Drsná matematika

Martin Panák, Jan Slovák

Pokus o učebnici pro začínající studenty přírodních věd, informatiky apod., přibližující podstatnou část matematiky v rozsahu čtyř semestrálních přednášek. Text by měl být dokončen a vydán v roce 2013.

KAPITOLA 1

Přehršel různorodých úloh

„hodnota, změna, poloha“
– co to je a jak to uchopit?

Smyslem první kapitoly této učebnice je uvést čtenáře do fascinujícího světa matematického myšlení, a to na co nejkonkrétnějších příkladech modelování reálných situací pomocí abstraktních objektů a souvislostí. Zároveň projdeme několik témat a postupů, ke kterým se postupně budeme vracet, a v závěru kapitoly se budeme chvíli věnovat samotnému jazyku matematiky (se kterým do té doby budeme zacházet velmi intuitivně).

O co jednodušší jsou východiska a objekty, se kterými zde budeme pracovat, o to složitější je pochopit do důsledku jemnosti použitých nástrojů a postupů. I to je důvod, proč se budeme k tématům postupně vracet.

Pokud se tedy přecházení od tématu k tématu bude jevit z počátku jako chaotické, snad se to postupně spraví při návratech v pozdějších kapitolách.

Začneme s tím nejjednodušším – obyčejnými čísly.

1. Čísla a funkce

1.1. Číselné obory. Všichni jsme jistě zvyklí počítat s přirozenými, celými, racionálními a reálnými čísly a máme také představy, jak jsou uspořádány do vztahů „menší–větší“. Je také docela zřejmé, že mezi každými dvěmi celými čísly n a $n+1$ je spousta racionálních čísel $n < q < n+1$. Jak jsou na tom ale čísla reálná? Potřebujeme je vůbec? I tady je patrně odpověď dobře známá: již staří Řekové věděli, že předepíšeme-li plochu čtverce $a^2 = 2$, pak nelze najít racionální a, které by předpisu vyhovovalo. Ověřit to můžeme za předpokladu, že známe následující vlastnost jednoznačného rozkladu přirozených čísel na prvočísla:

Tvrzení. *Každé přirozené číslo n lze jednoznačným způsobem vyjádřit jako součin mocnin* $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$, *kde všechna čísla* $p_1, \dots, p_k$ *jsou dělitelná pouze sama sebou a jedničkou.*

Skutečně, pokud by platilo $(p/q)^2 = 2$ pro přirozená čísla p a q, pak tedy $p^2 = 2q^2$. Na levé straně máme v rozkladu na prvočísla 2^r se sudým r (případně $r = 0$), na pravé straně ale bude vždy mocnina dvojky lichá. To je spor s naším tvrzením a tedy předpoklad nemůže platit a žádné racionální číslo nemůže mít za svoji druhou mocninu dvojku.

Vidíme tedy, že již hledání odmocnin nás nutí k rozšíření racionálních čísel na reálná. Dokonce snadno ukážeme

1.2. *Nechť t a m jsou kladná celá čísla. Ukažte, že číslo* $\sqrt[m]{t}$ *je buď přirozené, nebo není racionální.*

Řešení. Nechť uvažovaná odmocnina není přirozená. Ukážeme, že potom není ani racionální. Protože předpokládáme, že $\sqrt[m]{t}$ není přirozená, tak existuje prvočíslo r a přirozené s taková, že r^s dělí t, r^{s+1} nedělí t a m nedělí s (budeme psát $\operatorname{ord}_r t = s$) Jako v předchozím případě předpokládejme nyní, že by existovala přirozená p, q tak, že $\sqrt[m]{t} = \frac{p}{q}$. Vynásobením rovnice číslem q a umocněním na číslo m dostáváme $t \cdot p^m = q^m$. Pro libovolnou m-tou mocninu a přirozeného čísla platí, že $\operatorname{ord}_r a$ je násobkem m. Proto $\operatorname{ord}_r L$ není násobkem m (dává stejný zbytek po dělení m jako $\operatorname{ord}_r t$), kdežto $\operatorname{ord}_r R$ je dělitelné m, což není možné. Náš předpoklad tedy neplatí a číslo $\sqrt[m]{t}$ nemůže být racionální, pokud není přirozené. □

Trochu více si o reálných číslech řekneme později.

1.3. Komplexní čísla.

Stačí nám aspoň pro elementární počty reálná čísla? Je lehké si uvědomit, že nikoliv: Úvahu o racionalitě druhé odmocniny v minulém odstavci můžeme formulovat jako dotaz na existenci řešení rovnice

$$x^2 = 2$$

v oboru racionáních čísel. Ověřili jsme, že řešení nemá, v oboru reálných čísel už ale ano. Co když napíšeme obecněji

$$x^2 = b$$

a ptáme se pořešení teď? Tato rovnice má vždy řešení x v oboru reálných čísel, pokud je b nezáporné. Jestliže je $b = -1$, pak ale zjevně takové reálné x existovat nemůže. Podbízí se „přidat“ k reálným číslům nové číslo i, tzv. imaginární jednotku a zkusit dát dohromady rozšíření číselného oboru $\mathbb{R}$ reálných čísel tak, aby byly splněny všechny vlastnosti, které od skalárů očekáváme.

Kupodivu to skutečně jde tím nejjednodušším způsobem: jistě budeme chtít umět nové číslo i násobit reálnými čísly a budeme chtít umět přičítat i skutečná reálná čísla. Nutně proto musíme v novém číselném oboru *komplexních čísel* $\mathbb{C}$ pracovat s formálními výrazy $z = a + i\,b$. Reálnému číslu a říkáme *reálná složka* komplexního číla z, reálnému číslu b pak *imaginární složka*. Aby byly splněny vlatnosti asociativity a distributivity, zavedeme sčítání tak, že se nezávisle sčítají reálné složky a imaginární složky a násobení tak, jak by se násobily dvojčleny reálných čísel s jediným dodatečným pravidlem $i^2 = -1$, tj.

$$(a + i\,b) + (c + i\,d) = (a + c) + i\,(b + d), \tag{1.1}$$

$$(a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = (ac - bd) + i\,(bc + ad). \tag{1.2}$$

Ověřte si pečlivě, že skutečně platí všechny vlastnosti KG1-4, O1-4 a P skalárů, jde tedy o pole (komutativní těleso) skalárů. Nulou je samozřejmě číslo $0 + i\,0$, jedničkou číslo $1 + i\,0$, které opět píšeme jako 0 a 1.

1.4. Komplexní čísla jako body v rovině.

Tak jak si jistě představujeme reálná čísla jako body přímky všech reálných čísel, můžeme si dobře představit komplexní čísla $z = a+i\,b$ jako body v rovně o souřadnicích (a, b). Imaginární jednotka i pak odpovídá bodu (0, 1) a všimněme si, že vynásobení jakéhokoliv čísla $z = a + i\,b$ imaginární jednotkou dává výsledek

$$i \cdot (a + i\,b) = -b + i\,a$$

tj. v interpertaci v rovině jde o otočení bodu z o pravý úhel proti směru hodinových ručiček. Další geometrická operace, která má jednoduché vyjádření je symetrie podle osy reálných čísel:

$$z = (a + i\,b) \mapsto (a - i\,b) = \bar{z}.$$

Hovoříme o číslu $\bar{z}$ komplexně sdruženém k z. Všimněme si dále, že součin

$$z\bar{z} = (a^2 + b^2) + i\,(-ab + ba) = a^2 + b^2$$

je vždy reálné číslo a dává nám kvadrát vzdálenosti čísla z od počátku 0. Platí tedy $|z|^2 = z\bar{z}$.

Komplexní čísla tvaru $z = \cos\varphi + i\ \sin\varphi$, kde φ je reálný parametr udávající úhel mezi reálnou přímkou a spojnicí z s počátkem, popisují právě všechny body na jednotkové kružnici v komplexní rovině. Každé nenulové číslo z pak lze právě jedním způsobem napsat jako

$$z = |z|(\cos\varphi + i\ \sin\varphi).$$

Tento výraz nazýváme *goniometrický tvar komplexního čísla z*.

Standardní vzorce pro goniometrické funkce pak jsou ekvivalentní tvrzení

Tvrzení (Moivrova věta)**.**

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

kde φ_i jsou argumenty čísel z_i.

Komplexní čísla nejsou pouze nástrojem, abychom získali „divná“ řešení kvadratických rovnic, ale jsou potřeba i k tomu, abychom určili reálná řešení kubických rovnic. Jak vyjádřit řešení kubické rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

pomocí reálných koeficientů a, b, c? Ukažme si metodu, na kterou přišli v šestnáctém století pánové Ferro, Cardano, Tartaglia a možná další. Zaveďme substituci $x := t - a/3$ (abychom odstranili kvadratický člen v rovnici), dostaneme rovnici:

$$t^3 + pt + q = 0,$$

kde $p = b - a^2/3$ a $q = c + (2a^3 - 9ab)/27$. Nyní zaveďme neznámé u, v splňující podmínky $u + v = t$ a $3uv + p = 0$. Dosazením první podmínky do původní rovnice dostáváme

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0,$$

dosazením druhé pak

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

což je kvadratická rovnice v neznámé $s = u^3$. Máme tedy

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

Celkem pak zpětným dosazením

$$x = -p/3u + u - a/3.$$

Ve výrazu pro u je se vyskytuje třetí odmocnina a abychom dostali všechna tři řešení, je nutno pracovat i s komplexními odmocninami. Rovnice $x^3 = a$, $a \neq 0$, s neznámou x má totiž právě tři řešení v oboru komplexních čísel (Základní věta algebry, viz ??). Všechna tato řešení nazýváme třetí odmocninou z čísla a. Je tedy výraz $\sqrt[3]{a}$ v komplexním oboru trojznačný. Pokud se chce přisoudit výrazu $\sqrt[3]{a}$ jednoznačný význam, tak se za třetí odmocninu uvažuje řešení s nejmenším argumentem.

Navíc ještě dodejme, že při popsaném postupu se mohlo vyskytnout dělení nulou. V tom případě je nutno použít jiného (většinou snadnějšího) postupu.

1.5. *Řešte rovnici*

$$x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Řešení. Jak snadno zjistíme, tak rovnice nemá racionální kořeny (metody si objasníme v části **??**). Dosazením do získaných vztahů získáme $p = b - a^2/3 = -7/3$, $q = -7/27$, pro u pak dostáváme

$$u = \frac{\sqrt[3]{28 \pm 12\sqrt{-147}}}{6},$$

kde můžeme teoreticky volit až šest možností pro u (dvě volby znaménka plus či mínus a k tomu tři nezávislé volby třetí odmocniny). Jak však snadno nahlédneme, dostáváme pro x pouze tři různé hodnoty. Dosazením do (1) pak jeden z kořenů má tvar

$$\frac{14}{\sqrt[3]{3(28 - 84i\sqrt{3})}} + \frac{\sqrt[3]{28 - 84i\sqrt{3}}}{6} - \frac{1}{3} \doteq 1,247,$$

obdobně pro ostatní dva kořeny (přibližně $0,445$ a $-1,802$). Jak jsme předeslali, vidíme, že i když se ve vzorcích pro kořeny vyskytují komplexní čísla, tak výsledek je reálný. □

Závěrem uveďme ještě jeden příklad ukazující, že „divné“ skaláry se chovají divně:

1.6. Nenulový mnohočlen s nulovými hodnotami

Najděte nenulový mnohočlen jedné neznámé s koeficienty v $\mathbb{Z}_7$*, tj. výraz typu* $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$*,* $a_i \in \mathbb{Z}_7$*,* $a_n \neq 0$*, takový, že na množině* $\mathbb{Z}_7$ *nabývá pouze nulových hodnot (tj. dosadíme-li za* x *libovolný z prvků* $\mathbb{Z}_7$ *a výraz v* $\mathbb{Z}_7$ *vyčíslíme, dostaneme vždy nulu).*

Řešení. Při konstrukci tohoto mnohočlenu se opřeme o Malou Fermatovu větu, která říká, že pro livovolné prvočíslo p a číslo a s ním nesoudělné platí:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p). \tag{1.3}$$

Hledaný polynom je tedy například polynom $x^7 - x$ (polynom $x^6 - 1$ by neměl nulovou hodnotu v čísle 0). □

2. Kombinatorika

V této kapitole si budeme hrát s přirozenými čísly, která budou popisovat různé nedělitelné předměty nacházející se v našem životním prostoru a budeme se zabývat jak spočítat počet jejich uspořádání, přeuspořádání, výběrů a tak podobně. Ve velké většině takovýchto problémů lze vystačit se „selským rozumem". Stačí vhodně používat pravidel *součtu* a *součinu*, která si ukážeme na následujících příkladech:

1.1. Maminka chce Jeníkovi a Mařence rozdělit pět hrušek a šest jablek. Kolika způsoby to může udělat? (Hrušky mezi sebou považujeme za nerozlišitelné, stejně tak jablka. Připouštíme, že některé z dětí nic nedostane.)

Řešení. Pět hrušek samostatně může maminka rozdělit šesti způsoby. (Rozdělení je určeno tím, kolik hrušek dá Jeníkovi, zbytek připadne Mařence.) Šest jablek pak nezávisle sedmi způsoby. Podle pravidla součinu pak obě ovoce současně může rozdělit $6 \cdot 7 = 42$ způsoby. □

1.7. *Určete počet čísel čtyřciferných čísel, která začínají cifrou* 1 *a nekončí cifrou* 2*, nebo končí cifrou* 2 *a nezačínají cifrou* 1*.*

Řešení. Množina uvažovaných čísel je složená ze dvou disjunktních množin, totiž čísel, která začínají cifrou 1 a nekončí cifrou 2 (první množina) a čísel, která nezačínají cifrou 1 a končí cifrou 2. Celkový počet popsaných čísel dostaneme podle pravidla součtu tak, že sečteme počty čísel v těchto dvou množinách. V první z těchto množin máme čísla tvaru „1XXY", kde X je libovolná cifra a Y je libovolná číslice mimo dvojky. Můžeme tedy provést deset voleb druhé cifry, nezávisle na tom můžeme provést deset voleb třetí cifry a opět nezávisle devět voleb poslední cifry. Tyto tři nezávislé volby jednoznačně určují dané číslo a podle pravidla součinu máme tedy $10 \cdot 10 \cdot 9 = 900$ takových čísel. Obdobně ve druhé skupině máme $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$ čísel (na první cifru máme pouze osm možností, neboť číslo nemůže začínat nulou a jedničku máme zakázánu). Celkem podle pravidla součtu je $900 + 800 = 1700$ uvažovaných čísel. □

V následujících příkladech už budeme při řešení používat pojmů kombinace, permutace, variace (případně s opakováním), které jsme definovali.

1.8. *Určete počet čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých cifer.*

Řešení. Dvě různé cifry použité na zápis můžeme vybrat $\binom{10}{2}$ způsoby, ze dvou vybraných cifer můžeme sestavit $2^4 - 2$ různých čtyřciferných čísel (dvojku odečítáme za dvě čísla složená pouze z jedné cifry). Celkem máme $\binom{10}{2}(2^4-2)=630$ čísel. Nyní jsme ale započítali i čísla začínající nulou. Těch je $\binom{9}{1}(2^3-1)=63$. Celkově dostáváme $630-63=567$ čísel. □

1.9. *Určete počet sudých čtyřciferných čísel sestavených z právě dvou různých cifer.*

Řešení. Obdobně jako v předchozím příkladu se nejprve nebudeme ohlížet na cifru nula. Dostaneme tak $\binom{5}{2}(2^4-2)+5\cdot 5(2^3-1)$ čísel (nejprve počítáme čísla pouze ze sudých cifer, druhý sčítanec udává počet sudých čtyřciferných čísel složených ze sudé a liché cifry). Opět musíme odečíst čísla začínající nulou, těch je $(2^3-1)4+(2^2-1)5$. Hledaný počet cifer tak je

$$\binom{5}{2}(2^4-2)+5\cdot 5(2^3-1)-(2^3-1)4-(2^2-1)5=272.$$

□

1.10. *Kolika způsoby mohla skončit tabulka první fotbalové ligy, víme-li o ní pouze, že alespoň jeden z týmů z dvojice Ostrava, Olomouc je v tabulce za týmem Brna. (ligu hraje* 16 *mužstev)*

Řešení. Nejprve určíme tři místa, na kterých se umístily celky Brna, Olomouce a Ostravy. Ty lze vybrat $c(3,16)=\binom{16}{3}$ způsoby. Z šesti možných pořadí zmíněných tří týmů na vybraných třech místech vyhovují podmínce ze zadání čtyři. Pro libovolné pořadí těchto týmů na libovolně vybraných třech místech pak můžeme nezávisle volit pořadí zbylých 13 týmů na ostatních místech tabulky. Podle pravidla součinu je tedy hledaný počet tabulek roven

$$\binom{16}{3}\cdot 4\cdot 13! = 13948526592000.$$

□

1.11. *Kolika způsoby lze do tří různých obálek rozmístit pět shodných stokorun a pět shodných tisícikorun tak, aby žádná nezůstala prázdná?*

Řešení. Nejdříve zjistíme všechna rozmístění bez podmínky neprázdnosti. Těch je podle pravidla součinu (rozmísťujeme nezávisle stokoruny a tisícikoruny) $C(3,5)^2=\binom{7}{2}^2$. Odečteme postupně rozmístění, kdy je právě jedna obálka prázdná, a poté kdy jsou dvě obálky prázdné.

