KOMENTÁŘE A OPRAVY K TEXTU SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA I MARTINA KOLÁŘE

JIŘÍ ZELINKA

1. Fourierovy řady

str.7:

Výpočet koeficientů pro komplexní tvar Fourierovy řady vychází ze snadno odvoditelného vztahu

$$(e^{ikx}, e^{imx}) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 2\pi & m = k \\ 0 & m \neq k \end{cases}$$

Pak není problém zjistit, že

$$c_k = (f(x), e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

str.10:

Zhruba ve třetině strany odspodu ve vztahu, který končí $= \frac{1}{2}$ je za integrálem navíc člen $f(x+u)$.

Na konci důkazu Dirichletovy věty o bodové konvergenci dostáváme vlastně Fourierův koeficient pro funkci g, kterou by pro úplnou korektnost bylo ještě potřeba dodefinovat na zbytku intervalu (např. nulovou hodnotou). Riemannovo-Lebesgueovo lemma, které v dalším textu chybí, říká, že Fourierovy koeficienty konvergují k nule pro rostoucí n. Tato skutečnost ovšem bezprostředně plyne z L^2 teorie, neboť součet druhých mocnin absolutních hodnot Fourierových koeficientů je konečný.

str.13:

Besselova nerovnost také říká, že posloupnost Fourierových koeficientů leží v prostoru l^2

str.14:

V posledním vztahu v důkazu Věty 1.3.6 mají být meze v sumě od $m+1$ do n.

V Lemmatu 1.3.7 má sčítací index k v sumě začínat nulou.

str.16:

Mezi důležité vlastnosti symetrických operátorů patří ta, že jeho vlastní hodnoty jsou reálné. Důkaz tohoto tvrzení je poměrně jednoduchý.

str.18:

Operátor, kterým se definují Legendrovy polynomy, má i vlastní hodnotu rovnou nule. Její vlastní funkce je pak funkce $c_1 \log \frac{x+1}{x-1} + c_2$, která na krajích intervalu $(-1, 1)$ jde k $\pm\infty$. Dá se dokázat, že jedinými ohraničenými vlastními funkcemi tohoto operátoru jsou polynomy. Pak se lehce odvodí, pro jaké vlastní hodnoty tyto polynomy existují.

Ověření, že funkce $\frac{d}{dx^n}(x^2-1)^n$ skutečně splňují operátorovou diferenciální rovnici není zcela jednoduché. Dá se to dokázat např. s použitím funkce $\omega_{n+1}(x) = \frac{d}{dx^n}(x^2-1)^{n+1}$, přičemž si dvojím způsobem vyjádříme její druhou derivaci a oba vztahy porovnáme.

Když už je řeč o Legendrových polynomech, můžeme uvést i rekurentní vztah, který se zpravidla používá pro jejich výpočet:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

str.20:

V předpokladech Fejérovy věty chybí $f(-\pi) = f(\pi)$. Bez tohoto předpokladu není možné spojitě periodicky rozšířit vně intervalu $[-\pi, \pi]$.

str.26:

V Lemmatu 2.1.2 je spojitost funkce f dokonce stejnoměrná.

str.31:

Ve třetím vztahu shora na konci má být ξ místo x.

str.32:

Druhý vztah dospodu pro $\hat{\phi}$ lze snadno dokázat použitím definičního vztahu pro Fourierovu transformaci. Vyhneme se tak problémům se současným posunem argumentu a jeho násobením.

str.33:

V integrálu v Definici 2.2.4 má být dx místo $d\xi$.

str.36:

V důkazu Centrální limitní věty má být na dvou místech $\xi \to 0$ místo $\xi \to \infty$

str.45:

V posledním vztahu před sekcí 4.3 chybí znaménko $-$.

Diracova delta funkce δ_0 je distribuce, pro níž $\delta_0(\phi) = \phi(0)$, což na prostoru funkcí $C_0^\infty(\mathbb{R})$ je spojitý lineární funkcionál. Je jasné, že tento funkcionál není reprezentován žádnou „slušnou" funkcí g, pro níž by platilo $\delta_0(\phi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)dx$. Nicméně hodnotu $\phi(0)$ dostaneme jako limitní hodnotu pro $\varepsilon \to \infty$ konvoluce ϕ s nějakou vhodnou aproximací identity (viz sekce 2.2). Proto si lze Diracovu funkci představit jako limitu aproximace identity pro $\varepsilon \to \infty$, což by byla funkce všude nulová s nekonečnou hodnotou v nule, přičemž její integrál přes celou reálnou osu je roven jedné.