MASARYKOVA UNIVERZITA

Přírodovědecká fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Alena Filipčuková

Aplikace diferenciálních rovnic - sbírka úloh

Vedoucí práce: RNDr. Lenka Přibylová, Ph.D.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2011

Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student: **Alena Filipčuková**

Studijní program - obor: **Fyzika - Matematika se zaměřením na vzdělávání**

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Aplikace diferenciálních rovnic - sbírka úloh

Applications of differential equations - exercises.

Oficiální zadání: Cílem práce je vytvořit sbírku úloh, které jsou aplikací teorie obyčejných diferenciálních rovnic pro deterministické modelování ve fyzice, biologii, chemii, ekonomii apod.

Literatura: Doporučená literatura

Fulford, Glenn - Forrester, Peter - Jones, Arthur. Modelling with differential and difference equations. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. x, 405 s. ISBN 0-521-44069-6., Barnes, Belinda - Fulford, Glenn. Mathematical modelling with case studies :a differential equation approach using Maple. London : Taylor&Francis, 2002. xiv, 428 s. ISBN 0-415-29804-0., Lynch, Stephen. Dynamical systems with applications using MATLAB. Boston, Mass. : Birkhäuser, 2004. xv, 459 s. ISBN 3-7643-4321-4.

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lenka Přibylová, Ph.D.

Datum zadání bakalářské práce: říjen 2010

Datum odevzdání bakalářské práce: dle harmonogramu ak. roku 2010/2011

V Brně dne 15.10.2010

v. z.

prof. RNDr. Jiří Rosický, DrSc.
Ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Zadání bakalářské práce převzal dne: 10. 1. 2011

Filipčuková
Podpis studenta

Ráda bych poděkovala RNDr. Lence Přibylové, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, cenné rady a připomínky a čas věnovaný konzultačním hodinám.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Brně, dne .... Alena Filipčuková

Název práce: Aplikace diferenciálních rovnic - sbírka úloh
Autor: Alena Filipčuková
Ústav matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty, MU
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lenka Přibylová, Ph.D.
Abstrakt: Cílem práce je sestavit sbírku úloh na aplikace diferenciálních rovnic v různých vědních disciplínách. V první části práce jsou uvedeny základní definice a věty a jsou zde představeny jednotlivé typy diferenciálních rovnic. Druhá část práce je pak již samotná sbírka řešených příkladů doplněná o neřešené příklady s výsledky.
Klíčová slova: diferenciální rovnice, aplikace, sbírka úloh

Title: Applications of differential equations - exercises
Author: Alena Filipčuková
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, MU
Supervisor: RNDr. Lenka Přibylová, Ph.D.
Abstract: The aim of this thesis is to compile exercises for applications of differential equations in various branches of science. Basic definitions and theorems and individual types of differential equations are presented in the first part of the thesis. The second part of this thesis contains solved and unsolved exercises with results.
Keywords: differential equations, applications, exercises

Obsah

Úvod

Cílem práce je sestavit sbírku úloh na aplikace diferenciálních rovnic. Tyto aplikace se vyskytují v mnoha vědních disciplínách a ve své práci se věnuji využití diferenciálních rovnic ve fyzice, chemii, biologii a ekonomii. Zaměřuji se na obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, neboť jejich využití je velmi rozsáhlé a chci tak poukázat na různorodost těchto aplikací. Práce zároveň poslouží také jako pomocný učební text pro cvičení předmětu zabývajícího se deterministickými modely.

Práce je rozdělena do dvou částí - teoreticlé a sbírky úloh.

V první, teoretické části se zabývám nadefinováním základních pojmů a uvedením stěžejních vět zaručujících existenci a jednoznačnost řešení. V první číslované kapitole jsou pak představeny jednotlivé typy diferenciálních rovnic a je zde uveden postup, jakým se tyto rovnice řeší.

Druhou kapitolou je pak samotná sbírka úloh. Tato sbírka sestává z 11 řešených příkladů. U každého vyřešeného příkladu je pak uveden příklad neřešený zabývající se podobnou tématikou, který slouží k procvičení. Součástí příkladu je i výsledek.

Práce je vysázena systémem LaTeX.

Základní pojmy

Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je funkce tří proměnných, která je definovaná na otevřené množině $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ a $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, $x \in \mathbb{R}$. Pak rovnice

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu v implicitním tvaru* s neznámou $y(x)$.

Definice 1. Nechť $h(x)$ je funkce definovaná na otevřeném intervalu J. Pak $h(x)$ se nazývá *řešení rovnice* (1) *na J,* jestliže $h(x)$ má derivaci, pro každé $x \in J, (x, h(x), h'(x)) \in \Omega_0$ a platí

$$F(x, h(x), h'(x)) = 0, x \in J.$$

Řešením obyčejné diferenciální rovnice rozumíme tedy funkci, která vyhovuje dané rovnici na nějakém intervalu. Takových řešení může být více, dokonce nekonečně mnoho. Jedno konkrétní řešení nazýváme *partikulární řešení.* Podaří-li se nám najít univerzální vzorec, ve kterém jsou zahrnuta všechna partikulární řešení, mluvíme o *obecném řešení.* Obecné řešení bude tedy vzorec obsahující jednu nebo více libovolných konstant, jejichž konkrétními volbami dostaneme všechna možná partikulární řešení dané rovnice. Počet konstant odpovídá v podstatě řádu rovnice.

Při řešení obyčejných diferenciálních rovnic bývá důležité, abychom z rovnice (1) osamostatnili y'. Chceme tedy získat tzv. *explicitní tvar obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu*

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

kde $f(x, y)$ je funkce dvou proměnných definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Jestliže $y(x)$ je řešení rovnice (2), které v bodě x_0 má hodnotu y_0, tj. $y(x_0) = y_0$ (říkáme, že řešení prochází bodem (x_0, y_0)), pak musí platit

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

V teorii diferenciálních rovnic jsou důležité následující tři otázky:
- zda má daná rovnice vůbec nějaké řešení,
- pokud nějaké řešení má, kolik je jich celkem,
- jak lze řešení nalézt.

Existence a jednoznačnost řešení

Definice 2. Nechť $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pak úloha najít řešení $y(x)$ diferenciální rovnice (2), které je definované na nějakém intervalu J obsahujícím bod x_0 a které splňuje tzv. počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, se nazývá *Cauchyova počáteční úloha.*

Bude nás zajímat, za jakých podmínek bude mít počáteční úloha řešení a kdy bude toto řešení jediné.

Věta 1 (Existenční)**.** *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině Ω. Pak pro každé $(x_0, y_0) \in \Omega$ má úloha*

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

alespoň jedno řešení.

Důkaz. viz např. [7]

Definice 3. Řekneme, že počáteční problém (3) *má jediné řešení,* jestliže pro každá dvě jeho řešení $y_1(x), y_2(x)$ existuje vhodné číslo $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ je $y_1(x) = y_2(x)$.

Jednou z mnoha podmínek zaručujících jednoznačnost řešení je tzv. *Lipschitzova podmínka* (lokální):

Existují konstanta $K > 0$ a okolí O bodu $(x_0, y_0), O \subset \Omega$, takové, že pro každé dva body $(x, y_1) \in O, (x, y_2) \in O$ je $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$.

Této podmínky využijeme v následující větě.