Celkem $C(3,5)^2 - 3(C(2,5)^2 - 2) - 3 = \binom{7}{2}^2 - 3(6^2 - 2) - 3 = 336.$ □

1.12. *Určete počet různých vět, které vzniknou přesmyčkami v jednotlivých slovech věty „Skokan na koks" (vzniklé věty ani slova nemusejí dávat smysl).*

Řešení. Určíme nejprve počty přesmyček jednotlivých slov. Ze slova „skokan" dostaneme $6!/2$ různých přesmyček (permutace s opakováním $P(1,1,1,1,2)$), obdobně ze slova „na" dvě a ze slova „koks" $4!/2$. Celkem podle pravidla součinu $6!4!/4 = 4320$. □

1.13. *Kolik existuje různých přesmyček slova „krakatit" takových, že mezi písmeny „k" je právě jedno jiné písmeno.*

Řešení. V uvažovaných přesmyčkách je šest možností, jak umístit skupinu dvou „k". Fixujeme-li pevně místa pro dvě písmena „k", pak ostatní písmena můžeme rozmístit na zbylých šest míst libovolně, tedy $P(1,1,2,2)$ způsoby. Celkem podle pravidla součinu je hledaný počet

$$6 \cdot P(1,1,2,2) = \frac{6 \cdot 6!}{2 \cdot 2} = 1080.$$

□

1.14. *Kolika způsoby můžeme do pěti různých důlků vybrat po jedné kouli, vybíráme-li ze čtyř bílých, čtyř modrých a tří červených koulí?*

Řešení. Nejprve řešme úlohu v případě, že bychom měli k dispozici alespoň pět koulí od každé barvy. V tomto případě se jedná o volný výběr pěti prvků ze tří možností, tedy o variace s opakováním třetí třídy z pěti prvků (viz odstavec 2.4. učebních textů). Máme

$$V(3,5) = 3^5.$$

Nyní odečteme ty výběry, ve kterých se vyskytují buď pouze koule stejné barvy (takové výběry jsou tři), nebo právě čtyři koule červené (takových výběrů je $10 = 2 \cdot 5$; nejprve vybereme barvu koule, která nebude červená – dvě možnosti – a poté důlek, ve kterém bude – pět možností). Celkem tedy máme

$$3^5 - 3 - 10 = 230$$

možných výběrů. □

1.15. *Kolika způsoby lze rozestavit n shodných věží na šachovnici $n \times n$ tak, aby bylo každé neobsazené pole ohrožováno některou z věží?*

Řešení. Daná rozestavení jsou sjednocením dvou množin: množiny rozestavení, kdy je alespoň v jednom řádku jedna věž (tedy v každém řádku právě jedna; tato množina má n^n prvků – v každém řádku vybereme nezávisle jedno pole pro věž) a množiny rozestavení, kdy je v každém sloupci alespoň (tedy právě) jedna věž (stejnou úvahou jako u první množiny má tato množina rovněž n^n prvků). Průnik těchto množin pak má $n!$ prvků (místa pro věže vybíráme postupně od prvního řádku – tam máme n možností, ve druhém pak již pouze $n-1$ možností – jeden sloupec je již obsazen, ...). Podle principu inkluze a exkluze je počet hledaných rozestavení:

$$2n^n - n!.$$

□

1.16. *Kolika způsoby mohla skončit tabulka první fotbalové ligy, víme-li o ní, že žádné dva z trojice týmů Zbrojovka Brno, Baník Ostrava a Sigma Olomouc spolu v tabulce „nesousedí“?(Ligu hraje* 16 *mužstev.)*

Řešení. *První způsob.* Hledaný počet spočítáme podle principu inkluze a exkluze tak, že od počtu všech možných tabulek odečteme počet tabulek, ve kterých sousedí některá dvojice z uvedených tří týmů a odečteme počet těch tabulek, ve kterých sousedí všechny tři týmy. Hledaný počet tedy je

$$16! - \binom{3}{2} \cdot 2! \cdot 15! + 3! \cdot 14! = 13599813427200.$$

Jiné řešení. Zmíněné tři týmy budeme považovat za „oddělovače“. Zbylých třináct týmů musíme rozdělit tak, aby mezi libovolnými dvěma oddělovači byl alespoň jeden tým. Navíc zbylé týmy můžeme mezi sebou nezávisle permutovat a rovněžtak oddělovače. Celkem tedy dostáváme

$$\binom{14}{3} \cdot 13! \cdot 3! = 13599813427200$$

možností. □

1.17. *Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

v množině

a) nezáporných
b) kladných

celých čísel.

Řešení. a) Každé řešení $(r_1, \ldots, r_k)$, $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$ můžeme jednoznačně zašifrovat jako posloupnost jedniček a nul, ve které napíšeme nejprve r_1 jedniček, pak nulu, pak r_2 jedniček, nulu a tak dále. Posloupnost bude celkem obsahovat n jedniček a $k-1$ nul. Každá taková posloupnost navíc zřejmě určuje nějaké řešení dané rovnice. Je tedy řešení tolik, kolik je posloupností, tedy $\binom{n+k-1}{n}$.

b) Hledáme-li řešení v oboru kladných celých čísel, tak si všimněme, že přirozená čísla $x_1, \dots x_k$ jsou řešením dané rovnice, právě když jsou celá nezáporná čísla $y_i = x_i - 1$, $i = 1, \dots, k$, řešením rovnice

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_k = n - k.$$

Těch je podle první části řešení $\binom{n-1}{k-1}$. □

1.18. *Kolik existuje přesmyček slova PROBLÉM takových, že v nich*

a) písmena B a R stojí vedle sebe,
b) písmena B a R nestojí vedle sebe.

Řešení. a) Dvojici písmen B a R můžeme považovat za jedno nedělitelné dvojpísmeno. Celkem tedy máme k dispozici šest různých písmen a šestipísmených slov složených z různých písmen je 6!. V našem případě však tento počet musíme ještě vynásobit dvěma, neboť naše dvojpísmeno může bít jak BR tak RB. Celkem dostáváme $2 \cdot 6!$ různých přesmyček.

b) $7! - 2 \cdot 6!$ (doplněk části a) do počtu všech sedmipísmenných slov složených z různých písmen. □

1.19. *Kolik existuje přesmyček slova BAZILIKA takových, že se v nich střídají souhlásky a samohlásky?*

Řešení. Protože souhlásky i samohlásky jsou v daném slově čtyři, tak se v každé takové přesmyčce střídají pravidelně souhlásky a samohlásky. Slovo tedy může být typu $BABABABA$ nebo $ABABABAB$. Na daných pěti místech můžeme pak samohlásky permutovat mezi sebou ($P_o(2, 2) = \frac{4!}{2!2!}$ způsoby) a nezávisle na tom i souhlásky (4! způsoby). Hledaný počet je pak dle pravidla součinu $2 \cdot 4! \cdot \frac{4!}{2!2!} = 288$. □

1.20. *Kolika způsoby lze rozdělit 9 děvčat a 6 chlapců do dvou skupin tak, aby každá skupina obsahovala alespoň dva chlapce?*

Řešení. Rozdělíme zvlášť děvčata a chlapce: $2^9(2^5 - 7) = 12800$. □

1.21. *Materiál je tvořen pěti vrstvami, každá z nich má vlákna v jednom z daných šesti směrů. Kolik takových materiálů existuje? Kolik je jich takových, že dvě sousední vrstvy nemají vlákna ve stejném směru?*

Řešení. 6^5 a $6 \cdot 5^5$. □

3. Diferenční rovnice

Diferenční rovnice (jinak řečeno též rekurentní vztahy) jsou vztahy mezi členy nějaké posloupnosti, přičemž následující člen je dán pomocí členů předchozích. Vyřešit diferenční rovnici pak znamená najít explicitní vzorec pro n-tý (libovolný) člen dané posloupnosti. Rekurentní vztah nám totiž po zadání několika prvních členů posloupnosti zadává n-tý člen přímo pouze pomocí postupného vyčíslení všech předchozích členů.

Pokud je následující člen posloupnosti určen pouze předchozím členem, hovoříme o diferenčních rovnicích prvního řádu. S nimi se můžeme v životě opravdu setkat, například, pokud si chceme zjistit dobu splácení nějaké půjčky při pevné měsíční splátce, nebo naopak chceme zjistit výši měsíční splátky, zadáme-li si dobu, za kterou chceme půjčku splatit.

1.22. *Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?*

Řešení. Označme Mirkovu měsíční splátku S. Po prvním měsíci splatí Mirek S korun, z nichž část půjde na vlastní splátku, část na splacení úroku. Částku, kterou bude Mirek dlužit po uplynutí k měsíců označme d_k. Po prvním měsíci bude Mirek dlužit

$$d_1 = 300000 - S + \frac{0,06}{12} \cdot 300000. \tag{1.4}$$

Obecně po uplynutí k-tého měsíce

$$d_k = d_{k-1} - S + \frac{0,06}{12} d_{k-1}. \tag{1.5}$$

Podle vztahu (**??**) je d_k dáno následovně

$$d_k = \left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^k 300000 - \left[\left(1 + \frac{0,06}{12}\right)^k - 1\right]\left(\frac{12S}{0,06}\right). \tag{1.6}$$

Splacení po třech letech se rovná podmínce $d_{36} = 0$, odkud dostáváme

$$S = 300000 \left(\frac{\frac{0,06}{12}}{1 - (1 + \frac{0,06}{12})^{-36}}\right) \doteq 9127. \tag{1.7}$$

□

Všimněme si, že rekurentní vztah (1.5) můžeme použít na náš příklad pouze tak dlouho, dokud budou všechna $y(n)$ kladná, tj. dokud bude Mirek skutečně něco dlužit.

Otázka. *Jak dlouho by Mirek auto splácel, kdyby chtěl měsíčně splácet 5000 Kč?*

Řešení. Při označení $q = 1,005$, $c = 300000$ nám podmínka $d_k = 0$ dává vztah

$$q^k = \frac{200S}{200S - c},$$

jehož logaritmováním obdržíme

$$k = \frac{\ln 200S - \ln(200S - c)}{\ln g},$$

což pro $S = 5000$ dává přibližně $k = 71,5$, tedy splácení půjčky by trvalo šest let (poslední splátka by nebyla plných 5 000 Kč). □

Obdobným příkladem, kde se můžeme setkat s diferenčními rovnicemi je při výpočtu naspořené sumy při stavebním spoření:

1.23. *Kolik peněz naspořím na stavebním spoření za pět let, vkládám-li 3000 Kč měsíčně (vždy k 1. v měsíci), vklad je úročen roční úrokovou mírou 3% (úročení probíhá jednou za rok) a od státu obdržím ročně příspěvek* 1500 *Kč? (státní příspěvek se připisuje vždy až 1.května následujícího roku)*

Řešení. Označme množství naspořených peněz po n-tém roce jako x_n. Potom dostáváme (pro $n > 2$) následující rekurentní formuli (navíc předpokládáme, že každý měsíc je přesně dvanáctina roku)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1,03(x_n) + 36000 + 1500 + \\ &\underbrace{0,03 \cdot 3000 \left(1 + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{1}{12}\right)}_{\text{úroky z vkladů za aktuální rok}} + \\ &+ \underbrace{0,03 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1500}_{\text{úrok ze státního příspěvku připsaného v aktuálním roce}} = \\ &= 1,03(x_n) + 38115. \end{aligned}$$

Tedy

$$x_n = 38115 \sum_{i=0}^{n-2} (1,03)^i + (1,03)^{n-1} x_1 + 1500,$$

přičemž $x_1 = 36000 + 3000\left(1 + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{1}{12}\right) = 36585$, celkem

$$x_5 = 38115\left(\frac{(1,03)^4 - 1}{0,03}\right) + (1,03)^4 \cdot 36585 + 1500 \doteq 202136.$$

□

1.2. Poznámka. Ve skutečnosti úročení probíhá podle počtu dní, které jsou peníze na účtu. Obstarejte si skutečný výpis ze stavebního spoření, zjistěte si jeho úročení a zkuste si spočítat připsané úroky za rok. Porovnejte je se skutečně připsanou sumou. Počítejte tak dlouho, dokud sumy nebudou souhlasit . . .

1.24. *Určete posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, která vyhovuje následuje následujícímu rekurentnímu vztahu*

$$y_{n+1} = \frac{3y_n}{2} + 1,\ n \geq 1,\ y_1 = 1.$$

Řešení. $y_n = 2(\frac{3}{2})^n - 2$. □

Ukážeme „populační model“, který je příkladem na rekurentní rovnici druhého řádu:

1.25. Fibonacciho posloupnost. *Na začátku jara přinesl čáp na louku dva čerstvě narozené zajíčky, samečka a samičku. Samička je schopná od dvou měsíců stáří povít každý měsíc dva malé zajíčky (samečka a samičku). Nově narození zajíci plodí potomky po jednom měsíci a pak každý další měsíc. Každá samička je březí jeden měsíc a pak opět porodí samečka a samičku. Kolik párů zajíců bude na louce po devíti měsících (pokud žádný neumře a žádný se tam „nepřistěhuje“)?*

Řešení. Po uplynutí prvního měsíce je na louce pořád jeden pár, nicméně samička zabřezne. Po dvou měsích se narodí první potomci, takže na louce budou dva páry. Po uplynutí každého dalšího měsíce se narodí (tedy přibude) tolik zajíců, kolik zabřezlo zaječic před měsícem, což je přesně tolik, kolik bylo před měsícem párů schopných mít potomka, což je přesně tolik, kolik bylo párů před dvěma měsíci. Celkový počet p_n zajíců po uplynutí n-tého měsíce tak je tak součtem počtů párů v předchozích dvou měsících. Pro počet párů zajíců na louce tedy dostáváme *homogenní lineární rekuretní formuli*

$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n, \quad n = 1, \ldots, \tag{1.8}$$

která spolu s počátečními podmínkami $p_1 = 1$ a $p_2 = 1$ jednoznačně určuje počty párů zajíců na louce v jednotlivých měsících. Linearita formule znamená, že všechny členy posloupnosti (p_n) jsou ve vztahu v první mocnině, rekurence je snad jasná a homogenita značí, že v předpisu chybí absolutní člen (viz dále pro nehomogenní formule). Pro hodnotu n-tého členu můžeme odvodit explicitní formuli. V hledaní formule nám pomůže pozorování, že pro jistá r je funkce r^n řešením diferenční rovnice bez počátečních podmínek. Tato r získáme tak, že dosadíme do rekurentního vztahu:

$$\begin{aligned} r^{n+2} &= r^{n+1} + r^n \quad \text{a po vydělení } r^n \text{ dostaneme} \\ r^2 &= r + 1, \end{aligned}$$

což je tzv. *charakteristická rovnice* daného rekurentního vztahu. Naše rovnice má kořeny $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a tedy posloupnosti $a_n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ a $b_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$, $n \geq 1$ vyhovují danému vztahu. Zřejmě také jejich libovolná lineární kombinace $c_n = sa_n + tb_n$, $s, t \in \mathbb{R}$. Čísla s a t můžeme zvolit tak, aby výsledná kombinace splňovala dané počáteční podmínky, v našem případě $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Pro jednoduchost je vhodné navíc ještě dodefinovat nultý člen posloupnosti jako $c_0 = 0$ a spočítat s a t z rovnic pro c_0 a c_1. Zjistíme, že $s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a tedy

$$p_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n(\sqrt{5})}. \tag{1.9}$$

Takto zadaná posloupnost splňuje danou rekurentní formuli a navíc počáteční podmínky $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, jedná se tedy o tu jedinou posloupnost, která je těmito požadavky jednoznačně zadána. Všimněte si, že hodnota vzorce (1.9) je celočíselná pro libolné přirozené n (zadává totiž celočíselnou Fibonacciho posloupnost), i když to tak na první pohled nevypadá. □

1.26. Zjednodušený model chování hrubého národního produktu

Uvažujme diferenční rovnici

$$y_{k+2} - a(1+b)y_{k+1} + aby_k = 1, \tag{1.10}$$

kde y_k je národní produkt v roce k, konstanta a je takzvaný mezní sklon ke spotřebě, což je makroekonomický ukazatel, který udává jaký zlomek peněz, které mají obyvatelé k dispozici, utratí a konstanta b popisuje jak závisí míra investic soukromého sektoru na mezním sklonu ke spotřebě.

Předpokládáme dále, že velikost národního produktu je normována tak, aby na pravé straně rovnice vyšlo číslo 1.

Spočítejte konkrétní hodnoty pro $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{3}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$.

Řešení.

Nejprve budeme hledat řešení homogenní rovnice (pravá strana nulová) ve tvaru r^k. Číslo r musí být řešením charakteristické rovnice

$$x^2 - a(1+b)x + ab = 0, \quad \text{tj. } x^2 - x + \frac{1}{4} = 0,$$

která má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$. Všechna řešení homogenní rovnice jsou potom tvaru $a(\frac{1}{2})^n + bn(\frac{1}{2}^n)$.

Dále si všimněme, že najdeme-li nějaké řešení nehomogenní rovnice (tzv. partikulární řešení), tak pokud k němu přičteme libovolné řešení homogenní rovnice, obdržíme jiné řešení nehomogenní rovnice. Lze ukázat, že takto získáme všechna řešení nehomogenní rovnice.

V našem případě (tj. pokud jsou všechny koeficienty i nehomogenní člen konstantami) je partikulárním řešením konstanta $y_n = c$. Dosazením do rovnice máme $c - c + \frac{1}{4}c = 1$, tedy $c = 4$. Všechna řešení diferenční rovnice

$$y_{k+2} - y_{k+1} + \frac{1}{4} \cdot y_k = 1$$

jsou tedy tvaru $4 + a(\frac{1}{2})^n + bn(\frac{1}{2})^n$. Požadujeme $y_0 = y_1 = 1$ a tyto dvě rovnice dávají $a = b = -3$, tedy řešení naší nehomogenní rovnice je

$$y_n = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Opět, protože víme, že posloupnost zadaná touto formulí splňuje danou diferenční rovnici a zároveň dané počáteční podmínky, jedná se vskutku o tu jedinou posloupnost, která je těmito vlastnostmi charakterizována. □

V předchozím příkladu jsme použili tzv. *metodu neurčitých koeficientů*. Ta spočívá v tom, že na základě nehomogenního členu dané diferenční rovnice „uhodneme“ tvar partikulárního řešení. Tvary partikulárních řešení jsou známy pro celou řadu nehomogenních členů. Např. rovnice

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = P_m(n), \tag{1.11}$$

s reálnými kořeny charakteristické rovnice má (skoro vždy) partikulární řešení tvaru $Q_m(n)$, kde $P_m(n)$ a $Q_m(n)$ jsou polynomy stupně m.

Další možnou metodou řešení je tzv. *variace konstant*, kdy nejprve najdeme řešení

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i(n)$$

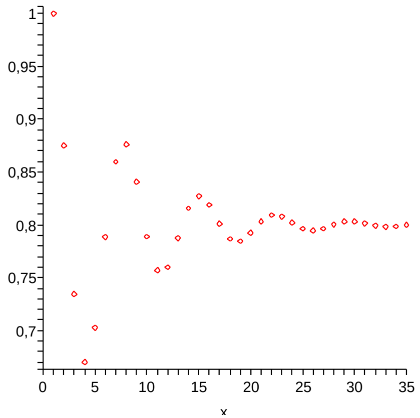
zhomogenizované rovnice a poté uvažujeme konstanty c_i jako funkce $c_i(n)$ proměnné n a hledáme partikulární řešení dané rovnice ve tvaru

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) f_i(n).$$

Více si o těchto metodách povíme později.

Ukažme si na obrázku hodnoty f_i pro $i \leq 35$ a rovnicí

$$f(n) = \frac{9}{8} f(n-1) - \frac{3}{4} f(n-2) + \frac{1}{2}, \quad f(0) = f(1) = 1.$$



Rekurentní vtahy se mohou vyskytnout i v geometrických problémech:

1.27. *Na kolik nejvýše oblastí může dělit rovinu n přímek?*

Řešení. Označme hledaný počet oblastí p_n. Pokud v rovině nemáme dánu žádnou přímku, je celá rovina jedinou oblastí, je tedy $p_0 = 1$. Pokud je v rovině dáno n přímek, tak přidáním $n+1$ přibude nejvýše $(n+1)$ oblastí: oblastí přibude právě tolik, kolika (původními) oblastmi bude přímka procházet (každou takovou oblast rozdělí na dvě části, jedna oblast tedy přibude). Přidaná přímka může mít nejvýše n různých průsečíků s n přímkami, které už v rovnině byly. Část přímky mezi libovolnými dvěma sousedními průsečíky prochází právě jednou oblastí, celkem může přidaná přímka procházet nejvýše $n+1$ oblastmi, tedy může přibýt maximálně $n+1$ oblastí, navíc v rovině bylo před přidáním $(n+1)$-ní přímky nejvýše p_n oblastí (tak jsme číslo p_n totiž definovali).

