Zadání příkladů na 2. cvičení

Příklad 1.: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny $J = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Dokažte, že stochastický proces $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je markovský řetězec.

Příklad 2.: Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1\}$.

Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n,n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Jaká je pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1), jestliže jeho počáteční stav zvolíme

a) podle výsledku hodu mincí

b) podle výsledku náhodného pokusu, v němž je stavu 0 dosaženo s pravděpodobností 1/3 a stavu 1 s pravděpodobností 2/3.

Příklad 3.: Model dvoustavového systému

Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ je markovský řetězec s množinou stavů $J = \{0,1\}$. Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n,n+1) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, vektor počátečních pravděpodobností $\mathbf{p}(0) = (\gamma, 1-\gamma)$. Pro $n = 2$ najděte simultánní pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X_1, X_2, X_3).

Příklad 4.: Uvažme markovský řetězec z příkladu 2 b). Vypočtěte pravděpodobnost jevu, že $X_1 \neq X_2$.

Příklad 5.: (Model mužských zaměstnání) Předpokládáme rozdělení mužských zaměstnání do tří tříd: vědečtí pracovníci, kvalifikovaní pracovníci, nekvalifikovaní pracovníci. Je známo, že 80% synů vědeckých pracovníků se stane vědeckými pracovníky, 10% kvalifikovanými a 10% nekvalifikovanými pracovníky. Ze synů kvalifikovaných pracovníků 60% bude kvalifikovanými pracovníky, 20% vědeckými a 20% nekvalifikovanými pracovníky. Konečně v případě nekvalifikovaných pracovníků 50% synů bude nekvalifikovanými pracovníky, 25% kvalifikovanými a 25% vědeckými pracovníky. Předpokládejme, že každý muž má syna. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Příklad 6.: V příkladu 5 nyní předpokládejme, že muž má syna jen s pravděpodobností 0,8. Zaveďte nyní homogenní markovský řetězec se čtyřmi stavy – první tři jsou stejné jako v předešlé úloze a čtvrtý odpovídá případu, kdy muž nemá syna a proces končí. Jaká je pravděpodobnost, že vnuk nekvalifikovaného pracovníka se stane vědeckým pracovníkem?

Příklad 7.: (Klasifikace roků podle úrody jablek) V severní Nové Anglii můžeme klasifikovat roky podle úrody jablek jako úrodné, průměrné a neúrodné. Pravděpodobnost, že po úrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,4; 0,4; 0,2. Pravděpodobnost, že po průměrném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,6; 0,2. Pravděpodobnost, že po neúrodném roce bude následovat rok úrodný, průměrný, neúrodný, je postupně 0,2; 0,4; 0,4. Rok 1965 byl úrodný. Vypočtěte vektor absolutních pravděpodobností pro rok 1967.

Příklad 8.: V příkladu 7 předpokládejme, že pravděpodobnost, že rok bude úrodný, je 1/4 průměrný 1/2 a neúrodný 1/4. Jaký je vektor absolutních pravděpodobností pro příští rok?