Věta 2 (O existenci a jednoznačnosti)**.** *Nechť $f(x, y)$ je spojitá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a v každém bodě je splněna Lipschitzova podmínka. Pak pro libovolný bod $(x_0, y_0) \in \Omega$ má úloha* (3) *právě jedno řešení.*

Důkaz. viz např. [7]

Kapitola 1

Elementární metody řešení

Jak jsme se již zmínili, z hlediska uživatele bývá nejdůležitější určit řešení dané rovnice. Ideální by bylo najít obecné řešení, tedy všechna řešení každé rovnice. To však pokaždé není bohužel možné. Nejprve je třeba si uvědomit, co se obvykle rozumí slovy „najít řešení". Většinou si pod tím představujeme explicitní nebo implicitní vyjádření funkce $y(x)$.
Uvažujme nyní speciální rovnici tvaru

$$y' = f(x).$$

Zřejmě jde o nalezení neurčitého integrálu funkce $f(x)$. Z definice primitivní funkce plyne, že všechna řešení této úlohy mají tvar

$$y(x) = \int f(x)\,dx + c,$$

což je obecné řešení uvedené rovnice.
V dalším oddílu jsou uvedeny nejdůležitější typy rovnic, které lze řešit tzv. *elementárními metodami řešení* obyčejných diferenciálních rovnic.
V následujícím přehledu jsou všechny rovnice až na jednu uvedeny ve tvaru $y' = f(x, y)$. Je tedy třeba konkrétní rovnici na tento tvar upravit a pak zvažovat, zda je některého z uvedených typů. Je však možné, že konkrétní rovnice spadá současně do více typů. Pak dáme přednost tomu, který má jednodušší postup řešení.

1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu nazýváme rovnice se *separovanými proměnnými,* jestliže má tvar

$$y' = f(x)g(y). \tag{4}$$

Předpokládejme, že f a g jsou spojité funkce na nějakých otevřených intervalech a $g(y) \neq 0$. Pak lze ukázat, že je zaručena existence a jednoznačnost řešení. Každé řešení dostaneme následujícím postupem:
Separací proměnných

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

a integrací podle proměnné x vyjde

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx,$$

což je podle věty o substituci

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx,$$

kde $dy = y'(x)dx$. Nechť $G(y)$ je primitivní funkce k $\frac{1}{g(y)}$ a $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$. Pak obecné řešení má tvar

$$G(y) = F(x) + c,$$

kde $c \in R$ je integrační konstanta.
Dále si všimněme, že jestliže $g(y_0) = 0$ pro nějaké $y_0 \in R$, je $y(x) \equiv y_0$ konstantní řešení rovnice (4), neboť na levé straně je $y'(x) = (y_0)' \equiv 0$ a na pravé straně je $f(x)g[y(x)] = f(x)g(y_0) \equiv 0$.
Rovnice, které se nějakou úpravou dají převést na rovnice tvaru (4), se nazývají *separovatelné.*

Poznámka 1. Je na čase, abychom se zmínili obecně o řešení počátečního problému (3). Jediný způsob, který ve své práci zmíním, bude ten, že nejprve najdeme obecné řešení. To bude u rovnic 1. řádu obsahovat jednu neznámou konstantu. Tu určíme tak, že do obecného řešení dosadíme počáteční podmínku.

1.2 Lineární rovnice

Lineární rovnicí 1. řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{5}$$

Věta 3. *Nechť funkce $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité na intervalu J. Nechť $x_0 \in J$ a $y_0 \in R$ jsou libovolná čísla. Pak počáteční problém*

$$y' = a(x)y + b(x), y(x_0) = y_0$$

má právě jedno řešení a to existuje na celém intervalu J.

Důkaz. viz např. [1]

Definice 4. Rovnice (5) se nazývá *homogenní*, jestliže $b(x) \equiv 0$ na I. V opačném případě se nazývá *nehomogenní.*

V dalším budeme předpokládat, že $a(x)$ a $b(x)$ jsou spojité, a všimneme si postupně vlastností řešení homogenní a nehomogenní rovnice.

Homogenní rovnice

Všimněme si, že rovnice

$$y' = a(x)y \tag{6}$$

má vždy tzv. *triviální řešení* $y \equiv 0$. Z předchozí věty plyne, že jestliže $y(x_0) = 0$, pak díky jednoznačnosti je nutně $y(x) = 0$ pro každé $x \in I$.
Další důležitá vlastnost je obsahem následující věty.

Věta 4. *Nechť $y_1(x), y_2(x)$ jsou řešení rovnice* (6) *a $c \in R$. Pak také $y_1(x)+y_2(x)$ a $cy_1(x)$ jsou řešení rovnice* (6).

Důkaz. viz např. [1]

Obsah předchozí věty lze shrnout tak, že *součet dvou řešení a násobek řešení číslem jsou opět řešení.*

Důsledek 1. Nechť $y_0(x)$ je libovolné netriviální řešení rovnice (6). Pak obecné řešení této rovnice má tvar

$$y(x) = cy_0(x), c \in R.$$

Řešení rovnice (6) lze najít metodou separace proměnných.
Tedy

$$\frac{y'}{y} = a(x) \Longrightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int a(x)dx,$$

což je podle věty o substituci

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx,$$

kde $dy = y'(x)dx$. Dále

$$\ln|y| = \int a(x)dx + c$$

a po odlogaritmování a zahrnutí singulárního řešení $y = 0$ pak vyjde

$$y = ke^{\int a(x)dx}, k \in \mathbb{R}.$$

Nehomogenní rovnice

Věta 5. *Nechť* $y_1(x)$ *je řešení rovnice* $y' = a(x)y + b_1(x)$ *a* $y_2(x)$ *je řešení rovnice* $y' = a(x)y + b_2(x), x \in I,$ *a* $c_1, c_2 \in R$. *Pak funkce* $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *je řešením rovnice*

$$y' = a(x)y + c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x).$$

Důkaz. Tvrzení je bezprostředním zobecněním věty 1.2 a i jeho důkaz je zcela analogický.

Výsledek obsažený v předchozí větě se nazývá *princip superpozice.*

Věta 6. *Nechť* $y_0(x)$ *je netriviální partikulární řešení rovnice* (6) *a* $y_1(x)$ *je partikulární řešení rovnice* (5). *Pak obecné řešení rovnice* (5) *má tvar*

$$y = cy_0(x) + y_1(x), c \in R.$$

Důkaz. viz např. [1]

Z předchozí věty vyplývá důležitý princip. Označme

OŘHLDR .... obecné řešení homogenní lineární dif. rovnice
PŘHLDR .... partikulární řešení homogenní lineární dif. rovnice
OŘNLDR .... obecné řešení nehomogenní lineární dif. rovnice
PŘNLDR .... partikulární řešení nehomogenní lineární dif. rovnice

Pak

$$\text{OŘNLDR}=\text{OŘHLDR}+\text{PŘNLDR}$$

Co se týká praktického řešení, vyplývá z předchozího vztahu, že stačí najít obecné řešení homogenní rovnice, což již umíme, neboť jde o rovnici se separovanými proměnnými, a partikulární řešení nehomogenní rovnice, což zatím neumíme. K řešení druhé úlohy slouží např. následující metoda.

