ 0.05 \ 0.1; 0.05 \ 0.05 \ 0.6 \ 0.3; 0.05 \ 0.05 \ 0.05 \ 0.85];$

$R = [-2 \ -1 \ -1 \ 5; -1 \ -2 \ -1 \ 5; -1 \ -1 \ -2 \ 3; -3 \ -3 \ -3 \ 4];$

$v_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'$; $\beta = 0.5$;

Vypočteme vektor $q = \text{diag}(P \cdot R')$;

vektor $v_1 = q + \beta \cdot P \cdot v_0$

vektor $v_2 = q + \beta \cdot P \cdot v_1$

atd. až

vektor $v_{10} = q + \beta \cdot P \cdot v_9$

Výsledek:

	v(0)	v(1)	v(2)	v(3)	v(4)	...	v(9)	v(10)
A	0	-1,050	-1,331	-1,360	-1,331	...	-1,255	-1,253
B	0	-1,150	-1,496	-1,574	-1,574	...	-1,525	-1,523
C	0	-0,400	-0,133	0,110	0,255	...	0,402	0,405
D	0	2,950	4,139	4,635	4,849	...	5,023	5,025

Výpočet limitního vektoru $v(n)$:

Zadáme jednotkovou matici $I = \text{eye}(4)$;

$\text{limitni_v} = (I - \beta \cdot P)^{-1} \cdot q$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = (-1,2506, -1,5216, 0,4069, 5,0276)$$

Upozornění: Ve Studijních materiálech v ISu je uložena funkce `diskont.m`, která počítá:

- vektory středních hodnot diskontovaných výnosů po jednom období až po n období,
- limitní vektor středních hodnot diskontovaných výnosů,
- znázorní průběhy vektorů středních hodnot pro jednotlivé stavy v závislosti na počtu období.

Dobrovolný samostatný úkol: Upravte funkci `vynos.m` tak, aby poskytovala ještě zisk řetězce,

$$t_j \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{p_{+}}{r} - \frac{p_{-}}{r} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \dots = \cdot$$