Celkem dostáváme rekurentní vztah

$$p_{n+1} = p_n + (n+1),$$

ze kterého získáme explicitní formuli pro p_n buď pomocí vzorce **??** nebo přímo:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} + n = p_{n-2} + (n-1) + n = \\ &= p_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \cdots = p_0 + \sum_{i=1}^{n} i = \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

□

1.28. *Na kolik nejvýše částí dělí třírozměrný prostor n rovin?*

Řešení. Označme hledaný počet r_n. Vidíme, že $r_0 = 1$. Podobně jako v předchozím příkladu uvažujme, že máme v prostoru n rovin, přidejme jednu další a ptejme se, kolik nejvýše částí prostoru mě přibude. Opět to bude přesně tolik, kolika původními částmi prostoru přidaná rovina prochází. Kolik to může být? Počet částí prostoru, kterými $(n+1)$-ní rovina prochází je roven počtu částí, na které je přidaná $(n+1)$-ní rovina rozdělena průsečnicemi s n rovinami, které v prostoru již byly rozmístěny. Těchto částí však může být podle předchozího příkladu nejvýše $1/2 \cdot (n^2+n+2)$, dostáváme tak rekurentní formuli

$$r_{n+1} = r_n + \frac{n^2+n+2}{2}.$$

Danou rovnici opět můžeme vyřešit přímo:

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n-1} + \frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2} = r_{n-1} + \frac{n^2-n+2}{2} = \\ &= r_{n-2} + \frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2} + \frac{n^2-n+2}{2} = \\ &= r_{n-2} + \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{(n-1)}{2} + 1 + 1 = \\ &= r_{n-3} + \frac{n^2}{2} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-3)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{(n-1)}{2} - \frac{(n-2)}{2} + \\ &\quad +1+1+1 = \\ &= \cdots = r_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = \\ &= 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} + n = \end{aligned}$$

$$= \frac{n^3 + 6n + 5}{6},$$

kde jsme použili známého vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

který lze snadno dokázat matematickou indukcí.

□

1.29. *Na kolik maximálně částí dělí rovinu n kružnic?*

Řešení. Pro maximální počet p_n oblastí, na které dělí rovinu kružnice odvodíme rekurentní vzorec

$$p_{k+1} = p_k + 2k$$

Všimněme si totiž, že $(n+1)$-ní kružnice protíná n předchozích maximálně v $2n$ průsečících (a tato situace skutečně může nastat).

Navíc zřejmě $p_1 = 2$. Pro počet p_n tedy dostáváme

$$p_k = p_{n-1} + 2(n-1) = p_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = \dots$$
$$= p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2i = n^2 - n + 2.$$

□

1.30. *Na kolik maximálně částí dělí trojrozměrný prostor n koulí?*

Řešení. Maximální počet y_n částí, na které rozdělí n kružnic rovinu je $y_n = y_{n-1} + 2(n-1)$, $y_1 = 2$, tedy $y_n = n^2 - n + 2$.

Pro maximální počet p_n částí, na které potom rozdělí n koulí prostor pak dostáváme rekurentní vztah $p_{n+1} = p_n + y_n$, $p_1 = 2$, tedy celkem $p_n = \frac{n}{3}(n^2 - 3n + 8)$. □

1.31. *Na kolik částí dělí prostor n navzájem různých rovin, které všechny prochází jedním daným bodem?*

Řešení. Pro hledaný počet x_n odvodíme rekurentní formuli

$$x_n = x_{n-1} + 2(n-1),$$

dále $x_1 = 2$, tedy

$$x_n = n(n-1) + 2.$$

□

Dále si procvičme, jak řešit lineární diferenční rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Posloupnost vyhovující dané rekurentní rovnici druhého řádu je dána jednoznačně, pokud zadáme navíc nějaké dva její sousední členy. Znovu si povšimněme dalšího využití komplexních čísel: pro určení explicitního vzorce pro n-tý člen posloupnosti reálných čísel můžeme potřebovat výpočty s čísly komplexními (to nastává tehdy, pokud má charakteristický polynom dané diferenční rovnice komplexní kořeny).

1.32. *Nalezněte explicitní vzorec pro posloupnost vyhovující následující lineární diferenční rovnici s počátečními podmínkami:*

$$x_{n+2} = 2x_n + n,\, x_1 = 2,\, x_2 = 2.$$

Řešení. Zhomogenizovaná rovnice je

$$x_{n+2} = 2x_n.$$

Její charakteristický polynom je $x^2 - 2$, jeho kořeny jsou $\pm\sqrt{2}$. Řešení zhomogenizované rovnice je tedy tvaru

$$a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n, \quad \text{pro libovolné } a, b \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení budeme hledat metodou neurčitých koeficientů. Nehomogenní část dané rovnice je lineární polynom n, partikulární řešení proto budeme nejprve hledat ve tvaru lineárního polynomu v proměnné n, tedy $kn + l$, kde $k, l \in \mathbb{R}$. Dosazením do původní rovnice dostáváme

$$k(n + 2) + l = 2(kn + l) + n.$$

Porovnáním koeficientů u proměnné n na obou stranách rovnice dostáváme vztah $k = 2k + 1$, tedy $k = -1$, porovnáním absolutních členů pak vztah $2k + l = 2l$, tedy $l = -2$. Celkem je tedy partikulárním řešením je posloupnost $-n - 2$.

Řešení dané nehomogenní diferenční rovnice druhého řádu bez počátečních podmínek jsou tedy tvaru $a(\sqrt{2})^n + b(-\sqrt{2})^n - n - 2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Nyní dosazením do počátečních podmínek určíme neznámé $a, b \in \mathbb{R}$. Pro početní jednoduchost použijeme malého triku: z počátečních podmínek a daného rekurentního vztahu vypočteme člen x_0 : $x_0 = \frac{1}{2}(x_2 - 0) = 1$. Daný rekurentní vztah spolu s podmínkami $x_0 = 1$ a $x_1 = 1$ pak zřejmě splňuje tatáž posloupnost, která splňuje původní počáteční podmínky. Máme tedy následující vztahy pro a, b:

$$\begin{aligned} x_0: &\quad a(\sqrt{2})^0 + b(-\sqrt{2})^0 - 2 = 1, \quad \text{tedy } a + b = 3,\\ x_1: &\quad \sqrt{2}a - \sqrt{2}b = 4, \end{aligned}$$

jejichž řešením dostáváme $a = \frac{6+5\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{6-5\sqrt{2}}{4}$. Řešením je posloupnost

$$x_n = \frac{6+5\sqrt{2}}{4}(\sqrt{2})^n + \frac{6-5\sqrt{2}}{4}(-\sqrt{2})^n - n - 2.$$

□

1.33. *Určete reálnou bázi prostoru řešení homogenní diferenční rovnice*

$$x_{n+4} = x_{n+3} + x_{n+1} - x_n,$$

Řešení. Charakteristický polynom dané rovnice je $x^4 - x^3 - x + 1$. Hledáme-li jeho kořeny, řešíme reciprokou rovnici

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$$

Standardním postupem nejprve vydělíme rovnici výrazem x^2 a poté zavedeme substituci $t = x + \frac{1}{x}$, tedy $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$. Obdržíme rovnici

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

s kořeny $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Pro obě tyto hodnoty neznámé t pak řešíme zvlášť rovnici danou substitučním vztahem:

$$x + \frac{1}{x} = -1.$$

Ta má dva komplexní kořeny $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ a $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) - i\sin(2\pi/3)$.

Pro druhou hodnotu neznámé t dostáváme rovnici

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

s dvojnásobným kořenem 1. Celkem je tedy bazí hledaného vektorového prostoru posloupností, které jsou řešením dané diferenční rovnice, následující čtveřice posloupností: $\{-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{-\frac{1}{2} - i\sqrt{3}\}_{n=1}^{\infty}$,$\{1\}_{n=1}^{\infty}$ (konstantní posloupnost) a $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. Hledáme-li však reálnou bázi, musíme nahradit dva generátory (posloupnosti) z této báze s komplexními hodnotami generátory reálnými. Protože tyto generátory jsou geometrické řady, jejichž libovolné členy jsou komplexně sdružená čísla, můžeme vzít jako vhodné generátory posloupnosti dané polovinou součtu, resp. polovinou i-násobku rozdílu, daných komplexních generátorů. Takto dostaneme následující reálnou bázi řešení: $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ (konstantní posloupnost), $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos(n \cdot 2\pi/3)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\sin(n \cdot 2\pi/3)\}_{n=1}^{\infty}$. □

1.34. *Kolik existuje slov délky* 12 *složených pouze z písmen A a B, které neobsahují skupinu BBB?*

Řešení. Nechť a_n značí počet slov délky n složených pouze z písmen A, B, neobsahujících skupinu BBB. Pak pro a_n $(n \geq 3)$ platí rekurentní vztah

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

neboť slova délky n splňující danou podmínku musí končit buď na A, nebo na AB, nebo na ABB. Slov končících na A je právě a_{n-1} (před posledním A může být libovolné slovo délky $n-1$ splňující danou podmínku. Obdobně pro zbylé dvě skupiny. Dále snadno vyčíslíme $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$. Postupným dopočítáním

$$a_{12} = 1705.$$

Též bychom mohli odvodit explicitní vzorec pro n-tý člen takto zadané posloupnosti, dle uvedené teorie. Charakteristický polynom dané rekurentní rovnice je $x^4 - 2x^3 - 1 = (x-1)(x^3 - x^2 - x - 1)$ s jedním z kořenů 1, ještě jedním reálným a dalšími dvěma komplexními kořeny, které můžeme vyjádřit pomocí vztahů (1). □

1.35. *Skóre basketbalového utkání mezi týmy Česka a Ruska vyznělo po první čtvtině* 12 : 9 *pro ruský tým. Kolika způsoby se mohlo vyvíjet skóre?*

Řešení. Označíme-li $P_{(k,l)}$ počet způsobů, kterými se mohlo vyvíjet skóre basketbalového utkání, které skončilo $k : l$, tak pro $k, l \geq 3$ platí rekurentní vztah:

$$P_{(k,l)} = P_{(k-3,l)} + P_{(k-2,l)} + P_{(k-1,l)} + P_{(k,l-1)} + P_{(k,l-2)} + P_{(k,l-3)}.$$

(Způsoby, kterými se mohlo vyvíjet utkání s výsledným skóre $k : l$ rozdělíme na šest po dvou disjunktních podmnožin podle toho, které družstvo vstřelilo koš a za kolik bodů (1, 2, či 3).) Ze symetrie úlohy zřejmě platí $P_{(k,l)} = P_{(l,k)}$. Dále pro $k \geq 3$ platí:

$$\begin{aligned}
P_{(k,2)} &= P_{(k-3,2)} + P_{(k-2,2)} + P_{(k-1,2)} + P_{(k,1)} + P_{(k,0)},\\
P_{(k,1)} &= P_{(k-3,1)} + P_{(k-2,1)} + P_{(k-1,1)} + P_{(k,0)},\\
P_{(k,0)} &= P_{(k-3,0)} + P_{(k-2,0)} + P_{(k-1,0)},
\end{aligned}$$

což spolu s počátečními podmínkami $P_{(0,0)} = 1$, $P_{(1,0)} = 1$, $P_{(2,0)} = 2$, $P_{(3,0)} = 4$, $P_{(1,1)} = 2$, $P_{(2,1)} = P_{(1,1)} + P_{(0,1)} + P_{(2,0)} = 5$, $P_{(2,2)} = P_{(0,2)} + P_{(1,2)} + P_{(2,1)} + P_{(2,0)} = 14$, dává

$$P_{(12,9)} = 497178513.$$

□

Poznámka. *Vidíme, že rekurentní vztah v tomto příkladu má složitější formu, než kterou jsme se zabývali v teorii a tudíž neumíme vyčíslit libovolné číslo $P_{(k,l)}$ explicitně, nýbrž pouze postupným výpočtem od počátečních členů. Takové rovnice nazýváme parciální diferenční rovnice, protože členy posloupnosti jsou značeny dvěma nezávislými proměnnými (k, l).*

1.36. *Určete explicitní vzorec pro n-tý člen jediné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovující následujícím podmínkám:*

$$x_{n+2} = x_{n+1} - x_n, \ , x_1 = 1, \ x_2 = 5.$$

Řešení. $x_n = 2\sqrt{3}\sin(n \cdot (\pi/6)) - 4\cos(n \cdot (\pi/6))$. □

1.37. *Určete explicitní vzorec pro n-tý člen jediné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovující následujícím podmínkám:*

$$-x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n, \ x_1 = 1, \ x_2 = 1, \ x_3 = 1.$$

Řešení. $x_n = -3(-1)^n - 2\cos(n \cdot (2\pi/3)) - 2\sqrt{3}\sin(n \cdot ((2\pi/3))$.
□

1.38. *Určete explicitní vzorec pro n-tý člen jediné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vyhovující následujícím podmínkám:*

$$-x_{n+3} = 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n, \ x_1 = 1, \ x_2 = 1, \ x_3 = 1.$$

Řešení. $x_n = (-1)^n(-2n^2 + 8n - 7)$. □

4. Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Uveďme si několik jednoduchých příkladů na klasickou pravděpodobnost, kdy zkoumáme nějaký pokus, který má konečně mnoho možných výsledků („všechny případy“) a nás zajímá, kdy výsledek pokusu bude náležet nějaké podmnožině možných výsledků („příznivé případy“). Hledaná pravděpodobnost je pak rovna poměru počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Klasickou pravděpodobnost můžeme použít tam, kde předpokládáme (víme), že každý z možných výsledků má stejnou pravděpodobnost toho, že nastane (například při hodech kostkou).

1.39. *Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šestibokou kostkou padne číslo větší než* 4*?*

1.40. *Všech možných výsledků je šest (tvoří množinu* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*), příznivé možnosti jsou dvě (*$\{5, 6\}$*). Hledaná pravděpodobnost je tedy* $2/6 = 1/3$.

1.41. *Ze skupiny osmi mužů a čtyř žen náhodně vybereme skupinu pěti lidí. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň tři ženy?*

Řešení. Pravděpodobnost spočítáme jako podíl počtu příznivých případů ku počtu všech případů. Příznivé případy rozdělíme podle toho, kolik je v náhodně vybrané skupině mužů: mohou v ní být buď dva, nebo jeden muž. Skupinek o pěti lidech s jedním mužem je osm (záleží pouze na výběru muže, ženy v ní musí být všechny), skupinek se dvěma muži je potom $c(8, 2)c(4, 3) = \binom{8}{2}\binom{4}{3}$ (vybereme dva muže z osmi a nezávisle na tom tři ženy ze čtyř, tyto dva výběry můžeme nezávisle kombinovat a podle pravidla součinu dostáváme uvedený počet skupin). Všech možných skupin o pěti lidech pak můžeme sestavit $c(12, 5) = \binom{12}{5}$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{8 + \binom{4}{3}\binom{8}{2}}{\binom{12}{5}}.$$

□

1.42. *Do výtahu osmipatrové budovy nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném poschodí. Jaká je pravděpodobnost, že vystoupí*

(1) všichni v šestém poschodí,
(2) všichni ve stejném poschodí,
(3) každý v jiném poschodí?

Řešení. Základní prostor všech možných jevů je prostor všech možných způsobů vystoupení 5 osob z výtahu. Těch je 8^5.

V prvním případě je jediná příznivá možnost vystoupení, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^5}$, ve druhém případě máme osm možností, hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{8^4}$ a konečně ve třetím je počet příznivých případů dán pětiprvkovou variací z osmi prvků (z osmi pater vybíráme pět, ve kterých se vystoupí a dále kteří lidé vystoupí ve vybraných poschodích), celkem je hledaná pravděpodobnost ve třetím případě rovna (viz **??** a **??**)

$$\frac{v(5,8)}{V(5,8)} = \frac{8 \cdot 7 \cdots 4}{8^5} \doteq 0,2050781250.$$

□

Uveďme si příklad nevhodného použití klasické pravděpodobnosti:

1.43. *Jaká je pravděpodobnost toho, že čtenář této úlohy vyhraje příští týden alespoň milión dolarů v loterii?*

Řešení. Základní prostor všech možný jevů je dvouprvkový: buď vyhraje nebo nevyhraje. Příznivý jev je jeden (vyhraje), hledaná pravděpodobnost je tedy $1/2$. □

Poznámka. *V předchozím příkladě je porušena základní podmínka použití klasické pravděpodobnosti, totiž to, že každý z možných výsledků má stejnou pravděpodobnost toho, že nastane.*

1.44. *Do řady v kině o 2n místech je náhodně rozmístěno n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?*

Řešení. Všech možných rozmístění lidí v řadě je $(2n)!$, rozmístění splňujících podmínky je $2(n!)^2$ (máme dvě možnosti výběru pozice mužů, tedy i žen, na nich jsou pak muži i ženy rozmístěny libovolně). Výsledná pravděpodobnost je tedy

$$p(n) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}, \ p(2) \doteq 0,33, \ p(5) \doteq 0,0079, \ p(8) \doteq 0,00016.$$

□

1.45. *Náhodně vybereme celé kladné číslo menší než* 10^5. *Jaká je pravděpodobnost, že bude složeno pouze z cifer* 0, 1, 5 *a zároveň bude dělitelné číslem* 5*?*

Řešení. Čísel spňujích danou podmínku je $2 \cdot 3^4 - 1$ (kromě poslední cifry máme na každý řád na výběr ze tří cifer, případné číslice 0 na začátku slova nepíšeme. Všech celých kladných čísel menších než 10^5 je $10^5 - 1$, podle klasické pravděpodobnosti dostáváme, že hledaná pravděpodobnost je $\frac{2 \cdot 3^4 - 1}{10^5 - 1}$. □

Ukažme si ještě pěkné použití principu inkluze a exkluze:

1.46. *Sekretářka má rozeslat pět dopisů pěti různým lidem. Dopisy pro různé adresáty vkládá do obálek s adresami náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden člověk dostane dopis určený pro něj?*

Řešení. Spočítejme pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že ani jeden člověk neobdrží správný dopis. Stavový prostor všech možných jevů odpovídá všem možným pořadím pěti prvků (obálek). Označíme-li jak obálky tak dopisy čísly od jedné do pěti, tak všechny příznivé jevy (tedy žádný dopis nepřijde do obálky se stejným číslem) odpovídají takovým pořadím pěti prvků, kdy i-tý prvek není na i-tém místě ($i = 1, \dots, 5$), tzv. pořadím bez pevného bodu. Jejich počet spočítáme pomocí principu inkluze a exkluze. Označíme-li M_i množinu permutací s pevným bodem i (permutace v M_i ale mohou mít i jiné pevné body), tak výsledný počet d permutací bez pevného bodu je roven

$$d = 5! - |M_1 \cup \dots \cup M_5|$$

Počet prvků průniku $|M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}|$, $k = 1, \dots, 5$, je $(5-k)!$ (pořadí prvků $i_1, \dots, i_k$ je pevně dáno, ostatních $5-k$ prvků řadíme libovolně). Podle principu inkluze a exkluze je

$$|M_1 \cup \dots \cup M_5| = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \binom{5}{k} (5-k)!$$

a tedy pro hledaný počet d dostáváme vztah

$$\begin{aligned} d &= 5! - \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \binom{5}{k} (n-k)! \\ &= \sum_{k=0}^{5} (-1)^{k} \binom{5}{k} (5-k)! = 5! \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Pravděpodobnost toho, že žádný člověk neobdrží „svůj“ dopis je tedy

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!}$$

a hledaná pravděpodobnost pak

$$1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{19}{30}.$$

□ **Poznámka.** Všimněme si, že odpověď na stejnou otázku, se s rostoucím počtem dopisů příliš nemění. Pro n dopisů je pravděpodobnost, že sekretářka nedá žádný do správné obálky

$$1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \doteq 1 - \frac{1}{e},$$

jak totiž uvidíme později, uvedená suma konverguje (blíží se) k hodnotě $1/e$.

1.47. Další principy počítání s pravděpodobnostmi. Vraťme se k házení kostkou a zkusme popsat jevy ze základního prostoru Ω vznikající při házení tak dlouho, dokud nepadne šestka, ne však více než stokrát.