Variace konstanty

Je to postup sloužící k nalezení partikulárního řešení rovnice (5). Je třeba již znát obecné řešení $ky_0(x)$ homogenní rovnice (6). Pokusíme se nahradit konstantu k vhodnou funkcí $k(x)$ (odtud název variace konstanty) a najít řešení ve tvaru

$$y = k(x)y_0(x).$$

Vypočteme $y' = k'(x)y_0(x) + k(x)y_0'(x)$ a po dosazení do (5) dostaneme

$$k'(x)y_0(x) + k(x)y_0'(x) = a(x)k(x)y_0(x) + b(x).$$

Protože $y_0'(x) = a(x)y_0(x)$ (je to totiž řešení (6)), musí platit

$$k'(x)y_0(x) = b(x).$$

Jelikož $y_0(x) \neq 0$, máme

$$k'(x) = \tfrac{b(x)}{y_0(x)}$$

a po integraci dostáváme hledanou funkci

$$k(x) = \int \tfrac{b(x)}{y_0(x)} dx.$$

1.3 Exaktní rovnice a integrační faktor

Rovnice, kterými jsme se dosud zabývali, měly tvar (2). Diferenciální rovnice však mohou být zadány i v jiné podobě - pomocí diferenciálů. Tvar takové rovnice je

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{7}$$

kde $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou nějaké funkce.

Pro $Q(x,y) \neq 0$ je možné rovnici převést na tvar

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

což je rovnice typu (2) pro neznámou funkci $y(x)$, a pro $P(x,y) \neq 0$ je možné ji převést na tvar

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

což je opět rovnice typu (2), ale pro neznámou funkci $x(y)$. Případ, kdy P i Q jsou současně v nějakém bodě nulové, neuvažujeme, protože je triviální.

Definice 5. Rovnice (7) se nazývá *exaktní,* jestliže výraz na levé straně je totálním diferenciálem funkce $F(x,y)$, tj. platí

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Funkce $F(x,y)$ se pak nazývá *kmenová.*

Odpověď na otázku, jak se ověří, že nějaký výraz představuje totální diferenciál, je obsažena v následující větě.

Věta 7. *Nechť $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité v jednoduše souvislé oblasti Ω a mají zde spojité parciální derivace $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ a $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *Výraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ je totální diferenciál.*
2. *Platí $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, (x,y) \in \Omega$.*

Poznámka 2. *Oblastí* Ω rozumíme otevřenou souvislou množinu Ω, tj. otevřenou množinu, jejíž libovolné dva body lze spojit křivkou ležící v Ω. Oblast Ω se nazývá *jednoduše souvislá,* jestliže s každou jednoduchou uzavřenou křivkou C ležící v Ω leží v Ω i vnitřek křivky C.

U exaktní rovnice je možné napsat snadno vzorec obecného řešení.

Věta 8. *Nechť rovnice (7) je exaktní a $F(x,y)$ je příslušná kmenová funkce. Pak výraz*

$$F(x,y) = c, c \in R$$

je obecným řešením této rovnice v implicitním tvaru.

Důkaz. viz např. [8]

Podmínka 2. z věty 7 nám dává návod, jak poznat, že rovnice (7) je exaktní. Abychom však mohli použít větu 8, je třeba si říci, jak najdeme příslušnou kmenovou funkci. Výsledek nebudeme formulovat do věty, ale popíšeme odpovídající postup. Protože

$$dF(x,y) = \tfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \tfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy$$

a

$$dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

musí platit

$$\tfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \tfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),$$

resp. ve stručnější symbolice

$$F_x = P, F_y = Q. \tag{8}$$

Integrací těchto rovnic lze F najít. Zvolíme libovolnou z těchto rovnic, např. první. Dostáváme

$$F_x = P \Longrightarrow F(x,y) = \textstyle\int P(x,y)dx + C(y).$$

Přitom integrál $\int P(x,y)dx$ chápeme jako závislý na parametru y. Dále je třeba si uvědomit, že integrační „konstanta“ C nemusí být obecně číslo, ale funkce závislá na druhé proměnné, tj. v našem případě na y (zkoušku správnosti totiž děláme parciálním derivováním podle x, při němž sebesložitější funkce závislá jen na y se derivuje na nulu).

Zbývá určit funkci $C(y)$. To uděláme dosazením do zbývající, tj. v našem případě do druhé rovnice v (8). Uvědomme si při tom, že $\int P(x,y)dx$ již bude nějaká konkrétní funkce. Dostaneme

$$\tfrac{\partial(\int P(x,y)dx + C(y))}{\partial y} = Q(x,y) \Longrightarrow \tfrac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y} + C'(y) = Q(x,y).$$

Ve vzniklé rovnici se musí *vyrušit* neznámá, která není proměnnou funkce C, tj. v našem případě x. Pokud se tak nestane, jsou dvě možnosti - buď jsme udělali početní chybu nebo jsme zapomněli ověřit, zda rovnice (7) je skutečně exaktní (všimněte si, že část postupu až po toto místo lze udělat s libovolnou rovnicí tvaru (7), ne jen exaktní; že postup k ničemu nevede, bohužel zjistíme až v tomto okamžiku).

Tedy pro neznámou funkci $C(y)$ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici se separovanými proměnnými (obsahující dokonce jen nezávisle proměnnou y)

$$C'(y) = Q(x, y) - \tfrac{\partial \int P(x,y)dx}{\partial y}.$$

<u>Integrační faktor</u>

V praxi si často pokládáme otázku, zda by nebylo možné rovnici, která není exaktní, vynásobit nějakou funkcí tak, aby nová rovnice již byla exaktní. Funkce, která má tuto vlastnost, se nazývá *integrační faktor*. Pokusme se zjistit, jak by takový integrační faktor $M(x, y)$ měl vypadat. Uvažujme rovnici (7), která není exaktní, tj. $P_y \neq Q_x$. Chceme najít funkci $M(x, y)$ tak, aby rovnice

$$P(x, y)M(x, y)dx + Q(x, y)M(x, y)dy = 0$$

byla exaktní. Za předpokladu existence potřebných derivací dostáváme, že musí platit

$$\tfrac{\partial P(x,y)M(x,y)}{\partial y} = \tfrac{\partial Q(x,y)M(x,y)}{\partial x},$$

což po provedení derivací a vynechání argumentů x a y dává

$$\frac{\partial P}{\partial y}M + P\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}M + Q\frac{\partial M}{\partial x}. \tag{9}$$

To je tzv. *parciální lineární diferenciální rovnice prvního řádu* pro neznámou funkci $M(x, y)$. Z teorie těchto rovnic vyplývá, že za předpokladů spojitosti P, Q, P_y a Q_x a podmínky $|P| + |Q| > 0$ existuje (alespoň lokálně) její řešení. Bohužel řešení této rovnice je v podstatě ekvivalentní řešení rovnice (7). Obecně tedy integrační faktor efektivně nedokážeme najít. V některých speciálních případech to však lze, jak si nyní ukážeme.

Předpokládejme, že integrační faktor $M(x, y)$ *závisí jen na jedné proměnné.* Uvažujme nejprve případ $M = M(x)$. Pak $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0$ a z rovnice (9) vyjde po úpravě

$$Q\tfrac{\partial M}{\partial x} = (\tfrac{\partial P}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial x})M,$$

tj.

$$\frac{\frac{dM}{dx}}{M} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \tag{10}$$

Protože levá strana této rovnice závisí jen na x, je možné najít integrační faktor závislý jen na x v případě, že $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ je funkcí pouze x. Pak je (10) rovnicí se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $M(x)$.

Podobně když $M = M(y)$ a tedy $\frac{\partial M}{\partial x} \equiv 0$, vyjde z (9) analogicky

$$\frac{\frac{dM}{dy}}{M} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P}, \tag{11}$$

což vyžaduje, aby výraz $\frac{Q_x - P_y}{P}$ byl funkcí pouze y. Pak je (11) rovnicí se separovanými proměnnými pro neznámou funkci $M(y)$.

Použití integračního faktoru si názorně ukážeme v příkladě o chemickém závodě.

Kapitola 2

Sbírka úloh

2.1 Rozpad radioaktivního materiálu

Je známo, že rychlost rozpadu rádia je přímo úměrná okamžitému množství rádia. Poloměr rozpadu izotopu rádia ${}^{222}_{88}Ra$ je 1590 let, tj. počáteční množství se za tuto dobu zmenší na polovinu. Určete, za jak dlouho se počáteční množství sníží o 25 %.

Řešení: Nechť $y(t)$ je množství rádia v čase t. Pak pro rychlost rozpadu platí

$$y' = ky,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Nechť v čase $t = 0$ je množství rádia rovno y_0. Pak

$$y(0) = y_0, y(1590) = \tfrac{1}{2}y_0$$

a máme určit t_1 tak, aby

$$y(t_1) = \tfrac{3}{4}y_0.$$

Diferenciální rovnice pro $y(t)$ je homogenní lineární rovnice, tj. rovnice se separovanými proměnnými. Řešíme-li tuto rovnici, pak po odlogaritmování dostáváme

$$y = ce^{kt}.$$

Z počáteční podmínky v $t = 0$ určíme

$$y_0 = y(0) = ce^{k\cdot 0} = c$$

a hledané partikulární řešení je

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu $t = 1590$, dostaneme

$$\tfrac{1}{2} y_0 = y(1590) = y_0 e^{1590k} \Longrightarrow e^{1590k} = \tfrac{1}{2}.$$

Logaritmováním dostaneme

$$-\ln 2 = 1590k \Longrightarrow k = -\tfrac{\ln 2}{1590}.$$

Konečně pro t_1 máme

$$\tfrac{3}{4} y_0 = y(t_1) = y_0 e^{kt_1} \Longrightarrow e^{kt_1} = \tfrac{3}{4}.$$

Odtud vypočteme

$$\ln \tfrac{3}{4} = kt_1 \Longrightarrow t_1 = \tfrac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 2} \cdot 1590 \doteq 660.$$

Ke snížení o 25% tedy dojde asi za 660 let.

Cvičení 1
Předpokládejme, že radioaktivní izotop stroncia ^{90}Sr se rozpadá exponenciálně podle rovnice $y' = -ay, a > 0$. Určete konstantu a a čas, za který se sníží množství stroncia ze 100% na 10%, víte-li, že poločas rozpadu je 28,1 roku.

$[a = \frac{\ln 2}{28{,}1} = 0,025; t \doteq 93,3 \text{ roku}]$

2.2 Šálek kávy

Šálek kávy se v počátečním stavu nachází v bodu varu, 100 °C. Teplota pokoje je 20 °C. Určete teplotu kávy jako funkci času. Situace je popsána Newtonovým zákonem ochlazování:

$$\tfrac{du}{dt} = -\lambda(u - u_s),$$

kde $\lambda > 0$ je konstanta úměrnosti, u je teplota kávy v čase t po umístění do pokoje a u_s je teplota pokoje.

Řešení: Nechť u je teplota kávy po čase t.
Jestliže $u_s = 20$, pak diferenciální rovnice nabývá tvaru

$$\frac{du}{dt} = -\lambda(u - 20)$$

s počáteční podmínkou $u = 100$, když $t = 0$.
Jedná se o diferenciální rovnici s lineárními konstantními koeficienty, kterou budeme řešit ve dvou krocích.
Nejprve nalezneme řešení zhomogenizované rovnice

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u.$$

Dostáváme jedno z možných řešení

$$u = e^{-\lambda t}.$$

Protože je rovnice homogenní, všechna řešení jsou tvaru

$$u = Ce^{-\lambda t},$$

kde C je nějaká reálná konstanta.
Ve druhém kroku řešíme, že původní rovnice má partikulární řešení, kde u je konstanta.
To znamená, že

$$\frac{du}{dt} = 0$$

a proto

$$u - 20 = 0.$$

Tedy partikulární řešení je

$$u = 20.$$

Nakonec všechna řešení původní rovnice získáme sloučením dosavadních výsledků.
Dostáváme

$$u = Ce^{-\lambda t} + 20.$$

Užitím počátečních podmínek máme

$$100 = Ce^0 + 20 = C + 20$$

a proto

$$C = 80.$$

Požadováne řešení tedy je

$$u = 80e^{-\lambda t} + 20.$$

Tato rovnice vyjadřuje teplotu u kávy jako funkci času t.

Cvičení 2
Studené pivo má teplotu 10 °C. Po 10 minutách je jeho teplota 15 °C. Zjistěte, za jak dlouho se pivo ohřeje na teplotu 20 °C, jestliže se nachází v místnosti o teplotě 30 °C.

[$t \doteq 24$ min 6 s]

2.3 Izolace pece

Teplota vnitřní zdi pece o ploše 3 m^2 je 500 °C. Teplota vnější zdi je 100 °C. Mezi zdmi je azbestová izolace o šíři 1 m. Kolik tepla unikne?
Případ je popsán Fourierovým zákonem:

$$J = -kA\frac{du}{dx},$$

kde J je teplo v joulech, konstanta k je tepelná vodivost materiálu (v našem případě je tepelná vodivost azbestu 0,113 $Wm^{-1}°C^{-1}$), A je plocha příčného řezu a u je teplota závisející na vzdálenosti x.

Řešení: Nechť J joulů je množství tepla, které unikne skrz průřez rovnoběžný se zdmi o ploše 3 m^2 ve vzdálenosti x metrů od vnitřní zdi.
Předpokládejme, že nastane ustálený teplotní stav. Pak J je konstantou, kterou nyní určíme.
Nechť u je teplota ve vzdálenosti x.
Řešíme diferenciální rovnici $\frac{du}{dx} = -\frac{J}{kA}$ pro počáteční podmínku $u = 500$°C v $x = 0$.
Dostaneme

$$u = -\frac{J}{kA}x + 500.$$

Nyní dosadíme $u = 100$°C; $x = 1; A = 3; k = 0,113$.

Pak

$$J = 400kA = 1200k = 135,6J.$$

Dostáváme tedy řešení, že unikne 136 J tepla.

Cvičení 3
Ve stavebním průmyslu se často využívá tzv. betonového sendviče, kdy mezi vnitřní a vnější betonovou zeď je vložena vrstva polystyrenu. Předpokládejte, že teplota vnitřní zdi je 20 °C a vnější zeď má teplotu 5 °C. Pro jednoduchost uvažujte jednotkovou plochu. Určete o kolik více tepla unikne při použití polystyrenu o šířce 7 cm místo polystyrenu o šířce 10 cm. Tepelná vodivost polystyrenu je 0,157 $Wm^{-1\circ}C^{-1}$.

$[\Delta J = 10,09J]$

2.4 Smíchávání

Velká nádrž obsahuje 100 hl slané vody, v níž je rozpuštěno 50 kg soli. Do nádrže vtéká rychlostí 6 hl/min slaná voda obsahující 2 kg soli na jeden hl. Směs, která je promícháváním neustále udržována homogenní, vytéká z nádrže rychlostí 4 hl/min. Určete výsledné množství soli v nádrži po uplynutí t minut.