Pro jeden hod samostatně je základním prostorem šest čísel od jedné do šesti a jde o klasickou pravděpodobnost. Pro celé série našich hodů bude základní prostor daleko větší – bude to množina konečných posloupností čísel od jedné do šestky, které buď končí šestkou, mají nejvýše 100 členů a všechna předchozí čísla jsou menší než šest, nebo jde o 100 čísel od jedné do pěti. Jevem A může být např. podmnožina „házení končí druhým pokusem“. Všechny příznivé elementární jevy pak jsou

$$[1, 6],\ [2, 6],\ [3, 6],\ [4, 6],\ [5, 6].$$

Ze známé klasické pravděpodobnosti pro jednotlivé hody umíme odvodit pravděpodobnosti našich jevů v Ω. Není to ale jistě klasická pravděpodobnost. Tak pro diskutovaný jev chceme popsat, s jakou pravděpodobností nepadne šestka při prvém hodu a zároveň padne při druhém. Vnucuje se řešení

$$P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36},$$

protože v prvém hodu padne s pravděpodobností $1 - \frac{1}{6}$ jiné číslo než šest a druhý hod, ve kterém naopak požadujeme šestku, je zcela nezávislý na prvním. Samozřejmě toto není poměr počtu příznivých výsledků k velikosti celého stavového prostoru!

Obecněji můžeme říci, že po právě $1 < k < 100$ hodech pokus skončí s pravděpodobností $(\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Ze všech možností je tedy nejpravděpodobnější, že skončí již napoprvé.

Jiný příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy je pozorovat součty při hodu více kostkami. Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěmi kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b), tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$. Pokud se budeme ptát po dvou pětkách, je tedy pravděpodobnost poloviční než u dvou různých hodnot bez uvedení pořadí. Pro jednotlivé možné součty uvedené v horním řádku nám vychází počet možností v řádku dolním:

Součet	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Počet	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Podobně vyjde pravděpodobnost $\frac{1}{216}$ jednotlivých výsledků hodu třemi kostkami, včetně určeného pořadí. Pokud se budeme ptát na pravděpodobnost výsledného součtu při hodu více kostkami, musíme pouze určit, kolik je možností, jak daného součtu dosáhnout a příslušné pravděpodobnosti sečíst.

1.48. *Ze sáčku s pěti bílými a pěti červenými koulemi náhodně vytáhneme tři (koule do sáčku nevracíme). Jaká je pravděpodobnost, že dvě budou bílé a jedna červená?*

Řešení. Rozdělme uvažovaný jev na sjednocení tří disjunktních jevů: podle toho, kolikátou vytáhneme červenou kouli. Pravděpodobnosti, že vytáhneme koule přesně ve zvoleném pořadí jsou: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2}$. Celkem $\frac{5}{12}$.

Jiné řešení.. Uvažme počet všech možných trojic vytažených koulí (koule jsou mezi sebou rozlišitelné), tedy $\binom{10}{3}$. Trojic, které obsahují právě dvě bílé koule je potom $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ (dvě bílé koule můžeme vytáhnout $\binom{5}{2}$ způsoby, k nim pak červenou pěti způsoby).

□

1.49. *Z klobouku, ve kterém je pět bílých, pět červených a šest černých koulí, náhodně vytahujeme koule (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že pátá vytažená koule bude černá?*

Řešení. Spočítáme dokonce obecnější úlohu. Totiž pravděpodobnost toho, že i-tá vytažená koule bude černá, je stejná pro všechna i, $1 \leq i \leq 16$. Můžeme si totiž představit, že vytáhneme postupně všechny koule. Každá taková posloupnost vytažených koulí (od první vytažené koule po poslední), složená z pěti bílých, pěti červených a šesti černých koulí, má stejnou pravděpodobnost vytažení a pro výpočet hledané pravděpodobnosti můžeme opět použít model klasické pravděpodobnosti. Zmíněných posloupností je $P(5, 5, 6) = \frac{16!}{5! \cdot 5! \cdot 5!}$. Počet posloupností, kde na i-tém místě je černá koule, zbytek libovolný je je tolik, kolik je libovolých posloupností pěti bílých, pěti červených a pěti černých koulí, tedy $P(5, 5, 5) = \frac{15!}{5!5!5!}$) Celkem tedy je hledaná pravděpodobnost

$$\frac{P(5, 5, 5)}{P(5, 5, 6)} = \frac{\frac{15!}{5!5!5!}}{\frac{16!}{6!5!5!}} = \frac{3}{8}.$$

□

1.50. *V jisté zemi mají parlament, ve kterém zasedá 200 poslanců. Dvě hlavní politické strany, které v zemi existují si při „volbách“ házejí o každý poslanecký mandát zvlášť mincí. Každá z těchto stran má přidělenu jednu stranu mince. Té straně, jejíž strana mince padne, náleží mandát, o který se právě losovalo. Jaká je pravděpodobnost, že každá ze stran získá 100 mandátů? (mince je „poctivá“)*

Řešení. Všech možných výsledků losování (uvažovaných jako dvousetčlenné posloupnosti rubů a líců) je 2^{200}. Pokud každá strana získá právě sto mandátů, je ve vylosované posloupnosti právě sto líců a sto rubů. Takových posloupností je $\binom{200}{100}$ (taková posloupnost je jednoznačně určená výběrem sto členů z dvě sta možných, na kterých budou např. líce). Celkem je hledaná pravděpodobnost

$$\frac{\binom{200}{100}}{2^{200}} = \frac{\frac{200!}{100!\cdot 100!}}{2^{200}} \doteq 0,056.$$

□

1.3. Poznámka. Všimněme si, že v předchozím příkladu jsme mimochodem kombinatoricky dokázali (jednoduchou) nerovnost

$$\binom{200}{100} < 2^{200},$$

resp. malým zobecněním dokonce pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$

$$\binom{n}{k} < 2^n.$$

Následující příklad je jednoduchým modelem, který odhaduje pravděpodobnost úmrtí osoby při dopravní nehodě.

1.51. *Ročně zahyne na silnicích v ČR přibližně 1200 českých občanů. Určete pravděpodobnost, že někdo z vybrané skupiny pěti set Čechů zemře v následujících deseti letech při dopravní nehodě. Předpokládejte pro zjednodušení, že každý občan má v jednom roce stejnou „šanci“ zemřít při dopravní nehodě a to* $1200/10^7$.

Řešení. Spočítejme nejprve pravděpodobnost, že jeden vybraný člověk v následujících deseti letech **nezahyne** na při dopravní nehodě. Pravděpodobnost, že nezahyne v jednom roce, je $(1 - \frac{12}{10^5})$. Pravděpodobnost, že nezahyne v následujících deseti letech, je pak $(1 - \frac{12}{10^5})^{10}$. Pravděpodobnost, že v následujících deseti letech nezahyne nikdo z daných pěti set lidí, je opět podle pravidla součinu (jedná se o nezávislé jevy) $(1 - \frac{12}{10^5})^{5000}$. Pravděpodobnost jevu opačného, tedy toho, že někdo z vybraných pěti set lidí zahyne, je tedy

$$1-\left(1-\frac{12}{10^5}\right)^{5000} \doteq 0,4512.$$

□

Poznámka. Model, který jsme použili v předchozím příkladu k popisu zadané situace, je pouze přibližný. Problém spočívá v podmínce, že každý občan z vyšetřovaného vzorku má stejnou pravděpodobnost toho, že v průběhu roku zahyne, kterou jsme odhadli z počtu usmrcených osob za rok. Počet tragických nehod se totiž rok od roku mění a i kdyby se neměnil, tak se mění populace. Ukažme si jednu s nepřesností příkladu na jiném způsobu řešení: zahyne-li 1200 osob za rok, tak za deset let zahyne 12000. Pravděpodobnost toho, že konkrétní člověk zahyne v průběhu deseti let tedy můžeme odhadnout i zlomkem $12000/10^7$. Pravděpodobnost, že konkrétní osoba nezahyne v průběhu 10 let je tedy $(1-\frac{12}{10^4})$ (to jsou první dva členy binomického rozvoje $(1-\frac{12}{10^5})^{10}$). Celkem dostáváme anolagicky jako v předchozím řešení odhad pravděpodobnosti

$$1-\left(1-\frac{12}{10^4}\right)^{500} \doteq 0,4514.$$

Vidíme, že oba odhady jsou velmi blízké.

Snaha použít matematických znalostí k výhře v nejrůznějších hazardních hrách je velmi stará. Podívejme se na jednoduchý příklad.

1.52. *Alešovi zbylo* 2500 *Kč z pořádání tábora. Aleš není žádný ňouma:* 50 *Kč přidal z kasičky a rozhodl se jít hrát ruletu na automaty. Aleš sází pouze na barvu. Pravděpodobnost výhry při sázce na barvu je* $18/37$. *Začíná sázet na* 10 *Kč a pokud prohraje, v další sázce vsadí dvojnásobek toho, co v předchozí (pokud na to ještě má, pokud ne, tak končí s hrou – byt'by měl ještě peníze na nějakou menší sázku). Pokud nějakou sázku vyhraje, v následující sázce hraje opět o* 10 *Kč. Jaká je pravděpodobnost, že při tomto postupu vyhraje dalších* 2550 *Kč? (jakmile bude* 2500 *Kč v plusu, tak končí)*

Řešení. Nejprve spočítejme, kolikrát po sobě může Aleš prohrát. Začíná-li s 10 Kč, tak na n vsazení potřebuje

$$10+20+\cdots+10\cdot 2^{n-1} = 10\Big(\sum_{i=0}^{n-1} 2^i\Big) = 10\Big(\frac{2^n-1}{2-1}\Big) = 10\cdot(2^n-1).$$

Jak snadno nahlédneme, číslo 2550 je tvaru $10(2^n-1)$ a to pro $n=8$. Aleš tedy může sázet osmkrát po sobě bez ohledu na výsledek sázky, na devět sázek by potřeboval již $10(2^9-1)=5110$ Kč a to v průběhu hry nikdy mít nebude (jakmile bude mít 5100 Kč, tak končí). Aby tedy jeho hra skončila neúspěchem, musel by prohrát osmkrát v řadě. Pravděpodobnost prohry při jedné sázce je $19/37$, pravděpodbnost prohry v osmi po sobě následujících (nezávislých) sázkách je tedy $(19/37)^8$. Pravděpodobnost, že v těchto osmi hrách vyhraje 10 Kč (při daném postupu) je tedy $1 - (19/37)^8$. Na to, aby vyhrál 2500 Kč, potřebuje 255 krát vyhrát po desetikoruně. Tedy opět podle pravidla součinu je pravděpodobnost výhry

$$\left(1 - \left(\frac{19}{37}\right)^8\right)^{255} \doteq 0,29.$$

Tedy pravděpodobnost výhry je nižší, než kdyby vsadil rovnou vše na jednu barvu. □

1.53. *Samostatně si můžete vyzkoušet spočítat předchozí příklad za předpokladu, že Aleš sází stejnou metodou jako v předchozím příkladě, končí však až v okamžiku, kdy nemá žádné peníze (pokud nemá na vsazení dvojnásobku částky prohrané v předchozí sázce, ale má ještě nějaké peníze, začíná sázet znovu od* 10 *Kč).*

1.54. Podmíněná pravděpodobnost.

1.55. *Jaká je pravděpodobnost toho, že při hodu dvěma kostkami padne součet 7, víme-li, že ani na jedné z kostek nepadlo číslo 2.*

Řešení. Označme jev, že ani na jedné kostce nepadne dvojka jako B, jev „padne součet 7“ jako A. Množinu všech možných výsledků budeme značit opět jako Ω. Pak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Číslo 7 může padnout čtyřmi různými způsoby, pokud nepadne dvojka, tedy $|A \cap B| = 4$, $|B| = 5 \cdot 5 = 25$, tedy

$$P(A|B) = \frac{4}{25}.$$

Všimněme si, že $P(A) = \frac{1}{6}$, tedy jevy A a B jsou závislé. □

1.56. *Michal má dvě poštovní schránky, jednu na gmail.com a jednu na seznam.cz. Uživatelské jméno má stejné na obou serverech, hesla různá (ale nepamatuje si, které heslo má na kterém serveru). Při zadávání hesla při přístupu do schránky se splete s pravděpodobností* $1/20$ *(tj. jestliže chce napsat zadat jemu známé slovo jako heslo, tak jej s pravděpodobností* 95% *skutečně správně na klávesnici zadá). Michal* *zadal na serveru seznam.cz jméno a heslo a server mu oznámil, že něco není vpořádku. Jaká je pravděpodobnost, že chtěl zadat správné heslo, ale pouze se „překlepnul“ při zadávání? (Předpokládáme, že uživatelské jméno zadá vždy bez chyby.)*

Řešení. Označme A jev, že Michal fyzicky zadal na serveru seznam.cz špatné heslo. Tento jev je sjednocením dvou disjunktních jevů:

A_1 : chtěl zadat správné heslo a přepsal se,
A_2 : chtěl zadat špatné heslo (to z gmail.com) a buď se přepsal nebo ne.

Hledáme tedy podmíněnou pravděpodobnost $P(A_1|A)$, ta je podle vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost rovna:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)},$$

potřebujeme tedy určit pravděpodobnosti $P(A_1)$ a $P(A_2)$. Jev A_1 je konjunkcí (průnikem) dvou nezávislých jevů: Michal chtěl zadat správné heslo a Michal se při zadávání přepsal. Dle zadání je pravděpodobnost prvního z nich $1/2$, druhého $1/20$, celkem $P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$ (pravděpodobnosti násobíme, protože se jedná o nezávislé jevy). Dále je ze zadání $P(A_2) = \frac{1}{2}$. Celkem $P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{40} + \frac{1}{2} = \frac{21}{40}$, a můžeme vyčíslit:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{21}{40}} = \frac{1}{21}.$$

□

1.57. Geometrická pravděpodobnost.

Metodu *geometrické pravděpodobnosti* můžeme použít v případě, že daný jevový prostor sestává z nekonečně mnoha elementárních jevů, které dohromady vyplňují nějakou oblast na přímce, rovnině, prostoru (u které umíme určit její délku, obsah, objem, ...) a předpokládáme, že pravděpodobnost, že nastane elementární jev z určité podblasti je rovna poměru její velikosti (délce, obsahu, ...) k velikosti celého jevového prostoru.

1.58. *Z Těšína vyjíždí vlaky co půl hodinu (směrem na Bohumín) a z tohoto směru přijíždějí také každé půl hodiny. Předpokládejme, že vlaky se mezi těmito dvěma stanicemi pohybují rovnoměrnou rychostí 72 km/h a jsou dlouhé 100 metrů, cesta trvá 30 minut, vlaky se míjejí někde na trase. Hazardér Jarda si vybere jeden z těchto vlaků a během cesty z Těšína do Bohumína náhodně vystrčí hlavu z okna na pět vteřin nad kolejiště pro protější směr. Jaká je pravděpodobnost, že mu bude* *uražena? (Předpokládáme, že jiné než zmíněné vlaky na trati nejezdí.)*

Řešení. Vzájemná rychlost protijedoucích vlaků je $40\,m/s$, protijedoucí vlak mine Jardovo okno za dvě a půl sekundy. Prostor všech možností je tedy interval $\langle 0, 1800\,s\rangle$, prostor „příznivých“ možností je potom interval délky $7,5\,s$ ležící někde uvnitř předchozí úsečky. Pravděpodobnost uražení hlavy je tedy $7,5/1800 \doteq 0,004$. □

1.59. *Jednou denně někdy mezi osmou hodinou ranní a osmou hodinnou večerní vyjíždí náhodně autobus z Koločavy do Užhorodu. Jednou denně ve stejném časovém rozmezí jezdí jiný autobus náhodně opačným směrem. Cesta tam trvá pět hodin, zpět též pět hodin. Jaká je pravděpodobnost, že se autobusy potkají, jezdí-li po stejné trase?*

Řešení. Prostor všech možných jevů je čtverec 12×12, Označíme-li doby odjezdu obou autobusů x, resp. y, pak se tyto na trase potkají právě když $|x - y| \leq 5$. Tato nerovnost vymezuje v daném čtverci oblast „příznivých jevů“. Obsah zbylé části spočítáme přímo jednodušeji, neboť je sjednocením dvou pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků o odvěsnách délky 7, tedy je roven 49, obsah části odpovídající „příznivým jevům“ je tedy $144 - 49 = 95$, celkem je hledaná pravděpodobnost $p = \frac{95}{144} \doteq 0,66$.

□

1.60. *Mirek vyjede náhodně mezi desátou hodinou dopolední a osmou hodinou večerní z Brna do Prahy. Marek vyjede náhodně ve stejném intervalu z Prahy do Brna. Oběma trvá cesta 2h. Jaká je pravděpodobnost, že se po cestě potkají (jezdí po stejné trase). Cesta trvá oběma 2h.*

Řešení. Řešíme naprosto analogicky jako v předchozím příkladě. Prostor všech možných jevů je čtverec 10×10, Mirek vyjíždějící v čase x, potká Marka vyjíždějícího v čase y právě když $|x - y| \leq 2$. Tato nerovnost vymezuje v daném čtverci oblast „příznivých jevů“. Obsah zbylé části spočítáme přímo jednodušeji, neboť je sjednocením dvou pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků o odvěsnách 8, tedy je roven 64, obsah části odpovídající „příznivým jevům“ je tedy 36, celkem je hledaná pravděpodobnost $p = \frac{36}{100} = \frac{9}{25} = 0,36$.

□

1.61. *Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden díl bude nejvýše* 20 *cm dlouhý.*

Řešení. Náhodné rozdělení tyče na tři díly je dáno dvěma body řezu, čísly x a y (nejprve tyč rozřízneme ve vzdálenosti x od počátku, nehýbeme s ní a dále ji rozřízneme ve vzdálenosti y od počátku). Pravděpodobnostní prostor je tedy čtverec C o straně $2\,m$. Umístíme-li čtverec C tak, aby dvě jeho strany ležely na kartézských osách v rovině, tak podmínka, že alespoň jeden díl má být nejvýše $20\,cm$ dlouhý, nám vymezuje ve čtverci následující oblast O:

$$O = \{(x, y) \in C|(x \leq 20) \vee (x \geq 180) \vee (y \leq 20) \vee (y \geq 180) \\ \vee (|x - y|) \leq 20\}.$$

Jak snadno nahlédneme, zaujímá takto vymezená oblast $\frac{51}{100}$ obsahu čtverce.

□

1.62. *Dvoumetrová tyč je náhodně rozdělena na tři díly. Určete pravděpodobnost, že ze vzniklých dílů půjde sestavit trojúhelník.*

Řešení. Rozdělení tyče je dáno stejně jako v předchozím příkladě body řezu x a y a jevovým prostorem je opět čtverec 2×2. Aby z částí bylo možno sestavit trojúhelník, musejí jejich délky splňovat tzv. trojúhelníkové nerovnosti, tedy součet délek libovolných dvou částí musí být větší než délka třetí části. Vzhledem k tomu, že součet délek je roven $2\,m$, je tato podmínka ekvivalentní podmínce, že každá s částí musí být menší než $1\,m$. To pomocí řezů x a y vyjádříme tak, že nesmí platit současně $x \leq 1$ a $y \leq 1$ nebo současně $x \geq 1$ a $y \geq 1$ (odpovídá podmínkám, že krajní díly tyče jsou menší než 1), navíc $|x - y| \leq 1$ (prostřední díl musí být menší než jedna). Tyto podmínky splňuje vyšrafovaná oblast na obrázku a jak snadno nahlédneme, její obsah je $1/4$.