Řešení: Označme $y(t)$ množství soli v kg, které je v nádrži v čase t, $t \geq 0$. Nádrž obsahuje v čase t zřejmě $100 + (6 - 4)t$ hl vody. Koncentrace v tomto okamžiku bude

$$\tfrac{y(t)}{100+2t} \text{ kg/hl.}$$

Nechť $t_0 \geq 0$ je pevné a $t > t_0$. Pak během časového intervalu $\langle t_0, t\rangle$ přibude v nádrži

$$6 \cdot 2 \cdot (t - t_0) = \textstyle\int_{t_0}^{t} 6 \cdot 2 \ ds$$

kg soli a ubude

$$\textstyle\int_{t_0}^{t} 4 \cdot \frac{y(s)}{100+2s} \ ds$$

kg soli. Tedy musí platit

$$y(t) = y(t_0) + 12(t - t_0) - 4 \textstyle\int_{t_0}^{t} \frac{y(s)}{100+2s} \ ds.$$

Když tuto rovnost zderivujeme podle t (s použitím věty o derivování integrálu jako funkce horní meze), dostaneme

$$y'(t) = 12 - \tfrac{4y(t)}{100+2t},$$

což je diferenciální rovnice popisující změnu množství soli v nádrži. Tuto rovnici nyní vyřešíme. Jde o nehomogenní lineární diferenciální rovnici prvního řádu.
I. Homogenní rovnice je

$$\tfrac{dy}{dt} = -\tfrac{4y}{100+2t}$$

a po integraci

$$\textstyle\int \tfrac{dy}{y} = -4 \int \tfrac{dt}{100+2t}.$$

Protože

$$\textstyle\int \tfrac{dt}{100+2t} = \left| \begin{array}{ccc} 2t+100 & = & u \\ 2dt & = & du \\ dt & = & \frac{1}{2}du \end{array} \right| = \tfrac{1}{2} \int \tfrac{du}{u} = \tfrac{1}{2} \ln|u| = \tfrac{1}{2} \ln|100+2t|,$$

dostáváme

$$\ln|y| = -2\ln|100+2t| + c,$$

tj.

$$y = \tfrac{k}{(100+2t)^2}.$$

II. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y(t) = \tfrac{k(t)}{(100+2t)^2}.$$

Je

$$y'(t) = \tfrac{k'(t)(100+2t)^2 - k(t)\cdot 2(100+2t)\cdot 2}{(100+2t)^4}.$$

Po dosazení do rovnice vyjde

$$\tfrac{k'(t)(100+2t)^2 - 4(100+2t)k(t)}{(100+2t)^4} = 12 - \tfrac{4k(t)}{(100+2t)^3} \implies \tfrac{k'(t)}{(100+2t)^2} = 12.$$

Tedy

$$k(t) = 12 \textstyle\int (100+2t)^2 \ dt = \left| \begin{array}{ccc} 100+2t & = & u \\ 2dt & = & du \\ dt & = & \frac{1}{2}du \end{array} \right| = 6 \int u^2 \ du = 2u^3 =$$

$$= 2(100+2t)^3.$$

Partikulární řešení tudíž je

$$y = \frac{2(100+2t)^3}{(100+2t)^2} = 2(100+2t),$$

takže obecné řešení rovnice je

$$y(t) = \frac{k}{(100+2t)^2} + 2(100+2t).$$

Protože $y(0) = 50$, dostaneme pro k rovnici

$$50 = \frac{k}{100^2} + 200 \Longrightarrow k = -150 \cdot 100^2 = -15 \cdot 10^5.$$

Množství soli je tedy dáno funkcí

$$y(t) = 2(100+2t) - \frac{15 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}.$$

Cvičení 4
Nádrž obsahuje 50 hl vody, v níž je rozpuštěno 20 kg soli. Do nádrže je přidávána čistá sůl rychlostí 1 kg/min. Směs je udržována homogenní a vytéká z nádrže rychlostí 2 hl/min. Jak mnoho soli je v nádrži po 10 minutách? Jaká je v té době koncentrace?

[19,7 kg; 0,66 kg/hl]

2.5 Chemický závod

Chemický závod vhání denně v litrů roztoku obsahujícího m gramů rozpouštěné látky do velkého jezera o objemu V. Přítok a odtok vody je konstantní. Koncentraci rozpuštěné látky v jezeře označme σ. Určete koncentraci rozpuštěné látky v jezeře v čase t za předpokladu, že $\sigma = 0$, když $t = 0$. Co se stane dlouhodobě s koncentrací?

Řešení: Označme $M(t)$ množství látky v jezeře v daném čase t.
Změna množství látky $\frac{dM(t)}{dt}$ je rozdílem mezi množstvím, které do jezera vteče a které vyteče. Do jezera vtéká m gramů látky a vytéká (předpokládáme dokonalé promíchání) část množství $M(t)$ odpovídající $\frac{v}{V}$. Tedy

$$\frac{dM}{dt} = m - v\frac{M}{V}.$$

Protože koncentrace $\sigma = \frac{M}{V}$, vydělením této rovnice objemem jezera V dostáváme diferenciální rovnici popisující změnu koncentrace rozpuštěné látky v jezeře v čase t:

$$\tfrac{d\sigma}{dt} + \tfrac{v}{V}\sigma = \tfrac{m}{V}.$$

Jedná se o nehomogenní lineární diferenciální rovnici 1. řádu.
Homogenní rovnice je

$$\tfrac{d\sigma}{dt} + \tfrac{v}{V}\sigma = 0.$$

Integrujeme tedy rovnici

$$\textstyle\int \frac{d\sigma}{\sigma} = -\int \frac{v}{V} dt.$$

Dostáváme

$$\ln|\sigma| = -\tfrac{v}{V}t + c$$

a po odlogaritmování má řešení homogenní rovnice tvar

$$\sigma = ke^{-\frac{v}{V}t},$$

kde c a k jsou libovolné konstanty (zde $k = 0$ zahrnuje případ nulové koncentace).
Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$\sigma(t) = k(t)e^{-\frac{v}{V}t}.$$

Platí

$$\sigma'(t) = k'(t)e^{-\frac{v}{V}t} - \tfrac{v}{V}k(t)e^{-\frac{v}{V}t}.$$

Po dosazení do rovnice vyjde

$$k'(t)e^{-\frac{v}{V}t} - \tfrac{v}{V}k(t)e^{-\frac{v}{V}t} + \tfrac{v}{V}k(t)e^{-\frac{v}{V}t} = \tfrac{m}{V}.$$

Tedy

$$k(t) = \tfrac{m}{V}\textstyle\int e^{\frac{v}{V}t}dt = \tfrac{m}{v}e^{\frac{v}{V}t}.$$

Partikulární řešení tudíž je

$$\sigma = \tfrac{m}{v}e^{\frac{v}{V}t}e^{-\frac{v}{V}t} = \tfrac{m}{v}.$$

Toto řešení je vidět jako konstantní partikulární řešení: je-li $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, pak $\frac{v}{V}\sigma = \frac{m}{V}$, tedy $\sigma = \frac{m}{v}$.
Takže obecné řešení rovnice je

$$\sigma(t) = \tfrac{m}{v} - ke^{-\frac{v}{V}t},$$

kde k je konstanta.
S rostoucím t se pak koncentrace ustálí na $\frac{m}{V}\ gl^{-1}$.
Rovnici lze však řešit i jiným způsobem, užitím tzv. integračního faktoru:
Nejprve si rovnici přepíšeme do tvaru

$$d\sigma + (\tfrac{v}{V}\sigma - \tfrac{m}{V})dt = 0.$$

Máme

$$P = 1, Q = \tfrac{v\sigma - m}{V} \Longrightarrow P_t = 0, Q_\sigma = \tfrac{v}{V} \Longrightarrow P_t \neq Q_\sigma$$

a rovnice tedy není exaktní. Pokusíme se najít integrační faktor.

Předpokládejme nejprve, že $M = M(\sigma)$. Pak pravá strana (10) má obsahovat jen σ, což dává v našem případě

$$\tfrac{P_t - Q_\sigma}{Q} = -\tfrac{v}{v\sigma - m}.$$

Integrační faktor tohoto tvaru tedy lze nalézt.

Pro nás však bude výhodnější, budeme-li předpokládat, že $M = M(t)$. Pak pravá strana v (11) musí obsahovat jen t, což dává pro naši rovnici

$$\tfrac{Q_\sigma - P_t}{P} = \tfrac{v}{V},$$

a je tedy možné integrační faktor tohoto tvaru najít. Z (11) dostáváme

$$\tfrac{\frac{dM}{dt}}{M} = \tfrac{v}{V} \Longrightarrow \tfrac{dM}{M} = \tfrac{v}{V}dt$$

a po integraci

$$\ln|M| = \tfrac{v}{V}t + c.$$

Po odlogaritmování vyjde

$$M(t) = ke^{\frac{v}{V}t}.$$

Zvolme např. $k = 1$. Pak integrační faktor je

$$M(t) = e^{\frac{v}{V}t}.$$

Po vynásobení rovnice integračním faktorem dostaneme

$$e^{\frac{v}{V}t}d\sigma + e^{\frac{v}{V}t}(\tfrac{v\sigma - m}{V})dt = 0.$$

Zde $P = e^{\frac{v}{V}t}, Q = e^{\frac{v}{V}t}(\frac{v\sigma-m}{V})$ a tedy

$$P_t = \tfrac{v}{V}e^{\frac{v}{V}t}, Q_\sigma = \tfrac{v}{V}e^{\frac{v}{V}t} \Longrightarrow P_t = Q_\sigma$$

a jde skutečně o exaktní rovnici, kterou si upravíme do tvaru

$$\frac{d\sigma}{\frac{v\sigma-m}{V}} + dt = 0.$$

Najdeme kmenovou funkci $F(\sigma, t)$. Pro ni máme

$$F_\sigma = \frac{1}{\frac{v\sigma-m}{V}}, F_t = 1.$$

Integrací např. první rovnice vychází

$$F(\sigma, t) = \int \frac{d\sigma}{\frac{v\sigma-m}{V}} = \tfrac{V}{v}\ln\tfrac{v\sigma-m}{V} + A(t).$$

Dosadíme-li tento dílčí výsledek do druhé rovnice, dostaneme

$$A'(t) = 1.$$

Po integraci je

$$A(t) = t.$$

Pak obecné řešení diferenciální rovnice má (implicitní) tvar

$$\tfrac{V}{v}\ln\tfrac{v\sigma-m}{V} + t = B, B \in R.$$

Úpravou pak konečně získáváme

$$\sigma(t) = \tfrac{m}{v} - Ce^{-\frac{v}{V}t},$$

kde C je konstanta.
Nakonec užitím počátečních podmínek dostáváme řešení:

$$\sigma(t) = \tfrac{m}{v}(1 - e^{\frac{-vt}{V}}).$$

Cvičení 5
Diferenciální rovnice používaná k modelování koncentrace $g(t)$ glukózy v krvi má tvar:

$$\tfrac{dg}{dt} + kg = \tfrac{G}{100V},$$

přičemž glukóza je do těla dodávána nitrožilně. G zde značí rychlost, s jakou je glukóza přijímána, k je konstanta a V je objem krve v těle. Určete koncentraci glukózy v krvi v čase t.

$[g(t) = Ce^{-kt} + \frac{G}{100kV}]$

2.6 Rychlost chemické reakce

Uvažujeme dvě chemikálie A a B, které navzájem reagují. Předpokládejme, že při vytváření nového produktu se kombinuje jedna molekula z A s jednou molekulou z B. Určete rychlost chemické reakce, víte-li, že je přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací reagujících látek.

Řešení: Nechť $x(t)$ resp. $y(t)$ je koncentrace (v molekulách na litr) v čase t látky A resp. látky B. Nechť $a = x(0) > 0$, $b = y(0) > 0$ jsou počáteční koncentrace. Protože se spolu kombinuje po jedné molekule, klesají obě koncentrace touž rychlostí, tj.

$$\tfrac{dx}{dt} = \tfrac{dy}{dt}.$$

Úbytek $z(t)$ koncentrace látky A resp. B v čase t je pak dán vztahem

$$z(t) = a - x(t) \text{ resp. } z(t) = b - y(t).$$

Odtud máme

$$\tfrac{dz}{dt} = -\tfrac{dx}{dt} = -\tfrac{dy}{dt}.$$

Výraz $\frac{dz}{dt}$ nazýváme *rychlost reakce*. Zadání nám říká, že platí

$$\tfrac{dz}{dt} = kxy,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti (kterou lze experimentálně určit). Dosadíme-li za x a y, dostaneme pro $z(t)$ diferenciální rovnici

$$z' = k(a - z)(b - z),\ z(0) = 0.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými, tedy

$$\tfrac{dz}{dt} = k(a - z)(b - z)$$

a po integraci

$$\int \tfrac{dz}{(z-a)(z-b)} = k \int dt.$$

Integrál na levé straně je z racionální lomené funkce. Po jednoduchém rozkladu na parciální zlomky vyjde pro $a \neq b$
$\int \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \int (\frac{\frac{1}{a-b}}{z-a} - \frac{\frac{1}{a-b}}{z-b})dz = \frac{1}{a-b}(\ln|z-a| - \ln|z-b|).$

Tedy

$$\tfrac{1}{a-b}\ln\left|\tfrac{z-a}{z-b}\right| = kt + c.$$

Po odlogaritmování vyjde

$$\tfrac{z-a}{z-b} = c^{a-b}e^{k(a-b)t}.$$

Z počáteční podmínky $z(0) = 0$ dostaneme

$$\tfrac{0-a}{0-b} = c^{a-b}e^{0} \Longrightarrow \tfrac{a}{b} = c^{a-b} \Longrightarrow c = \left(\tfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{a-b}}.$$

Po dosazení a osamostatnění z postupně máme

$$\tfrac{z-a}{z-b} = \tfrac{a}{b}e^{k(a-b)t} \Longrightarrow bz - ab = aze^{k(a-b)t} - abe^{k(a-b)t},$$

tj.