□

1.63. *Z Brna vyrazí náhodně někdy mezi polednem a čtvrtou hodinou odpolední Honza autem do Prahy a opačným směrem někdy ve stejném intervalu autem Martin. Oba si dávají půl hodiny pauzu v motorestu v polovině cesty (přístupném pro oba směry). Jaká je pravděpodobnost, že se tam potkají, jezdí-li Honza rychlostí 150 km/h, a Martin 100 km/h? (Vzdálenost Brno-Praha je 200 km)*

Řešení. Označíme-li dobu odjezdu Martina x a dobu odjezdu Honzy y a pro menší výskyt zlomků v následujících výpočtech zvolíme za jednotku deset minut, tak stavovým prostorem bude čtverec 24×24. Doba příjezdu Martina do motorestu je $x + 6$, do příjezdu Honzy $(x + 4)$. Stejně jako v předchozím příkladu to, že se v motorestu potkají je ekvivalentní tomu, že doby jejich příjezdu se neliší o více než o půl hodiny, tedy $|(x + 6) - (y + 4)| \leq 3$. Tato podmínka nám pak ve stavovém čtverci vymezuje oblast o obsahu $24^2 - \frac{1}{2}(23^2 + 19^2)$ (viz obr.) a hledaná pravděpodobnost je

$$p = \frac{24^2 - \frac{1}{2}(23^2 + 19^2)}{24^2} = \frac{131}{576} \doteq 0,227$$

□

1.64. *Mirek a Marek chodí na obědy do univerzitní menzy. Menza má otevřeno od 11h do 14h. Každý z nich stráví na obědě půl hodiny a dobu příchodu (mezi 11h a 14h) si vybírá náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se na obědě v daný den potkají, sedávají-li oba u stejného stolu?*

Řešení. Prostor všech možných jevů je čtverec 3×3. Označíme-li x dobu příchodu Mirka a y dobu příchodu Marka, tak tito se potkají, právě když $|x - y| \leq 1/2$. Tato nerovnost vymezuje ve čtverci možných událostí oblast, jejíž obsah je roven $11/38$ obsahu čtverce. Tomuto zlomku je tedy rovna i hledaná pravděpodobnost. □

5. Geometrie v rovině

1.65. *Je dána přímka*

$$p: \ [2, 0] + t(3, 2).$$

Určete její obecnou rovnici a nalezněte průnik s přímkou

$$q: \ [-1, 2] + s(1, 3).$$

Řešení. Souřadnice bodů na přímce jsou dány dle daného parametrického zadání jako $x = 2 + 3t$ a $y = 0 + 2t$. Vyloučením parametru t ze soustavy těchto dvou rovnic dostáváme obecnou rovnici přímky p:

$$2x - 3y - 4 = 0.$$

Průnik s přímkou q získáme dosazením parametrického vyjádření bodů na úsečce q, tedy $x = -1 + s$ a $y = 2 + 3s$, do obecné rovnice přímky p:

$$2(-1+s)-3(2+3s)-4=0,$$

odkud $s=-12/7$ a dosazením do parametrického vyjádření úsečky q dostáváme souřadnice průsečíku P:

$$P=[-\frac{19}{7},-\frac{22}{7}].$$

$\square$

1.66. *Uvažujme rovinu* $\mathbb{R}^2$ *se standardní soustavou souřadnic. Z počátku* $[0,0]$ *je vyslán laserový paprsek ve směru* $(3,1)$. *Dopadne na zrcadlovou přímku p danou parametricky jako*

$$p:\ [4,3]+t(-2,1),$$

a poté se odrazí (úhel dopadu je shodný s úhlem odrazu). V jakém bodě dopadne odražený paprsek na přímku q, danou parametricky jako

$$q:\ [7,-10]+t(-1,6)?$$

Řešení. Směr paprsku svírá s přímkou p úhel 45°, odražený paprsek tedy bude kolmý na dopadající, jeho směrový vektor bude $(1,-3)$ (Pozor na orientaci! Daný směrový vektor můžeme též získat například zrcadlením podle kolmého vektoru k přímce p). Paprsek dopadne v bodě $[6,2]$, odražený paprsek tedy bude mít rovnici

$$[6,2]+t(1,-3),\ t\geq 0.$$

Průnik přímky dané odraženým paprskem s přímkou q je bod $[4,8]$, což je mimo polopřímku, která je daná odraženým paprskem ($t=-2$). Odražený paprsek tedy přímku q neprotne. $\square$

1.67. *Z bodu* $[-2,0]$ *vyrazila v pravé poledne konstantní rychlostí* $1ms^{-1}$ *ve směru* $(3,2)$ *úsečka délky* 1. *Rovněž v poledne vyrazila z bodu* $[5,-2]$ *druhá úsečka délky* 1 *ve směru* $(-1,1)$*, ovšem dvojnásobnou rychlostí. Srazí se?*

Řešení. Přímky, po kterých se pohybují dané úsečky, můžeme popsat parametrickým vyjádřením:

$$\begin{aligned} p &: [-2,0]+r(3,2)\\ q &: [5,-2]+s(-1,1), \end{aligned}$$

Obecná rovnice přímky p je

$$2x-3y+4=0.$$

Dosazením parametrického vyjádření přímky q získáme průsečík $P = [1, 2]$.

Nyní se snažme zvolit jediný parametr t pro obě úsečky tak, aby nám odpovídající bod na přímkách p, resp. q, popisoval polohu počátku první, resp. druhé, úsečky v čase t. V čase 0 je první úsečka v bodě $[-2, 0]$, druhá v bodě $[5, -2]$. Za čas t sekund urazí první t jednotek délky ve směru $(3, 2)$ druhá pak $2t$ jednotek délky ve směru $(-1, 1)$. Odpovídající parametrizace jsou tedy

$$
\begin{aligned}
p &: \quad [-2, 0] + \frac{t}{\sqrt{13}}(3, 2), \\
q &: \quad [5, -2] + \sqrt{2}t(-1, 1),
\end{aligned}
$$

Počátek první úsečky dorazí do bodu $[1, 2]$ v čase $t_1 = \sqrt{13}\,s$, počátek druhé úsečky v čase $t = 2\sqrt{2}\,s$, tedy více než o půl vteřiny dříve. Tedy v době, kdy dorazí do průsečíku P počátek první úsečky, bude již konec druhé úsečky pryč a úsečky se tak nesrazí. $\square$

1.68. Viditelnost stran trojúhelníka. *Je dán trojúhelník s vrcholy* $A = [5, 6]$*,* $B = [7, 8]$*,* $C = [5, 8]$*. Určete, které jeho strany je vidět z bodu* $[0, 1]$.

Řešení. Uspořádáme vrcholy v kladném smyslu, tedy proti směru hodinových ručiček: $[5, 6]$, $[7, 8]$, $[5, 8]$. Pomocí příslušných determinantů určíme, je-li bod $[0, 1]$ „nalevo" či „napravo" od jednotlivých stran trojúhelníka uvažovaných jako orientované úsečky,

$$
\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} < 0 \quad \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 0.
$$

Z nulovosti posledního determinantu vidíme, že body $[0, 1]$, $[5, 6]$ a $[7, 8]$ leží na přímce, stranu AC tedy nevidíme. Stranu BC rovněž tak nevidíme, narozdíl od strany AB. $\square$

1.69. *Určete, které strany čtyřúhelníka s vrcholy* $A = [95, 99]$*,* $B = [130, 106]$*,* $C = [40, 60]$*,* $D = [130, 120]$*. jsou viditelné z bodu* $[2, 0]$.

Řešení. Nejprve je třeba určit strany čtyřúhelníka („správné" pořadí vrcholů): $ACBD$. Po spočítání příslušných determinantů (viz přednáška) zjistíme, že jsou vidět pouze strana CB. $\square$

1.70. *Rovinný fotbalista vystřelí míč z bodu* $F = [1, 0]$ *ve směru* $(3, 4)$ *na bránu (úsečku) ohraničenou body* $A = [23, 36]$ *a* $B = [26, 30]$*. Směřuje míč do brány?*

Řešení. Vzhledem k tomu, že se situace odehrává v prvním kvadrantu, stačí uvažovat směrnice vektorů $\vec{FA}$, $(3,4)$, $\vec{FB}$. Tvoří-li (v tomto pořadí) buď rostoucí nebo klesající posloupnost, míč směřuje na bránu. Tato posloupnost je $36/22$, $4/3$, $30/25$, což je klesající posloupnost, míč tedy směřuje do brány. □

1.71. *Určete obsah čtyřúhelníka $ABCD$ s vrcholy $A = [1,0]$, $B = [11,13]$, $C = [2,5]$ a $D = [-2,-5]$.*

Řešení. Rozdělíme na dva trojúhelníky ABC a ACD. Jejich obsahy pak spočítáme pomocí patřičných determinantů, viz **??**

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 13 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{47}{2}.$$

□

1.72. *Buď dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ (vrcholy jsou označeny pořadě v kladném smyslu) se středem v bodě $[1,0]$ a vrcholem $A = [0,2]$ Určete souřadnice vrcholu C.*

Řešení. Souřadnice vrcholu C získáme otočením bodu A okolo středu S šestiúhelníka o $120°$ v kladném smyslu:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \cos(120°) & -\sin(120°) \\ \sin(120°) & \cos(120°) \end{pmatrix}(C-S)+S = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + [1,0] = [\frac{3}{2}-\sqrt{3}, -1-\frac{\sqrt{3}}{2}]. \end{aligned}$$

□

1.73. *Buď dán rovnostranný trojúhelník s vrcholy $[1,0]$ a $[0,1]$ ležící celý v prvním kvadrantu. Určete souřadnice jeho třetího vrcholu.*

Řešení. Třetí souřadnice $[\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}]$ (otáčíme o bod $[0,1]$ o $60°$ kolem bodu $[0,1]$ v kladném smyslu). □

1.74. *Určete souřadnice vrcholů trojúhelníka, který vznikne otočením rovnostranného trojúhelníka, jehož dva vrcholy jsou $A = [1,1]$ a $B = [2,3]$ (třetí pak v polorovině dané přímkou AB a bodem $S = [0,0]$) o $60°$ v kladném smyslu kolem bodu S.*

Řešení. Třetí vrchol trojúhelníka dostaneme např. otočením o $60°$ jednoho z vrcholů kolem druhého (ve správném smyslu). Hledané body mají souřadnice $[-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3}-\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}]$, $[1-\frac{3}{2}\sqrt{3}, \sqrt{3}+\frac{3}{2}]$. □

1.75. *Určete obsah trojúhelníka $A_2A_3A_{11}$, kde $A_0A_1\dots A_{11}$ jsou vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníka vepsaného do kružnice o poloměru* 1.

Řešení. Vrcholy dvanáctiúhelníka můžeme ztotožnit s dvanáctými odmocninami z čísla 1 v komplexní rovině. Zvolíme-li navíc $A_0 = 1$, pak můžeme psát $A_k = \cos(2k\pi/12) + i\sin(2k\pi/12)$. Pro vrcholy zkoumaného trojúhelníka máme: $A_2 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $A_3 = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$, $A_{11} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 - i/2$, neboli souřadnice těchto bodů v komplexní rovině jsou $A_2 = [1/2, \sqrt{3}/2]$, $A_3 = [0, 1]$, $A_{11} = [\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}]$. Podle vzorce pro obsah trojúhelníka je potom hledaný obsah S roven

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A_2 - A_{11} \\ A_3 - A_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{3-\sqrt{3}}{4}.$$

□

1.76. *Určete odchylku φ úhlopříček A_3A_7 a A_5A_{10} pravidelného dvanáctiúhelníka $A_0A_1A_2\dots$.*

Řešení. Odchylka nezávisí na velikosti daného dvanáctiúhelníka. Volme dvanáctiúhelník vepsaný do kružnice o poloměru 1. Jako v předchozím příkladě určíme souřadnice jeho vrcholů a podle vzorce snadno dopočítáme, že $\cos(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, tedy $\varphi = 75^\circ$.

Jiné řešení Úlohu lze řešit čistě metodami syntetické geometrie: označíme S střed dvanáctiúhelníka a T průsečík úhlopříček A_3A_7 a A_5A_{10}. Nyní $|\angle A_7A_5A_{10}| = 45^\circ$ (obvodový úhel příslušný středovému úhlu A_7SA_{10}, který je pravý), dále $|\angle A_5A_7A_3| = 30^\circ$ (obvodový úhel příslušný středovému úhlu A_5SA_3, jehož velikost je 60°). Velikost úhlu A_5TA_7 je pak doplňkem výše zmíněných úhlů do 180°, tedy je rovna 105°. Hledaná odchylka je pak $180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$. □

1.77. *Najděte matice A takové, že*

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nápověda: jaké geometrické zobrazení v rovině zadává matice A^2?

Řešení. A^2 je matice rotace o 60° v kladném smyslu, takže hledané matice jsou

$$A = \pm\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

tj. jsou to matice rotace o 30°, resp. o 210°. □

1.78. Rovnoběžníková rovnost. *Dokažme jako ilustraci našich nástrojů tzv. „rovnoběžníkovou rovnost": Jsou–li $u, v \in \mathbb{R}^2$, pak:*

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2.$$

Neboli součet druhých mocnin délek úhlopříček rovnoběžníka je roven dvojnásobku součtu druhých mocnin délek jeho stran.

Řešení. Rozepsáním obou stran do souřadnic $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ obdržíme:

$$\begin{aligned}
&2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \\
&= 2(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2) \\
&= u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2 + u_1^2 - 2u_1v_1 + \\
&+ v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 \\
&= (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 \\
&= \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2.
\end{aligned}$$

□

1.79. *Ukažte, že složením lichého počtu středových symetrií v rovině dostaneme opět středovou symetrii.*

Řešení. Středovou symetrii v rovině se středem S reprezentujme předpisem $X \mapsto S - (X - S)$, neboli $X \mapsto 2S - X$. (Obraz bodu X ve středové symetrii podle středu S dostaneme tak, že k souřadnicím bodu S přičteme souřadnice vektoru opačného k vektoru $X - S$.) Postupnou aplikací tří středových symetrií se středy S, T a U tak dostáváme $X \mapsto 2S - X \mapsto 2T - (2S - X) \mapsto 2U - (2T - (2S - X)) = 2(U - T + S) - X$, celkem $X \mapsto 2(U - T + S) - X$, což je středová symetrie se středem $S - T + U$. Složení libovolného lichého počtu středových symetrií tak postupně redukujeme až na složení tří středových symetrií, jde tedy o středovou symetrii (v principu se jedná o důkaz matematickou indukcí, zkuste si jej sami zformulovat). □

1.80. *Sestrojte* $(2n+1)$*-úhelník, jsou-li dány všechny středy jeho stran.*

Řešení. K řešení využijeme toho, že složením lichého počtu středových souměrností je opět středová souměrnost (viz předchozí příklad). Označme vrcholy hledaného $(2n + 1)$-úhelníka po řadě A_1, $A_2, \dots, A_{2n+1}$ a středy stran (počínaje středem A_1A_2) postupně S_1, $S_2, \dots S_{2n+1}$. Provedeme-li středové souměrnosti po řadě podle těchto středů, tak bod A_1 je zjevně pevným bodem výsledné středové symetrie, tedy jejím středem. K jeho nalezení tedy stačí provést uvedenou středovou souměrnost s libovolným bodem X roviny. Bod A_1 leží pak ve středu úsečky XX', kde X' je obrazem bodu X ve zmíněné středové symetrii. Další vrcholy $A_2, \dots, A_{2n+1}$ získáme zobrazováním bodu A_1 ve středových souměrnostech podle $S_1, \dots, S_{2n+1}$. □

6. Zobrazení a relace

1.81. *Rozhodněte, zda následující relace na množině M jsou relace ekvivalence:*

(1) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, kde $(f \sim g)$ pokud $f(0) = g(0)$.
(2) $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, kde $(f \sim g)$ pokud $f(0) = g(1)$.
(3) M je množina přímek v rovině, přičemž dvě přímky jsou v relaci, jestliže se neprotínají.
(4) M je množina přímek v rovině, přičemž dvě přímky jsou v relaci, jestliže jsou rovnoběžné.
(5) $M = \mathbb{N}$, kde $(m \sim n)$ pokud $S(m) + S(n) = 20$, přičemž $S(n)$ značí ciferný součet čísla n.
(6) $M = \mathbb{N}$, kde $(m \sim n)$ pokud $C(m) = C(n)$, kde $C(n)$ je ciferný pokud je $S(n) < 10$, jinak definujeme $C(n) = C(S(n))$ (je tedy $C(n) < 10$).

Řešení.

(1) Ano. Ověříme tři vlastnosti ekvivalence:
 i) Reflexivita: pro libovolnou reálnou funkci f je $f(0) = f(0)$.
 ii) Symetrie: jestliže platí $f(0) = g(0)$, pak i $g(0) = f(0)$.
 iii) Tranzitivita: jestliže platí $f(0) = g(0)$ a $g(0) = h(0)$, pak platí i $f(0) = h(0)$.
(2) Ne. Definovaná relace není reflexivní, např pro funkci sin máme $\sin 0 \neq \sin 1$ a není ani transitivní.
(3) Ne. Relace opět není reflexivní (každá přímka protíná sama sebe) ani transitivní.
(4) Ano. Třídy ekvivalence pak tvoří množinu neorientovaných směrů v rovině.
(5) Ne. Relace není reflexivní. $S(1) + S(1) = 2$.
(6) Ano.

□

Relace a zobrazení mezi konečnými množinami dávají vzniknout celé řadě kombinatorických otázek:

1.82. Počet injektivních zobrazení mezi množinami
Určete počet injektivních zobrazení množiny $\{1, 2, 3\}$ *do množiny* $\{1, 2, 3, 4\}$

Řešení. Libovolné injektivní zobrazení mezi uvažovanými množinami je dáno výběrem (uspořádané) trojice z množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ (prvky ve vybrané trojici budou po řadě obrazy čísel 1, 2, 3) a obráceně každé injektivní zobrazení nám zadává takovou trojici. Je tedy hledaných injektivních zobrazení stejně jako možností výběru uspořádaných trojic ze čtyř prvků, tedy $v(3, 4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. □

1.83. *Určete počet surjektivních zobrazení množiny* $\{1, 2, 3, 4\}$ *na množinu* $\{1, 2, 3\}$

Řešení. Hledaný počet určíme tak, že od počtu všech zobrazení odečteme ta, která nejsou surjektivní, t.j. ta, jejichž obor hodnot je buď jednoprvkovou nebo dvouprvkovou množinou. Všech zobrazení je $V(3, 4) = 3^4$, zobrazení, jejichž oborem hodnot je jednoprvková množina, jsou tři. Počet zobrazení jejichž oborem hodnot je dvouprvková množina je $\binom{3}{2}(2^4 - 2)$ ($\binom{3}{2}$ způsoby můžeme vybrat definiční obor a máme-li již dva prvky fixovány, máme $2^4 - 2$ možností, jak na ně zobrazit čtyři prvky). Celkem je tedy počet hledaných surjektivních zobrazení

$$3^4 - \binom{3}{2}(2^4 - 2) - 3 = 36. \tag{1.12}$$

□

1.84. Hasseův diagram uspořádání. *Hasseův diagram daného uspořádání $\prec$ na n-prvkové množině M je diagram s n vrcholy (každý vrchol odpovídá právě jednomu prvku množiny), přičemž dva vrchly (prvky) a, b jsou spojeny (víceméně svislou) čarou (tak, že a je „dole“ a b „nahoře“), právě když b pokrývá a, tj. $a \prec b$ a neexistuje $c \in M$ tak, že $a \prec c$ a $c \prec b$.*

1.85. *Určete počet relací uspořádání na čtyřprvkové množině.*

Řešení. Postupně projdeme všechny možné Hasseovy diagramy uspořádání na nějaké čtyřprvkové množině M a spočítáme, kolik různých uspořádání (tj. podmnožin množiny $M \times M$) má daný Hasseův diagram, viz obr.:

Celkem tedy je 219 uspořádání na čtyřprvkové množině. □

1.86. *Určete počet relací ekvivalence na množině* $\{1, 2, 3, 4\}$.