$$z(t) = ab\tfrac{e^{k(a-b)t}-1}{ae^{k(a-b)t}-b}.$$

Rychlost reakce je tudíž
$\frac{dz}{dt} = ab\frac{k(a-b)e^{k(a-b)t}(ae^{k(a-b)t}-b)-(e^{k(a-b)t}-1)ak(a-b)e^{k(a-b)t}}{(ae^{k(a-b)t}-b)^2} =$
$= ab\frac{k(a-b)e^{k(a-b)t}(ae^{k(a-b)t}-b-ae^{k(a-b)t}+a)}{(ae^{k(a-b)t}-b)^2} =$
$= kab(a-b)^2\frac{e^{k(a-b)t}}{(ae^{k(a-b)t}-b)^2}.$
Pro $a = b$ je

$$\int \tfrac{dz}{(z-a)^2} = \int (z-a)^{-2}dz = -\tfrac{1}{z-a},$$

takže

$$-\tfrac{1}{z-a} = kt + c.$$

Z počáteční podmínky dostaneme

$$-\tfrac{1}{0-a} = 0 + c \Longrightarrow c = \tfrac{1}{a}$$

a tedy

$$-\tfrac{1}{z-a} = kt + \tfrac{1}{a} \Longrightarrow z - a = -\tfrac{a}{akt+1},$$

takže

$$z(t) = a - \tfrac{a}{akt+1} = \tfrac{a^2kt}{akt+1}.$$

Pak rychlost reakce je

$$\frac{dz}{dt} = a^2k\frac{1(akt+1)-tak}{(akt+1)^2} = \frac{a^2k}{(akt+1)^2}.$$

Cvičení 6
Uvažujme homogenní chemickou reakci, v níž působí jedna látka. Nechť na počátku reakce, tj. pro $t = 0$, je koncentrace rovna $a > 0$. Je-li $a - x(t)$ koncentrace v čase t, je podle Wilhelmyho zákona rychlost reakce rovna

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Určete $x(t)$.

$[x(t) = a(1 - e^{-kt})]$

2.7 Hydrogensiřičitanový iont

Reakcí sulfátových a vodíkových iontů vznikne hydrogensiřičitanový iont. Reakční rovnice je

$$SO_3^{2-} + H^+ \longrightarrow HSO_3^-,$$

kde k_f a k_r jsou rychlosti přímé a zpětné reakce. Označme koncentrace: $a = \left[SO_3^{2-}\right]$, $b = [H^+]$ a $c = \left[HSO_3^-\right]$, dále nechť počáteční koncentrace jsou a_0, b_0 a c_0. Předpokládejme, že H^+ je mnohem více než ostatních dvou typů iontů, takže koncentraci b můžeme považovat za konstantu. Reakční rychlostní rovnice pro $c(t)$ je

$$\frac{dc}{dt} = k_f(a_0 - c)b - k_r(c_0 + c).$$

Jaká je koncentrace HSO_3^- v čase t?

Řešení: Jedná se o separovatelnou diferenciální rovnici.
Pravou stranu rovnice roznásobíme a vytkneme c.
Dostáváme

$$\frac{dc}{dt} = -(k_r + k_f b)c + k_f a_0 b - k_r c_0.$$

Integrací obou stran získáme

$$\ln|-(k_r + k_f b)c + k_f a_0 b - k_r c_0| = -(k_r + k_f b)t + K,$$

kde K je konstanta.
A po odlogaritmování je obecné řešení rovnice

$$c(t) = Ae^{-(k_r+k_f b)t} + \frac{k_f a_0 b - k_r c_0}{k_r + k_f b},$$

kde A je konstanta.

Cvičení 7
Předpokládejte, že během chemické reakce dojde k přeměně látky P v látku X. Nechť p je počáteční koncentrace látky P a $x(t)$ je koncentrace látky X v čase t. Pak koncentrace látky P v čase t je $p - x(t)$. Dále předpokládejte, že reakce probíhá autokatalyticky, tzn. že produkt reakce je současně katalyzátorem pro její uskutečnění. Proto $\frac{dx}{dt}$ je úměrné x i $p - x$ a platí $\frac{dx}{dt} = \alpha x(p - x)$, kde α je kladná konstanta. Určete $x(t)$, jestliže víte, že $x(0) = x_0$.

$[x(t) = \frac{px_0}{x_0 + (p - x_0)e^{-p\alpha t}}]$

2.8 Elektrický obvod

Ideální napěťový zdroj o konstantním napětí U napájí sériovou kombinaci rezistoru o odporu R ohmů a induktoru o indukčnosti L henry. Sestavte a vyřešte diferenciální rovnici pro proud $I(t)$ odebíraný ze zdroje.

Řešení: Podle druhého Kirchhoffova zákona je algebraický součet všech napětí v uzavřeném obvodu roven nule. Označme $I(t), t \geq 0$, proud v ampérech, který obvodem prochází. Pak $L\frac{dI}{dt}$ je napětí na induktoru a RI je napětí na rezistoru. Tedy

$$L\frac{dI}{dt} + RI - U = 0,$$

tj.

$$I'(t) + \frac{R}{L}I(t) = \frac{U}{L},\ I(0) = I_0,$$

kde I_0 je velikost proudu na počátku. Jde o nehomogenní lineární rovnici prvního řádu.
I. Pro homogenní rovnici máme

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I \Longrightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} \Longrightarrow \int \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int dt,$$

tj.

$$\ln|I| = -\tfrac{R}{L}t + c.$$

Po odlogaritmování a zahrnutí singulárního řešení $I = 0$ nakonec dostáváme

$$I(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}.$$

II. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$I(t) = k(t)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Po dosazení dostaneme

$$k'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - k(t)e^{-\frac{R}{L}t}\tfrac{R}{L} + \tfrac{R}{L}k(t)e^{-\frac{R}{L}t} = \tfrac{U}{L},$$

tj.

$$k'(t) = \tfrac{U}{L}e^{\frac{R}{L}t}.$$

Odtud

$$k(t) = \tfrac{U}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}dt = \left|\begin{array}{ccc} \frac{R}{L}t & = & s \\ \frac{R}{L}dt & = & ds \\ dt & = & \frac{L}{R}ds \end{array}\right| = \tfrac{U}{R}\int e^s ds = \tfrac{U}{R}e^s = \tfrac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t},$$

takže partikulární řešení je

$$I(t) = \tfrac{U}{R}e^{\frac{R}{L}t}e^{-\frac{R}{L}t} = \tfrac{U}{R}.$$

Partikulární řešení je zde vidět i jako konstantní řešení $\frac{dI}{dt} = 0$, pak $\frac{R}{L}I = \frac{U}{L}$ a tedy $I = \frac{U}{R}$.
Obecné řešení rovnice pak je

$$I(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + \tfrac{U}{R}.$$

Z počáteční podmínky dostáváme

$$I_0 = k + \tfrac{U}{R} \Longrightarrow k = I_0 - \tfrac{U}{R}.$$

Průběh proudu je tudíž popsán funkcí

$$I(t) = (I_0 - \tfrac{U}{R})e^{-\frac{R}{L}t} + \tfrac{U}{R}.$$

Cvičení 8
Cívka má indukčnost 53 mH a odpor 0,37 Ω. Za jak dlouho po připojení k baterii vzroste proud na polovinu své koncové ustálené hodnoty? (Této hodnoty nabývá pro $t \to \infty$.)