Řešení. Ekvivalence můžeme počítat podle toho, kolik prvků mají jejich třídy rozkladu. Pro počty prvků tříd rozkladu ekvivalencí na čtyřprvkové množině jsou tyto možnosti:

Počty prvků ve třídách rozkladu	počet ekvivalencí daného typu
1,1,1,1	1
2,1,1	$\binom{4}{2}$
2,2	$\frac{1}{2}\binom{4}{2}$
3,1	$\binom{4}{1}$
4	1

Celkem tedy máme 15 různých ekvivalencí. □

1.87. *Kolik existuje relací na n-prvkové množině?*

Řešení. Relace je libovolná podmnožina kartézského součinu množiny se sebou samou. Tento kartézský součin má n^2 prvků a je tedy počet všech relací na n-prvkové množině 2^{n^2}. □

1.88. *Kolik existuje reflexivních relací na n-prvkové množině?*

Řešení. Relace na množině M je reflexivní, právě když je diagonální relace $\Delta_M = \{(a, a), kdea \in M\}$ její podmnožinou. U zbylých $n^2 - n$ uspořádaných dvojic v kartézském součinu $M \times M$ máme nezávislou volbu, jestli daná dvojice v dané relaci bude či ne. Celkem tedy máme 2^{n^2-n} různých reflexivních relací na n-prvkové množině. □

1.89. *Kolik existuje symetrických relací na n-prvkové množině?*

Řešení. Relace na množině M je symetrická, právě když je její průnik s každou množinou $\{(a, b), (b, a)$, kde $a \neq b,\ a, b \in M\}$ buď celá daná dvouprvková množina, nebo je tento průnik prázdný. Dvouprvkových podmnožin množiny M je $\binom{n}{2}$ a pokud kromě průniků s těmito množinami ještě určíme průnik dané relace s diagonální relací $\Delta_M = \{(a, a)$, kde $a \in M\}$, je tímto daná relace jednoznačně určena. Celkem můžeme provést $\binom{n}{2} \cdot n$ nezávislých voleb mezi dvěma alternativami: každá množina typu $\{(a, b), (b, a) | a, b \in M, a \neq b\}$ buď je podmnožinou dané relace, nebo ani jeden z jejích prvků v dané relaci neleží a každá dvojice (a, a), $a \in M$, potom také buď v relaci leží nebo ne. Celkem tedy máme

$$2^{\binom{n}{2}+n}$$

symetrických relací na n-prvkové množině. □

1.90. *Kolik existuje antisymetrických relací na n-prvkové množině?*

Řešení. Relace na množině M je antisymetrická právě když její průnik s každou množinou $\{(a, b), (b, a)\}$ $a \neq b$, $a, b \in M$ není dvojprvkový (jsou tedy tři možnosti jak průnik vypadá, buď je to množina $\{(a, b)\}$, nebo $\{(b, a)\}$, nebo je průnik prázdný). Průnik s diagonální relací pak může být libovolný. Určením těchto všech průniků je relace jednoznačně určena. Celkem máme

$$3^{\binom{n}{2}}2^n$$

antisymetrických relací na n-prvkové množině. □

1.91. *Určete počet relací uspořádání na tříprvkové množině.*

Řešení. 19. □

1.92. *Určete počet relací uspořádání na množině* $\{1, 2, 3, 4\}$ *takových, že prvky* 1 *a* 2 *jsou nesrovnatelné (tedy neplatí* $1 \prec 2$ *ani* $2 \prec 1$*, kde* $\prec$ *je označení uvažované relace uspořádání).*

Řešení. 87. □

KAPITOLA 2

Elementární lineární algebra

1. Vektory a matice

Se soustavami lineárních rovnic se čtenář jistě již setkal na střední škole. Řešení soustavy lineárních rovnic je jedním z nejjednodušších problémů, se kterými se člověk může setkat v praxi.

2.1. A teď vám to pěkně natřeme. Firma zabývající se velkoplošnými nátěry si objednala 810 litrů barvy, která má obsahovat stejné množství červené, zelené a modré barvy (tj. 810 litrů černé barvy). Obchod může splnit tuto zakázku smícháním běžně prodávaných barev (má skladem jejich dostatečné zásoby), a to

- načervenalé barvy – obsahuje 50 % červené, 25 % zelené a 25 % modré barvy;
- nazelenalé barvy – obsahuje 12,5 % červené, 75 % zelené a 12,5 % modré barvy;
- namodralé barvy – obsahuje 20 % červené, 20 % zelené a 60 % modré barvy.

Kolik litrů od každé z uskladněných barev se musí smíchat, aby byly splněny požadavky zákazníka?

Řešení. Označme jako

- x – množství (v litrech) načervenalé barvy, které se použije;
- y – množství (v litrech) nazelenalé barvy, které se použije;
- z – množství (v litrech) namodralé barvy, které se použije.

Smícháním barev chceme získat barvu, která bude obsahovat 270 litrů červené barvy. Uvědomme si, že načervenalá barva obsahuje 50 % červené, nazelenalá obsahuje 12,5 % červené a namodralá 20 % červené barvy. Musí tudíž platit

$$0,5x \quad + \quad 0,125y \quad + \quad 0,2z \quad = \quad 270.$$

Analogicky požadujeme (pro zelenou a modrou barvu)

$$\begin{aligned} 0,25x &+ 0,75y + 0,2z = 270, \\ 0,25x &+ 0,125y + 0,6z = 270. \end{aligned}$$

Rozšířenou matici tohoto systému postupně upravíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,125 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,75 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,125 & 0,6 & 270 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 1 & 3 & 0,8 & 1\,080 \\ 1 & 0,5 & 2,4 & 1\,080 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 2,75 & 0,4 & 540 \\ 0 & 0,25 & 2 & 540 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 11 & 1,6 & 2\,160 \\ 0 & 1 & 8 & 2\,160 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 1 & 8 & 2\,160 \\ 0 & 11 & 1,6 & 2\,160 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 0 & 1 & 8 & 2\,160 \\ 0 & 0 & -86,4 & -21\,600 \end{array}\right).$$

Odtud již zpětně vypočítáme

$$z = \frac{-21\,600}{-86,4} = 250,$$
$$y = 2\,160 - 8 \cdot 250 = 160,$$
$$x = 540 - 0,4 \cdot 250 - 0,25 \cdot 160 = 400.$$

Je tedy potřeba smísit po řadě 400 l, 160 l, 250 l uvedených barev. □

2.2. Účastníci zájezdu. Dvoudenního autobusového zájezdu se zúčastnilo 45 osob. První den se platilo vstupné na rozhlednu 30 Kč za dospělého, 16 Kč za dítě a 24 Kč za důchodce, celkem 1 116 Kč. Druhý den se platilo vstupné do botanické zahrady 40 Kč za dospělého, 24 Kč za dítě a 34 Kč za důchodce, celkem 1 542 Kč. Kolik bylo mezi výletníky dospělých, dětí a důchodců?

Řešení. Zaveďme proměnné

x udávající „počet dospělých";
y udávající „počet dětí";
z udávající „počet důchodců".

Zájezdu se zúčastnilo 45 osob, a proto

$$x + y + z = 45.$$

Celkové vstupné na rozhlednu a do botanické zahrady při zavedení našich proměnných a při zachování pořadí činí $30x + 16y + 24z$ a $40x + 24y + 34z$. My je ovšem známe (1 116 Kč a 1 542 Kč). Máme tak

$$\begin{aligned} 30x + 16y + 24z &= 1\,116, \\ 40x + 24y + 34z &= 1\,542. \end{aligned}$$

Soustavu tří lineárních rovnic zapíšeme maticově jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 1\,116 \\ 1\,542 \end{pmatrix}.$$

Řešením je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 1\,116 \\ 1\,542 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 132 \\ 72 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Slovně vyjádřeno, zájezdu se zúčastnilo 22 dospělých, 12 dětí, 11 důchodců. □

V předchozích příkladech měla úloha vždy jedno řešení. Musí tomu tak vždy být? Nikoliv. Jak možná čtenář již ví, tak systém lineárních rovnic buď nemá řešení, nebo má jedno řešení, nebo jich má nekonečně mnoho (například nemůže mít právě dvě řešení). To je dáno tím, že prostor řešení je buď vektorový prostor (pravá strana všech rovnic v systému je nulová, hovoříme o *homogenním* systému lineárních rovnic) nebo afinní prostor (pravá strana alespoň jedné z rovnic je nenulová, hovoříme o *nehomogenním* systému lineárních rovnic). Ukažme si tedy různé možné typy řešení soustavy lineárních rovnic na příkladech. Při řešení budeme využívat maticového zápisu.

2.3. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & + & 16x_2 & + & 7x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0, \\ -7x_1 & + & 7x_2 & + & -10x_3 & = & 0. \end{array}$$

Řešení. Uvedenou soustavu rovnic zapíšeme maticí tak, že první rovnice bude odpovídat prvnímu řádku matice, druhá rovnice druhému řádku atd. a v prvním sloupci budou koeficienty u x_1, ve druhém sloupci koeficienty u x_2, až ve čtvrtém sloupci (za svislou čarou oddělující levou stranu rovnic od pravé) absolutní členy. To znamená, že matice zadané soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & 7 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ -7 & 7 & -10 & 0 \end{array}\right), \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 16 & 7 \\ 3 & -5 & 4 \\ -7 & 7 & -10 \end{pmatrix}.$$

Protože řešíme homogenní soustavu, můžeme (a budeme) nulový sloupec na pravé straně vynechávat. Řešení nalezneme převodem na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových transformací, které odpovídají záměně pořadí rovnic, vynásobení rovnice nenulovým číslem a přičítání násobků rovnic. Navíc můžeme kdykoli od maticového zápisu přejít zpět k zápisu rovnic s neznámými x_i. Nejprve docílíme toho, aby se proměnná x_1 vyskytovala pouze v první rovnici. Zřejmě postačuje $(-3/2)$násobek prvního řádku přičíst ke druhému a ke třetímu řádku a jeho $(7/2)$násobek k poslednímu řádku, což v maticovém zápisu dává

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 16 & 7 \\ 3 & -5 & 4 \\ -7 & 7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 35/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že druhá, třetí a čtvrtá rovnice jsou násobky rovnice $7x_2 + x_3 = 0$. Při maticovém zápisu můžeme např. $(1/5)$násobek druhého řádku přičíst ke třetímu a jeho $(-1/5)$násobek k poslednímu řádku, čímž obdržíme schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 35/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 35/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

který jsme v posledním kroku zjednodušili tak, že jsem druhý řádek (druhou rovnici) vynásobili číslem $2/5$. Přestože byly zadány čtyři rovnice pro tři neznámé, má celá soustava nekonečně mnoho řešení, neboť pro libovolné $x_3 \in \mathbb{R}$ mají rovnice

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0, \\ & & 7x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

řešení. Nahradíme tak proměnnou x_3 parametrem $t \in \mathbb{R}$ a vyjádříme

$$x_2 = -\frac{1}{7}\,x_3 = -\frac{1}{7}\,t \quad \text{a} \quad x_1 = \frac{1}{2}\,(x_2 - 3x_3) = -\frac{11}{7}\,t.$$

Pokud ještě nahradíme $t = -7s$, obdržíme výsledek v jednoduchém tvaru

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (11s,\ s,\ -7s)\,, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

□

2.4. Vypočtěte

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -3, \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Řešení. Zadanou soustavu lineárních rovnic zapíšeme ve tvaru rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right),$$

kterou pomocí elementárních řádkových transformací postupně převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 11 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right).$$

Nejdříve jsme přitom (-2)násobek prvního řádku přičetli ke druhému a jeho 3násobek ke třetímu. Poté jsme sečetli druhý a třetí řádek (součet napsali do třetího řádku) a druhý řádek vynásobili číslem $-1/7$. Přejdeme nyní zpět k soustavě rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ & & & & 4x_3 & = & -4. \end{array}$$

Ihned vidíme, že $x_3 = -1$. Dosadíme-li $x_3 = -1$ do rovnice $x_2 + x_3 = 1$, dostaneme $x_2 = 2$. Podobně dosazení získaných hodnot $x_3 = -1$, $x_2 = 2$ do první rovnice dává $x_1 = 1$. □

2.5. Nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & -8, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení. Soustavě rovnic odpovídá rozšířená matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Záměnou pořadí řádků (rovnic) potom obdržíme matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right),$$

kterou převedeme na schodovitý tvar postupným přičítáním násobku některého řádku k řádku jinému. Nejprve přičteme (-2)násobek, 2násobek a (-3)násobek prvního řádku po řadě ke druhému, třetímu a čtvrtému řádku, čímž získáme 0 pod prvním nenulovým číslem v prvním řádku. Analogicky poté získáme 0 pod prvním nenulovým číslem ve druhém řádku tak, že tento řádek a jeho (-1)násobek přičteme po řadě ke třetímu a čtvrtému řádku. Takto dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud vyplývá (čtvrtý řádek je pouhou kopií třetího – lze jej tedy „vynulovat“), že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení, neboť dostáváme tři rovnice pro čtyři neznámé, které očividně budou mít právě jedno řešení pro každou volbu proměnné $x_4 \in \mathbb{R}$. Neznámou x_4 proto nahradíme parametrem $t \in \mathbb{R}$ a od maticového zápisu přejdeme zpět k rovnicím

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & t & = & -2, \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & + & t & = & 1, \\ & & & & 3x_3 & - & 3t & = & -3. \end{array}$$

Z poslední rovnice máme $x_3 = t - 1$. Dosazení za x_3 do druhé rovnice potom dává

$$3x_2 - 3t + 3 + t = 1, \quad \text{tj.} \quad x_2 = \frac{1}{3}\,(2t-2)\,.$$

Konečně podle první rovnice je

$$x_1 - \frac{1}{3}(2t-2) + t - 1 - t = -2, \quad \text{tj.} \quad x_1 = \frac{1}{3}(2t-5)\,.$$

Množinu řešení můžeme tudíž zapsat (pro $t = 3s$) ve tvaru

$$\left\{ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \left(2s - \frac{5}{3},\ 2s - \frac{2}{3},\ 3s-1,\ 3s\right),\ \ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nyní se vraťme k rozšířené matici naší soustavy a upravujme ji dále užitím řádkových transformací tak, aby (při schodovitém tvaru) první nenulové číslo každého řádku bylo právě číslo 1 a aby všechna ostatní čísla v jeho sloupci byla 0. Platí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

přičemž nejdříve jsme vynásobili druhý a třetí řádek číslem $1/3$, pak přičetli třetí řádek ke druhému a jeho (-1)násobek k prvnímu a na závěr přičetli druhý řádek k prvnímu. Z poslední matice snadno dostáváme výsledek

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Stačí si pouze uvědomit, že proměnnou, které odpovídá ve schodovitém tvaru sloupec bez prvního nenulového čísla nějakého řádku, nahrazujeme za parametr a převádíme ji na pravou stranu rovnic (bereme (-1)násobek). □

2.6. Určete řešení systému rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 8, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení. Uvědomme si, že soustava rovnic v tomto příkladu se od soustavy z příkladu předešlého liší pouze v hodnotě 8 (místo -8) na pravé straně první rovnice. Provedeme-li totožné řádkové úpravy jako v minulém příkladu, obdržíme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & 8 \end{array}\right) \dots$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right),$$

kde poslední úpravou bylo odečtení třetího řádku od čtvrtého. Ze čtvrté rovnice $0 = 16$ vyplývá, že soustava nemá řešení. Vyzdvihněme, že při úpravě na schodovitý tvar obdržíme rovnici $0 = a$ pro nějaké $a \neq 0$ (tj. nulový řádek na levé straně a nenulové číslo za svislou čarou) právě tehdy, když soustava nemá řešení. □

2.7. Řešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3, \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 5, \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0, \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & & - & 6x_5 & = & 2. \end{array}$$

Řešení. Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -6 & 2 \end{array}\right).$$

Přičtením prvního řádku ke třetímu a jeho dvojnásobku ke čtvrtému a poté přičtením $(-5/2)$násobku druhého řádku ke čtvrtému obdržíme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -9/2 \end{array}\right).$$

Poslední řádek je zřejmě násobkem předposledního, a tak jej můžeme vynechat. První nenulové číslo prvního řádku je v prvním sloupci, druhého řádku ve druhém sloupci a třetího řádku ve čtvrtém sloupci. Proto proměnné x_3 a x_5 (odpovídající třetímu a pátému sloupci) nahradíme reálnými parametry t, s. Uvažujeme tak soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & t & + & x_4 & - & 2s & = & 3, \\ & & 2x_2 & + & 2t & + & 2x_4 & - & 4s & = & 5, \\ & & & & & & 2x_4 & & & = & 3. \end{array}$$

Víme tedy, že $x_4 = 3/2$. Druhá rovnice dává

$$2x_2 + 2t + 3 - 4s = 5, \quad \text{tj.} \quad x_2 = 1 - t + 2s.$$

Z první potom plyne

$$x_1 + 1 - t + 2s + t + 3/2 - 2s = 3, \quad \text{tj.} \quad x_1 = 1/2.$$

Celkem máme
(2.1)

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (1/2,\ 1 - t + 2s,\ t,\ 3/2,\ s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Také v tomto příkladu znovu uvažujme rozšířenou matici a převeďme ji pomocí řádkových úprav do schodovitého tvaru, kde první nenulové číslo v každém řádku je 1 a kde ve sloupci, ve kterém tato 1 je, jsou ostatní čísla 0. Ještě připomeňme, že čtvrtou rovnici, jež je kombinací prvních třech rovnic, budeme vynechávat. Po řadě vynásobením druhého a třetího řádku číslem 1/2, odečtením třetího řádku od druhého a od prvního a odečtením druhého řádku od prvního získáme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array}\right).$$

Pokud opět zvolíme $x_3 = t$, $x_5 = s$ ($t, s \in \mathbb{R}$), dostaneme odsud obecné řešení (2.1) ve stejném tvaru, a to bezprostředně. Uvažte příslušné rovnice

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & 1/2, \\ & x_2 & + & t & \quad - \ 2s & = & 1, \\ & & & x_4 & & = & 3/2. \end{array}$$

□

2.8. Najděte řešení soustavy lineárních rovnic zadané rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right).$$

Řešení. Uvedenou rozšířenou matici upravíme na schodovitý tvar. Nejprve první a třetí řádek opíšeme a do druhého řádku napíšeme součet (-2)násobku prvního a 3násobku druhého řádku a do čtvrtého řádku součet 5násobku prvního a (-3)násobku posledního řádku. Takto získáme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 14 & 0 \end{array}\right).$$

Opsání prvních dvou řádků a přičtení 5násobku druhého řádku k 3násobku třetího a jeho 2násobku ke čtvrtému řádku dává

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -17 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array}\right).$$

Pokud první, druhý a čtvrtý řádek opíšeme a ke třetímu přičteme čtvrtý, dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -17 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array}\right).$$

Dále je (řádkové úpravy jsou již „obvyklé“)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 19 \end{array}\right).$$

Vidíme, že soustava má právě 1 řešení. Určeme ho zpětnou eliminací

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Výsledek je tak

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1.$$

□

2.9. Uveďte všechna řešení homogenního systému

$$x + y = 2z + v, \quad z + 4u + v = 0, \quad -3u = 0, \quad z = -v$$

4 lineárních rovnic 5 proměnných x, y, z, u, v.

Řešení. Systém přepíšeme do matice tak, že v prvním sloupci budou koeficienty u x, ve druhém sloupci koeficienty u y, až v pátém sloupci koeficienty u v, přičemž všechny členy v každé rovnici převedeme na levou stranu. Tímto způsobem přísluší systému matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přičteme-li (4/3)násobek třetího řádku ke druhému a odečteme-li poté druhý řádek od čtvrtého, obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále vynásobíme třetí řádek číslem $-1/3$ a přičteme 2násobek druhého řádku k prvnímu, což dává

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z poslední matice můžeme přímo vypsat všechna řešení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

neboť máme matici ve schodovitém tvaru, přičemž první nenulové číslo v každém řádku je 1 a ve sloupci, kde se taková 1 nachází, jsou na ostatních pozicích 0. Výše uvedené řešení ve tvaru lineární kombinace dvou vektorů je určeno právě sloupci bez prvního nenulového čísla nějakého řádku, tj. druhým a pátým sloupcem, kdy volíme 1 jako druhou složku pro druhý sloupec a jako pátou složku pro pátý sloupec a kdy čísla v příslušném sloupci bereme s opačným znaménkem a umisťujeme je na pozici danou sloupcem, ve kterém je první 1 v jejich řádku. Dodejme, že výsledek je ihned možné přepsat do tvaru

$$(x,\ y,\ z,\ u,\ v) = (-t - s,\ t,\ -s,\ 0,\ s)\,, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

□

2.10. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & ax_2 & - & 2x_3 & = & b, \\ x_1 & + & (1-a)x_2 & & & = & b-3, \\ x_1 & + & (1-a)x_2 & + & ax_3 & = & 2b-1 \end{array}$$

(a) právě 1 řešení;

(b) žádné řešení;

(c) alespoň 2 řešení?

Řešení. Soustavu „tradičně“ přepíšeme do rozšířené matice a upravíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 1 & 1-a & 0 & b-3 \\ 1 & 1-a & a & 2b-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a & b+2 \end{array}\right).$$

Dodejme, že v prvním kroku jsme první řádek odečetli od druhého a od třetího a ve druhém kroku pak druhý od třetího. Vidíme, že soustava bude mít právě jedno řešení (které lze určit zpětnou eliminací) tehdy a jenom tehdy, když $a \neq 0$. Pro $a = 0$ totiž ve třetím sloupci není první nenulové číslo nějakého řádku. Je-li $a = 0$ a $b = -2$, dostáváme nulový řádek, kdy volba $x_3 \in \mathbb{R}$ jako parametru dává nekonečně mnoho různých řešení. Pro $a = 0$ a $b \neq -2$ poslední rovnice $a = b + 2$ nemůže být splněna – soustava nemá řešení.

Poznamenejme, že pro $a = 0$, $b = -2$ jsou řešeními

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-2 + 2t,\ -3 - 2t,\ t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

a pro $a \neq 0$ je jediným řešením trojice

$$\left(\frac{-3a^2 - ab - 4a + 2b + 4}{a},\ -\frac{2b + 3a + 4}{a},\ \frac{b+2}{a}\right).$$

□

2.11. Zjistěte počet řešení soustav

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & \sqrt{5}x_2 & + & 11x_3 & = & -9, \\ x_1 & & & - & 5x_3 & = & -9, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & -7; \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 12x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 4; \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 2x_2 & - & 12x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & = & 0. \end{array}$$

Řešení. Vektory $(1, 0, -5)$, $(1, 0, 2)$ jsou očividně lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého) a vektor $(12, \sqrt{5}, 11)$ nemůže být jejich lineární kombinací (jeho druhá složka je nenulová), a proto matice, jejímiž řádky jsou tyto tři lineárně nezávislé vektory, je invertibilní. Soustava ve variantě (a) má tedy právě jedno řešení.

U soustav ve variantách (b), (c) si stačí povšimnout, že je

$$(4, 2, -12) = -2(-2, -1, 6).$$

V případě (b) tak sečtení první rovnice s dvojnásobkem třetí dává $0 = 8$ – soustava nemá řešení; v případě (c) je třetí rovnice násobkem první – soustava má zřejmě nekonečně mnoho řešení. $\square$

2.12. Najděte (libovolný) lineární systém, jehož množina řešení je právě

$$\{(t+1,\ 2t,\ 3t,\ 4t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Řešení. Takovým systémem je např.

$$2x_1 - x_2 = 2, \quad 2x_2 - x_4 = 0, \quad 4x_3 - 3x_4 = 0.$$

Těmto rovnicím totiž uvedené řešení vyhovuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a vektory

$$(2, -1, 0, 0), \quad (0, 2, 0, -1), \quad (0, 0, 4, -3)$$

zadávající levé strany rovnic jsou zřejmě lineárně nezávislé (množina řešení obsahuje jeden parametr). $\square$

2.13. Nalezněte libovolnou matici B, pro kterou je matice $C = B \cdot A$ ve schodovitém tvaru, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Budeme-li postupně matici A násobit zleva elementárními maticemi (uvažte, jakým řádkovým úpravám toto násobení matic odpovídá)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obdržíme

$$B = E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & -5/12 & 0 \\ 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.14. Stanovte hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poté stanovte počet řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5, \\ + 2x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

a také všechna řešení systému

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a systému

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -4, \\ x_1 - x_2 &= 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Řešení. Neboť je

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

jsou sloupce matice A lineárně nezávislé, a tudíž se její hodnost rovná jejímu rozměru.

První z uvedených třech systémů je zadán rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Ovšem levá strana je právě A^T s determinantem $|A^T| = |A| \neq 0$. Existuje tedy matice $\left(A^T\right)^{-1}$ a soustava má právě 1 řešení

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T = \left(A^T\right)^{-1} \cdot (4, 5, 1, 3)^T .$$

Druhý ze systémů má totožnou levou stranu (určenou maticí A^T) s prvním. Protože absolutní členy na pravé straně lineárních systémů neovlivňují počet řešení a protože každý homogenní systém má nulové řešení, dostáváme jako jediné řešení druhého systému uspořádanou čtveřici

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (0, 0, 0, 0) .$$

Třetí systém má rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right),$$

což je matice A (pouze poslední sloupec je uveden za svislou čarou). Pokud budeme tuto matici upravovat na schodovitý tvar, musíme obdržet řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right), \quad \text{kde} \quad a \neq 0.$$

Víme totiž, že sloupec na pravé straně není lineární kombinací sloupců na levé straně (hodnost matice je 4). Tento systém nemá řešení. □

2.15. Vyřešte systém homogenních lineárních rovnic zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{3} & -2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Řešeními jsou právě všechny skalární násobky vektoru

$$\left(1+\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ 0,\ 1,\ 0\right).$$

□

2.16. Určete všechna řešení systému

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1. \end{array}$$

Řešení. Výsledek je

$$x_1 = 1+t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

□

2.17. Vyřešte

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 5y & + & 2u & + & 4z & = & 2, \\ 5x & + & 7y & - & 4u & - & 6z & = & 3, \\ 7x & - & 4y & + & u & + & 3z & = & 5. \end{array}$$

Řešení. Soustava nemá řešení. □

2.18. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 8, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 4, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \end{array}$$

třech proměnných x_1, x_2, x_3.

Řešení. Soustava má řešení, protože je

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

□

2.19. Stanovte počet řešení 2 soustav 5 lineárních rovnic

$$A^T \cdot x = (1, 2, 3, 4, 5)^T, \quad A^T \cdot x = (1, 1, 1, 1, 1)^T,$$

kde

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Systém lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2, \\ 7x_1 & & & + & 4x_3 & = & 3, \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & = & 4, \\ & & x_2 & & & = & 5 \end{array}$$

nemá řešení, zatímco systém

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1, \\ 7x_1 & & & + & 4x_3 & = & 1, \\ 5x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1, \\ & & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

má právě 1 řešení $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. □

2.20. Nechť je dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Najděte taková reálná čísla b_1, b_2, b_3, aby systém lineárních rovnic $A \cdot x = b$ měl:

(a) nekonečně mnoho řešení;
(b) právě jedno řešení;
(c) žádné řešení;
(d) právě 4 řešení.

Řešení. Správné odpovědi zní:

(a) $b_1 = b_2 + b_3$;
(b) nelze;
(c) $b_1 \neq b_2 + b_3$;
(d) nelze.

□

2.21. Vyjádřete řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ve které $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení. Množina všech řešení je

$$\{(-10t,\ (a+4)t,\ (3a-8)t)\,;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Jak popsat analyticky shodná zobrazení v rovině či prostoru jako je rotace, osová symetrie či zrcadlení, nebo projekci třírozměrného prostoru na dvojrozměrné plátno? Jak popsat zvětšení obrázku? Co mají společného? Jsou to všechno lineární zobrazení. Co to znamená? Zachovávají jistou strukturu roviny či prostoru. Jakou strukturu? Strukturu vektorového prostoru. Každý bod v rovině či prostoru je popsán dvěma či třemi souřadnicemi. Pokud zvolíme počátek souřadnic, tak má smysl mluvit o tom, že nějaký bod je dvakrát dál od počátku stejným směrem než jiný bod. Také víme, kam se dostaneme, posuneme-li se o nějaký úsek v jistém směru a pak o jiný úsek v jiném směru. Tyto vlastnosti můžeme zformalizovat, hovoříme-li o vektorech v rovině, či prostoru a o jejich násobcích, či součtech. Lineární zobrazení má pak tu vlastnost, že obraz součtu vektorů je součet obrazů sčítaných vektorů a obraz násobku vektoru je ten stejný násobek obrazu násobeného vektoru. Tyto vlastnosti právě mají zobrazení zmíněná v úvodu tohoto odstavce. Takové zobrazení je pak jednoznačně určeno tím, jak se chová na vektrorech nějaké báze (to je v rovině obrazem dvou vektorů neležících na přímce, v prostoru obrazem tří vektorů neležích v rovině).

A jak tedy zapsat nějaké lineární zobrazení f na vektorovém prostoru V? Začněme pro jednoduchost s rovinou $\mathbb{R}^2$: nechť obraz bodu (vektoru) $(1, 0)$ je (a, b) a obraz bodu $(0, 1)$ je (c, d). Tím už je jednoznačně určený obraz libovolného bodu o souřadnicích (u, v): $f((u, v)) = f(u(1, 0) + v(0, 1)) = uf(1, 0) + vf(1, 0) = (ua, ub) + (vc, vd) = (au + cv, bu + dv)$, což můžeme výhodně zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + cv \\ bu + dv \end{pmatrix}$$

Je tedy lineární zobrazení jednoznačně dané maticí. Navíc pokud máme další lineární zobrazení g, dané maticí $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, tak snadno spočítáme (čtenář si jistě ze zájmu sám ověří), že jejich složení $g \circ f$ je dáno maticí $\begin{pmatrix} ae+cg & af+ch \\ be+cg & be+dv \end{pmatrix}$.

To nás tedy ponouká k tomu, abychom násobení matic definovali tímto způsobem, tedy aby aby aplikace zobrazení na vektor byla dána maticovým násobením dané matice s vektorem a aby složení zobrazení bylo dáno součinem odpovídajích matic. Obdobně v prostorech vyšší dimenze. Zároveň nám to zajistí, že násobení matic bude stejně jako skládání zobrazení asociativní a stejně jako skládání zobrazení nebude komutativní.

To je tedy další z motivací, proč se zabývat vektorovými prostory a proč je s pojmem vektorového prostoru úzce spojen pojem matice. Dále si samozřejmě ukážeme celou řadu jiných využití počítání s maticemi a vektory.

2.22. Výpočet inverzní matice. Spočtěte inverzní matice k maticím

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poté určete matici $\left(A^T \cdot B\right)^{-1}$.

Řešení. Inverzní matici nalezneme tak, že vedle sebe napíšeme matici A a matici jednotkovou. Pomocí řádkových operací pak převedeme matici A na jednotkovou. Tímto matice jednotková přejde na matici A^{-1}. Postupnými úpravami dostáváme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right),$$

přičemž v prvním kroku jsme odečetli od prvního řádku třetí, ve druhém jsem (-5)násobek prvního přičetli ke druhému a současně jeho (-3)násobek ke třetímu, ve třetím kroku jsme odečetli od druhého řádku třetí, ve čtvrtém jsem (-2)násobek druhého přičetli ke třetímu, v pátém kroku jsme (-5)násobek třetího řádku přičetli ke druhému a jeho 2násobek k prvnímu, v posledním kroku jsme pak zaměnili druhý a třetí řádek. Zdůrazněme výsledek

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

Upozorněme, že při určování matice A^{-1} jsme díky vhodným řádkovým úpravám nemuseli počítat se zlomky. Přestože bychom si mohli obdobně počínat při určování matice B^{-1}, budeme raději provádět více názorné (nabízející se) řádkové úpravy. Platí

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right),$$

tj.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Využitím identity

$$\left(A^T \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot \left(A^T\right)^{-1} = B^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^T$$

a znalosti výše vypočítaných inverzních matic lze obdržet

$$\left(A^T \cdot B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -4 & -2 & 11 \\ 3 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -9 & 42 \\ -10 & -5 & 27 \\ 17 & 10 & -49 \end{pmatrix}.$$

□

Vlastnosti vektorového prostoru, kterých jsme si všimli u roviny či třírozměrného prostoru, ve kterém žijeme, má celá řada jiných množin. Ukažme si to na příkladech:

2.23. Vektorový prostor ano či ne? Rozhodněte o následujících množinách, jestli jsou vektorovými prostory nad tělesem reálných čísel:

(1) Množina řešení homogenní diferenční rovnice.
(2) Množina řešení nehomogenní diferenční rovnice.
(3) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f(1) = f(2) = c, c \in \mathbb{R}\}$

Řešení. (1) Ano. Množina řešení, tedy množina posloupností vyhovujících dané diferenční homogenní rovnici, je evidentně uzavřená vzhledem ke sčítání i násobení reálným číslem: mějme posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ vyhovující stejné homogenní diferenční rovnici, tedy

$$\begin{aligned} a(n)x_n + a(n-1)x_{n-1} + \cdots + a(1)x_1 &= 0 \\ a(n)y_n + a(n-1)y_{n-1} + \cdots + a(1)y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$a(n)(x_n + y_n) + a(n-1)(x_{n-1} + y_{n-1}) + \cdots + a(1)(x_1 + y_1) = 0,$$

tedy i posloupnost $(x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}$, vyhovuje stejné diferenční rovnici. Rovněž tak pokud posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje dané rovnici, tak i posloupnost $(kx_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

(2) Ne. Součet dvou řešení nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} a(n)x_n + a(n-1)x_{n-1} + \cdots + a(1)x_1 &= c \\ a(n)y_n + a(n-1)y_{n-1} + \cdots + a(1)y_1 &= c, \quad c \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

vyhovuje rovnici

$$a(n)(x_n + y_n) + a(n-1)(x_{n-1} + y_{n-1}) + \cdots + a(1)(x_1 + y_1) = 2c,$$

zejména pak nevyhovuje původní nehomogenní rovnici.

(3) Je to vektrorový prostor právě, když $c = 0$. Vezme-li dvě funkce f a g z dané množiny, pak $(f + g)(1) = (f + g)(2) = f(1) + g(1) = 2c$. Má-li funkce $f + g$ být prvkem dané množiny, musí být $(f + g)(1) = c$, tedy $2c = c$, tedy $c = 0$. □

2.24. Zjistěte, zda je množina

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ |\,x_1\,| = |\,x_2\,| = |\,x_3\,|\}$$

podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a množina

$$U_2 = \{ax^2 + c;\ a, c \in \mathbb{R}\}$$

podprostorem prostoru polynomů stupně nejvýše 2.

Řešení. Množina U_1 není vektorovým (pod)prostorem. Vidíme např., že je

$$(1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2) \notin U_1.$$

Množina U_2 ovšem podprostor tvoří (nabízí se přirozené ztotožnění s $\mathbb{R}^2$), protože

$$\left(a_1x^2 + c_1\right) + \left(a_2x^2 + c_2\right) = (a_1 + a_2)\,x^2 + (c_1 + c_2),$$

$$k \cdot \left(ax^2 + c\right) = (ka)\,x^2 + kc$$

pro všechna čísla $a_1, c_1, a_2, c_2, a, c, k \in \mathbb{R}$. □

2.25. Je množina $V = \{(1, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (1, y) \oplus (1, z) = (1, z + y) \quad \text{pro všechna}$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad z \odot (1, y) = (1, y \cdot z) \quad \text{pro všechna}$$

vektorovým prostorem?

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. □

2.26. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, 1, a, 1)$, $(1, b, 1, 1)$, $(c, 1, 1, 1)$ lineárně závislé?

Řešení. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \qquad a = c = 1, \qquad b = c = 1.$$

□

2.27. Nechť je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze složená z vektorů u, v, w, z. Zjistěte, zda jsou vektory

$$u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - w + z$$

lineárně (ne)závislé.

Řešení. Vektory jsou lineárně nezávislé. □

2.28. Doplňte vektory $1 - x^2 + x^3$, $1 + x^2 + x^3$, $1 - x - x^3$ na bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 3.

Řešení. Stačí připojit např. polynom x. □

2.29. Tvoří matice

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-5 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

bázi vektorového prostoru čtvercových dvourozměrných matic?

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru 2×2 matic lineárně nezávislé. Vyplývá to z toho, že matice

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 4 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

je tzv. regulární (tj. její hodnost je rovna rozměru; tj. lze z ní pomocí řádkových elementárních transformací obdržet jednotkovou matici; tj. existuje k ní matice inverzní; tj. má nenulový determinant, roven 116; tj. jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení; tj. každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení; tj. obor hodnot lineárního zobrazení, jež zadává, je vektorový prostor dimenze 4; tj. toto zobrazení je injektivní). $\square$

2.30. Nechť jsou dány libovolné lineárně nezávislé vektory u, v, w, z ve vektorovém prostoru V. Rozhodněte, zda jsou ve V lineárně závislé, či nezávislé, vektory

$$u - 2v, \quad 3u + w - z, \quad u - 4v + w + 2z, \quad 4v + 8w + 4z.$$

Řešení. Lze ukázat, že z lineární nezávislosti u, v, w, z plyne, že uvažované vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé vektory

$$(1, -2, 0, 0), \quad (3, 0, 1, -1), \quad (1, -4, 1, 2), \quad (0, 4, 8, 4).$$

Neboť je

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 8 & 4\end{vmatrix} = -36 \neq 0,$$

správná odpověď zní *lineárně nezávislé*. $\square$

2.31. Matice rotací podle souřadnicových os. Napište matici zobrazení rotací o úhel φ v kladném smyslu postupně kolem os x, y, z v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Nejprve si rozmysleme, co znamená rotace v kladném smyslu kolem nějaké osy v $\mathbb{R}^3$. Předně musíme mít danou osu (přímku) nějak orientovánu (tj. zadat jeden ze dvou možných směrů „kam přímka vede“, v případě souřadnicových os je to směr do kladných čísel). Díváme-li se nyní na některou z rovin kolmých na osu, ve kterých rotace působí „obyčejnou“ rotací v rovině, shora (tj. proti orientaci osy), tak smysl otáčení v rovině nám určuje smysl dané rotace v prostoru. Při rotaci libovolného bodu kolem dané osy (řekněme x), se příslušná souřadnice daného bodu nemění, v rovině dané dvěma zbylými osami pak již je rotace dána známou maticí 2×2. Postupně tedy dostáváme následující matice: Rotace kolem osy z:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy y:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

U matice rotace kolem osy y musíme dávat pozor na znaménko. Je totiž rotace kolem osy y v kladném smyslu, tedy taková rotace, že pokud se díváme proti směru osy y, tak se svět točí proti směru hodinových ručiček, je rotací v záporném smyslu v rovině xz (tedy osa z se otáčí směrem k x). Rozmyslete si kladný a záporný smysl rotace podél všech tří os. □

2.32. Matice rotace kolem dané osy. Napište matici zobrazení rotace v kladném smyslu o úhel 60° kolem přímky dané počátkem a vektorem $(1, 1, 0)$ v $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Dané otáčení je složením následujících tří rotací:

- rotace o 45° v záporném smyslu podle osy z (osa rotace $(1, 1, 0)$ přejde do osy x)
- rotace o 60° v kladném smyslu podle osy x.