$[t = 0,1\text{s}]$

2.9 Složený úrok

Nechť částka A_0 je investována při úrokové míře $k\%$ za rok, přičemž úrok je připisován spojitě. Ukažte, že hodnota investic $A(t)$ po t letech je řešením lineární homogenní rovnice

$$\tfrac{dA}{dt} = \tfrac{k}{100}A,\ A(0) = A_0.$$

Řešení: Předpokládejme, že úrok je získáván s mírou $k\%$ za rok a je připisován n krát za rok. Pak množství $A_n(t)$, které je součtem úroku a jistiny, je na konci t let dáno vztahem

$$A_n(t) = A_0(1 + \tfrac{k}{n}\tfrac{1}{100})^{nt} = A_0[(1 + \tfrac{k}{n}\tfrac{1}{100})^n]^t.$$

Nyní je přirozené definovat

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_n(t).$$

Protože je

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\alpha}{n})^n = e^{\alpha}, \alpha \in R,$$

vyjde

$$A(t) = A_0[\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{k}{n}\frac{1}{100})^n]^t = A_0(e^{\frac{k}{100}})^t = A_0 e^{\frac{k}{100}t}.$$

To je ale právě řešení počáteční úlohy, jak se lze snadno přesvědčit dosazením.

Cvičení 9
Při počátečním vkladu 50 000 Kč do banky A, která úročí spojitě, naspořím po 3 letech částku 53 570 Kč. Banka B úročí ročně s roční úrokovou mírou 2,9%. Je spoření v bance B výhodnější? Pokud ano, spočtěte, po jaké době naspořím v bance B tolik, kolik v bance A po 3 letech při investici 50 000 Kč na začátku spoření. Dále spočtěte, o kolik více naspořím po 3 letech v bance B v porovnání s bankou A při počátečním vkladu 50 000 Kč.

[ano; $t \doteq 2,41$ roku $\to$ tedy po 3 letech; $907,40$ Kč]

2.10 Ryby v jezeře

Populace určitého druhu ryb žijících ve velkém jezeře v čase t může být popsána *Verhulstovou rovnicí* , jinak známou také jako *logistická rovnice:*

$$\frac{dN}{dt} = R(N)N = r(1 - \frac{N}{K})N,$$

kde míra růstu populace $R(N)$ je funkcí času a velikosti populace, r je konstanta určující míru růstu populace a kladná konstanta K je zde tzv. kapacita prostředí. V tomto modelu míra růstu r lineárně klesá v závislosti na velikosti populace. Pokud dosáhne populace určité velikosti rovné kapacitě prostředí, bude míra růstu nulová, pokud tuto kapacitu překročí, bude velikost populace klesat.
Řešte logistickou rovnici, víte-li, že populace v čase $t = 0$ je N_0.

Řešení: Užitím metody separace proměnných dostáváme

$$\int \frac{dN}{N(1-\frac{N}{K})} = r \int dt.$$

Řešení integrálu nalevo určíme užitím parciálních zlomků.
Dostáváme:

$$\int (\frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{1-\frac{N}{K}})dN = \ln \left| \frac{N}{1-\frac{N}{K}} \right|.$$

Pak obecným řešením rovnice je

$$\ln \left| \frac{N}{1-\frac{N}{K}} \right| = rt + c,$$

kde c je konstanta.
Po odlogaritmování pak dostaneme populaci jako funkci času

$$N(t) = \frac{KLe^{rt}}{Le^{rt}+K},$$

kde L je konstanta.
Užitím počáteční podmínky $N(0) = N_0$ nakonec získáváme řešení počátečního problému:

$$N(t) = \frac{N_0Ke^{rt}}{N_0e^{rt}+K-N_0}.$$

Cvičení 10
Spojitý růst populace lze popsat Malthusovým modelem. Tento model je však dosti nereálný, neboť umožňuje neomezený růst populace. Použít jej lze jen tehdy, pokud zkoumáme kratší časový interval a populace není příliš velká. Pro větší

populace již vhodný není a nahrazuje jej dokonalejší Verhulstův model, jehož řešením jsme se zabývali výše.
Tvar Malthusovy rovnice je $\frac{dX}{dt} = \beta X - \alpha X = rX$, kde β, α jsou konstanty vyjadřující míru reprodukce a míru vymírání a r je konstanta představující míru růstu populace. Užitím počáteční podmínky $X(0) = x_0$ určete řešení této rovnice a stanovte čas, za který se velikost populace zdvojnásobí.

$[X(t) = x_0 e^{rt}; T = \frac{\ln 2}{r}]$

2.11 Siločáry

Nechť $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ je nenulové rovinné silové pole, které je definované na otevřené množině Ω. Odvoďte diferenciální rovnici pro siločáry, víte-li, že tečna k siločáře je v každém bodě souhlasně kolineární s vektorem síly v tomto bodě.

Řešení: Nechť C je siločára, která má parametrické rovnice $(\varphi(t), \psi(t)), t \in J$, kde J je interval. Pak její tečný vektor v bodě $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)), t_0 \in J$, je $\vec{t}(x_0, y_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$. Víme, že má platit $\vec{t}(x_0, y_0) = \lambda \vec{F}(x_0, y_0)$, kde $\lambda \geq 0$. Tedy

$$(\varphi'(t_0), \psi'(t_0)) = \lambda(P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0)).$$

Protože $\vec{F} \neq \vec{0}$, nejsou P a Q současně nulové. Nechť např. $P(x_0, y_0) \neq 0$. Pak i $\varphi'(t_0) \neq 0$ a C je v okolí bodu x_0 grafem funkce proměnné x, tj. $y(x)$. Podle věty o derivaci funkce dané parametricky je

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{\lambda Q(x_0,y_0)}{\lambda P(x_0,y_0)} = \frac{Q(x_0,y_0)}{P(x_0,y_0)}.$$

Odtud dostáváme, že $y(x)$ vyhovuje rovnici

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0.$$

Analogicky se zváží případ $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Předchozí rovnice se obvykle zapisuje ve tvaru

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}.$$

Cvičení 11
Určete silové pole $F(x, y)$, jestliže siločáry jsou popsány rovnicí $(\frac{1}{y} + 2x)dx - (\frac{x}{y^2} + 1)dy = 0$.

$[F(x, y) = \frac{x}{y} + x^2 - y]$

Závěr

Závěrem bych chtěla podotknout, že tato práce rozhodně nepokrývá veškerý rozsah aplikací diferenciálních rovnic. V práci jsou totiž zahrnuty pouze diferenciální rovnice 1. řádu, nenalezneme zde tedy diferenciální rovnice 2. a vyšších řádů, které mají další velmi rozsáhlé aplikace. Vždyť jen ve fyzice, jedné z mnoha věd opírajících se o diferenciální rovnice, je většina fyzikálních zákonů formulována pomocí těchto rovnic, jejichž použití vede k celé řadě dalších aplikací, a proto bych se touto problematikou ráda zabývala i ve své diplomové práci, kde bych chtěla navázat na sbírku úloh aplikacemi teorie obyčejných diferenciálních rovnic vyšších řádů a systémů obyčejných diferenciálních rovnic.

Literatura

[1] Kuben J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie, Brno, 1998.

[2] Fulford G., Forrester P., Jones A.: *Modelling with differential and difference equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[3] Lynch S.: *Dynamical systems with applications using MATLAB*, Birkhäuser, Boston, 2004.

[4] Boyce W. E., DiPrima R. C.: *Introduction to differential equations*, John Willey Sons, Inc., New York-London-Sydney-Toronto, 1970.

[5] Barnes B., Fulford G.: *Mathematical modelling with case studies: a differential equation approach using Maple*, Taylor Francis, London, 2002.

[6] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Fyzika*, Vutium-Prometheus, Brno-Praha, 2000.

[7] Greguš M., Švec M., Šeda V.: *Obyčajné diferenciálne rovnice*, Alfa, Bratislava, 1985.

[8] Radochová D., Zemanová J.: *Diferenciální rovnice*, Vojenská akademie, Brno, 1970.