- rotace o 45° v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde zpět na osu danou vektorem $(1, 1, 0)$).

Matice výsledné rotace tedy bude součinem matic odpovídajících těmto třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení, prvnímu zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo. Celkem tedy dostáváme pro hledanou matici A vztah:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

2.33. Matice obecné rotace v $\mathbb{R}^3$. . Uvažme libovolný jednotkový vektor (x, y, z). Rotace v kladném smyslu o úhel φ kolem tohoto vektoru pak můžeme zapsat jako složení následujících rotací, jejichž matice již známe:

(1) rotace $\mathcal{R}_1$ v záporném smyslu kolem osy z o úhel s kosinem $x/\sqrt{x^2 + y^2} = x/\sqrt{1 - z^2}$, tedy sinem $y/\sqrt{1 - z^2}$, ve které přejde přímka se směrovým vektorem (x, y, z) na přímku se směrovým vektorem $(0, y, z)$. Matice této rotace je

$$R_1 = \begin{pmatrix} x/\sqrt{1 - z^2} & y/\sqrt{1 - z^2} & 0 \\ -y/\sqrt{1 - z^2} & x/\sqrt{1 - z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(2) rotace $\mathcal{R}_2$ v kladném smyslu podle osy y o úhel s kosinem $\sqrt{1 - z^2}$, tedy sinem z, ve které přejde přímka se směrovým vektorem $(0, y, z)$ na přímku se směrovým vektorem $(1, 0, 0)$. Matice této rotace je

$$R_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z^2} & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & \sqrt{1 - z^2} \end{pmatrix},$$

(3) rotace $\mathcal{R}_3$ v kladném smyslu kolem osy x o úhel φ s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

(4) rotace $\mathcal{R}_2^{-1}$ s maticí R_2^{-1}
(5) rotace $\mathcal{R}_1^{-1}$ s maticí R_1^{-1}

matice složení těchto zobrazení, tedy hledaná matice, je dána součinem matic jednotlivých rotací v opačném pořadí:

$$R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 = \tag{2.2}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi)x^2 & (1-\cos\varphi)xy - (sin\varphi)z & (1-\cos\varphi)xz + (\sin\varphi)y \\ (1-\cos\varphi)yx + (\sin\varphi)z & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)y^2 & (1-cos\varphi)yz - (\sin\varphi)x \\ (1-\cos\varphi)zx - (\sin\varphi)y & (1-\cos\varphi)zy + (\sin\varphi)x & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)z^2 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

2. Determinanty

2.34. Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Začneme rozvíjet podle prvního sloupce, kde máme nejvíce (jednu) nul. Postupně dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Podle Saarusova pravidla}}{=} -2 - 2 + 6 = 2.$$

□

2.35. Zjistěte, zda je matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

invertibilní.

Řešení. Matice je invertibilní (existuje k ní inverzní matice) právě tehdy, když ji lze pomocí řádkových transformací převést na jednotkovou matici. To je ekvivalentní např. s tím, že má nenulový determinant. Vyčíslení

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

tak dává, že není invertibilní. □

2.36. Výpočtem determinantu vhodné matice rozhodněte o lineární nezávislosti vektorů $(1, 2, 3, 1)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(2, 1, -1, 3)$ a $(0, 0, 3, 2)$.

Řešení. Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. □

2.37. Nalezněte všechny hodnoty argumentu a takové, že

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = 1.$$

Pro komplexní a uveďte buď jeho algebraický nebo goniometrický tvar.

Řešení. Spočítáme determinant rozvinutím podle prvního sloupce matice:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix},$$

dále rozvíjíme podle posledního řádku:

$$D = -a \cdot a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a^2(a^2 - 1)$$

Celkem dostáváme následující podmínku pro a: $a^4 - a^2 + 1 = 0$. Substitucí $t = a^2$, pak máme $t^2 - t + 1$ s kořeny $t_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$, $t_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3) = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)$, odkud snadno určíme čtyři možné hodnoty parametru a: $\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$, $\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6) = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 - i/2$, $\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + i/2$. □

2.38. Dokažte vorec pro tzv. Vandermondův determinant, tj. determinant Vandermondovy matice:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i),$$

kde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a na pravé straně rovnosti je součin všech rozdílů $a_j - a_i$, kde $j > i$.

Řešení. Ukážeme opravdu nádherný důkaz indukcí, nad nímž srdce matematika zaplesá. Pro $n = 1, 2$ vztah triviálně platí. Nechť tedy platí pro determinant matice určené čísly $a_1, \dots, a_k$ a dokážeme, že platí i pro výpočet determinantu Vandermondovy matice určenou čísly $a_1, \dots, a_{k+1}$. Uvažme determinant V_{k+1} jako polynom P v proměnné a_{k+1}. Z definice determinantu vyplývá, že tento polynom bude stupně k v této proměnné a navíc čísla $a_1, \dots, a_k$ budou jeho kořeny: nahradíme-li totiž ve Vandermondově matici V_{k+1} poslední sloupec tvořený mocninami čísla a_{k+1} libovolným z předchozích sloupců tvořeným mocninami čísla a_i, tak to vlastně odpovídá výpočtu hodnoty determinantu (jakožto polynomu v proměnné a_{k+1}) v bodě a_i. Tato je ovšem nulová, neboť determinant z matice se dvěma shodnými, tedy lineárně závislými, sloupci je nulový. To znamená, že a_i je kořenem P. Nalezli jsme tedy k kořenů polynomu stupně k, tudíž všechny jeho kořeny a P musí být tvaru $P = C(a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2) \cdots (a_{k+1} - a_k)$, kde C je nějaká konstanta, resp. vedoucí koeficient polynomu P. Uvážíme-li však výpočet determinantu V_{k+1} pomocí rozvoje podle posledního sloupce, tak vidíme, že $C = V_k$, což už dokazuje vzorec pro V_{k+1}.

Jiné řešení. Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků a následným rozvojem podle prvního sloupce obdržíme

$$\begin{aligned} V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vytkneme-li z i-tého řádku $x_{i+1} - x_1$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, dostaneme

$$\begin{aligned} &V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \dots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Odečtením od každého sloupce (počínaje posledním a konče druhým) x_1-násobku předcházejícího lze docílit úpravy

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \dots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \dots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Proto

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\ V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).$$

Neboť je zřejmě

$$V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1},$$

platí (uvažme matematickou indukci)

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Všimněme si, že tento determinant je nenulový, právě když jsou čísla $x_1, \dots, x_n$ navzájem různá.

$\square$

2.39. Nalezněte matici adjungovanou a matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Adjungovaná matice je

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}^T,$$

kde A_{ij} je součin čísla $(-1)^{i+j}$ a determinantu trojrozměrné matice vzniklé z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Platí

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -24, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 20, \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -32,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 28,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -4, \qquad A_{34} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{41} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

Dosazením získáme

$$A^* = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 28 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 16 \\ 20 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici A^{-1} určíme ze vztahu $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$. Determinant matice A je (rozvojem podle prvního řádku) roven

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 16.$$

Dostáváme tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 5/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 7/4 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

□

2.40. Nechť je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -19 & \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Lze matici A převést na matici B pomocí elementárních řádkových transformací (pak říkáme, že jsou řádkově ekvivalentní)?

Řešení. Obě matice jsou zřejmě řádkově ekvivalentní s trojrozměrnou jednotkovou maticí. Snadno se vidí, že řádková ekvivalence na množině všech matic daných rozměrů je relací ekvivalence. Matice A a B jsou tudíž řádkově ekvivalentní. □

2.41. Nechť jsou dány podprostory U a V generované po řadě vektory

$$(1, 1, -3), \ (1, 2, 2) \quad \text{a} \quad (1, 1, -1), \ (1, 2, 1), \ (1, 3, 3)$$

vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte průnik těchto podprostorů.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podprostor V má dimenzi pouze 2 (nejedná se tedy o celý prostor $\mathbb{R}^3$), neboť

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

a neboť libovolná dvojice z uvažovaných třech vektorů je očividně lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že také podprostor U má dimenzi 2. Současně je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

a proto vektor $(1, 1, -1)$ nemůže náležet do podprostoru U. Průnikem rovin procházejících počátkem (dvojrozměrných podprostorů) v trojrozměrném prostoru musí být alespoň přímka. V našem případu je jím právě přímka (podprostory nejsou totožné). Určili jsme dimenzi průniku – je jednodimenzionální. Všimneme-li si, že

$$1 \cdot (1, 1, -3) + 2 \cdot (1, 2, 2) = (3, 5, 1) = 1 \cdot (1, 1, -1) + 2 \cdot (1, 2, 1)\,,$$

dostáváme vyjádření hledaného průniku ve tvaru množiny všech skalárních násobků vektoru (3, 5, 1) (jedná se o přímku procházející počátkem s tímto směrovým vektorem).

□

2.42. Stanovte vektorový podprostor (prostoru $\mathbb{R}^4$) generovaný vektory $u_1 = (-1, 3, -2, 1)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$, $u_3 = (-4, 7, -3, 0)$, $u_4 = (1, 5, -5, 4)$. vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i (tj. vybráním báze).

Řešení. Sepíšeme vektory u_i do sloupců matice a obdrženou matici upravíme pomocí řádkových elementárních transformací. Takto získáme

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Odtud vyplývá, že lineárně nezávislé jsou právě vektory u_1, u_2, u_4, tj. právě ty vektory odpovídající sloupcům, které obsahují první nenulové číslo nějakého řádku. Navíc odsud plyne (viz třetí sloupec)

$$2 \cdot (-1, 3, -2, 1) - (2, -1, -1, 2) = (-4, 7, -3, 0).$$

□

2.43. Určete všechny konstanty $a \in \mathbb{R}$ takové, aby polynomy $ax^2 + x + 2$, $-2x^2 + ax + 3$ a $x^2 + 2x + a$ byly lineárně závislé (ve vektorovém prostoru polynomů jedné proměnné stupně nejvýše 3 nad reálnými čísly).

Řešení. V bázi $1, x, x^2$ jsou souřadnice zadaných vektorů (polynomů) následující: $(a, 1, 2)$, $(-2, a, 3)$, $(1, 2, a)$. Polynomy budou závislé, právě když bude mít matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi zadaných vektorů menší hodnost, než je počet vektorů, v tomto případě tedy hodnost dvě a menší. V případě čtvercové matice nižší hodnost než je počet řádků je ekvivalentní nulovosti determinantu dané matice.

Podmíka na a tedy zní

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0,$$

tj. a bude kořenem polynomu $a^3 - 6a - 5 = (a+1)(a^2 - a - 5)$, tj. úloha má tři řešení $a_1 = -1$, $a_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. □

2.44. Je dáno lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi následující maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište matici tohoto zobrazení v bázi

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 1, 0) \\ f_2 &= (-1, 1, 1) \\ f_3 &= (2, 0, 1). \end{aligned}$$

Řešení. Matice přechodu T od báze $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ k standardní bázi, tj. bázi danou vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, získáme podle Tvrzení 2.25 zapsáním souřadnic vektorů f_1, f_2, f_3 ve standardní bázi do sloupců matice přechodu T. Máme tedy

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od standardní báze k bázi $\underline{f}$ je potom T^{-1}, což je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení v bázi $\underline{f}$ je potom

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

□

2.45. Určete, jaké lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadává matice

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Dvojnásobná vlastní hodnota -1, příslušné vlastní vektory $(2, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, jednonásobná vlastní hodnota 0, vlastní vektor $(1, 4, -3)$. Osová souměrnost podle přímky dané posledním vektorem složená s projekcí na rovinu kolmou k poslednímu vektoru, tedy danou obecnou rovnicí $x + 4y - 3z = 0$.

□

2.46. Uvažme vektorový prostor mnohočlenů jedné neznámé stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty. V tomto prostoru uvažme bázi 1, x, x^2. Napište matici zobrazení derivace v této bázi a také v bázi $1 + x^2$, x, $x + x^2$.

Řešení. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. □

2.47. Ve standardní bázi v $\mathbb{R}^3$ určete matici rotace o 90° v kladném smyslu kolem přímky (t, t, t), $t \in \mathbb{R}$, orientované ve směru vektoru $(1, 1, 1)$. Dále určete matici této rotace v bázi $\underline{g} = ((1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 1))$.

Řešení. Snadno určíme matici uvažované rotace a to ve vhodné bázi, totiž v bázi dané směrovým vektorem přímky a dále dvěma navzájem kolmými vektory v rovině $x + y + z = 0$, tedy v rovině vektorů kolmých k vektoru $(1, 1, 1)$. Uvědomme si, že matice rotace v kladném smyslu o 90° v nějaké ortonormální bázi v $\mathbb{R}^2$ je $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, v ortogonální s velikostmi vekorů k, l potom $\begin{pmatrix} 0 & -k/l \\ l/k & 0 \end{pmatrix}$. Zvolíme-li v rovině $x + y + z = 0$ kolmé vektory $(1, -1, 0)$ a $(1, 1, -2)$ o velikostech $\sqrt{2}$ a $\sqrt{6}$, tak v bázi $\underline{f} = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, -2))$ má uvažovaná rotace matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. Abychom získali matici uvažované rotace ve standardní bázi, stačí nám transformovat matici již známým způsobem. Matici přechodu T od báze $\underline{f}$ ke standardní dostaneme zapsáním souřadnic (ve standardní bázi) vektorů báze $\underline{f}$ do sloupců matice T: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Celkem tedy pro hledanou matici R máme

$$R = T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \tag{2.4}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Tento výsledek můžeme ověřit dosazením do matice obecné rotace (2.2), normováním vektoru $(1, 1, 1)$ dostáváme vektor $(x, y, z) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) = 1$. □

2.48. Matice obecné rotace podruhé. Zkusme odvodit matici (obecné) rotace (2.2) o úhel φ v kladném smyslu kolem jednotkového vektoru (x, y, z) jiným způsobem než jsme učinili v [], anologicky jako v předchozím příkladě. V bázi $\underline{f} = ((x, y, z), (-y, x, 0), (zx, zy, z^2 - 1))$, tedy v ortogonální bázi tvořené směrovým vektorem osy rotace a dvěma navzájem kolmými vektory o shodných velikostech $\sqrt{(}1 - z^2)$ ležícími v rovině kolmé na osu, má uvažovaná rotace matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(ph) & -\sin(\varphi) \\ \cos(ph) & \sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$. Matice přechodu od báze $(\underline{f})$ ke standardní bázi je potom $T = \begin{pmatrix} x & -y & zx \\ y & x & zy \\ z & 0 & z^2 - 1 \end{pmatrix}$ s inverzní maticí

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ -\frac{y}{1-z^2} & \frac{x}{1-z^2} & 0 \\ \frac{zx}{1-z^2} & \frac{zy}{1-z^2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Celkem pak pro matici R hledané rotace dostáváme

$$\begin{aligned} R =& T \cdot R \cdot T^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)x^2 & (1 - \cos\varphi)xy - (sin\varphi)z & (1 - \cos\varphi)xz + (\sin\varphi)y \\ (1 - \cos\varphi)yx + (\sin\varphi)z & \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)y^2 & (1 - cos\varphi)yz - (\sin\varphi)x \\ (1 - \cos\varphi)zx - (\sin\varphi)y & (1 - \cos\varphi)zy + (\sin\varphi)x & \cos\varphi + (1 - \cos\varphi)z^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Při násobení a následném zjednodušování je nutno opakovaně použít předpokladu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2.49. Označme S střed hrany AB krychle $ABCDEFGH$ (v obvyklém označení, s hranou AE). Určete kosinus odchylky úseček ES a BG.

Řešení. Vzhledem k tomu, že homotetie (stejnolehlost) je podobným zobrazením, tj. zachovává úhly, můžeme předpokládat, že krychle má hranu velikosti 1. Umístíme-li navíc bod A do počátku souřadné soustavy a body B, resp. E do bodů o souřadnicích $[1, 0, 0]$, resp. $[0, 0, 1]$, pak mají zbylé uvažované body následující souřadnice: $S = [1/2, 0, 0]$, $G = [1, 1, 1]$, tedy vektor $ES = (1/2, 0, -1)$ a $BG = (0, 1, 1)$. Pro hledaný cosinus odchylky φ tedy máme

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{(1/2, 0, -1) \cdot (0, 1, 1)}{\|(1/2, 0, -1)\| \, \|(0, 1, 1)\|} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

. □

3. Vektorové prostory a lineární zobrazení

Podrobnějším rozborem vlastností různých typů lineárních zobrazení se nyní dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

2.50. Začneme několika příklady v prostorech malých dimenzí. Ve standardní bázi $\mathbb{R}^2$ uvažujme následující matice zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A zadává kolmou projekci podél podprostoru

$$W \subset \{(0, a);\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

na podprostor

$$V \subset \{(a, 0);\ a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Evidentně pro toto zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy $f|_{\mathrm{Im}\, f}$ je identické zobrazení. Jádrem f je právě podprostor W.

Matice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f. Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.

Matice C zadává zobrazení f, které první vektor báze zvětší a–krát, druhý b–krát. Tady se nám tedy celá rovina rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením f zachovány a ve kterých jde o pouhou *homotetii*, tj. roztažení skalárním násobkem. Např. volba $a = 1$, $b = -1$ odpovídá komplexní konjugaci $x + iy \mapsto x - iy$

na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení reálného vektorového prostoru, nikoliv však jednorozměrného komplexního prostoru $\mathbb{C}$. V geometrii roviny jde o zrcadlení podle osy x.

Matice D je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi. Jako pro každé lineární zobrazení, které je bijekcí, umíme najít báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice E (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na začátku i konci. Zkusme však uvažovat matici C jako matici zobrazení $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Pak umíme najít vektory $u = (i, 1)$, $v = (1, i)$, pro které bude platit

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot u, \; g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi (u, v) na $\mathbb{C}^2$ má g matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice C má na diagonále prvky $\pm a$, $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$. Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení. Navíc, můžeme si označit reálnou a imaginární část vektoru u takto

$$u = x_u + i y_u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zúžení komplexního zobrazení g na reálný vektorový podprostor generovaný vektory x_u a $i y_u$ (tj. násobení komplexní jednotkou i) je právě otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

2.51. Určete součet úhlů, které v rovině $\mathbb{R}^2$ svírají s osou x postupně vektory $(1, 1)$, $(2, 1)$ a $(3, 1)$ (obrázek).

Řešení. Uvážíme-li rovinu $\mathbb{R}^2$ jakožto Gaussovu rovinu komplexních čísel, tak uvedené vektory odpovídají komplexním číslům $1 + i$, $2 + i$ a $3 + i$ a máme najít součet jejich argumentů, tedy podle Moivrovy věty argument jejich součinu. Jejich součin je $(1 + i)(2 + i)(3 + i) = (1 + 3i)(3 + i) = 10i$, tedy ryze imaginární číslo s argumentem $\pi/2$ a tedy hledaný součet je roven právě $\pi/2$. □

2.52. Uvažme komplexní čísla jako reálný vektorový prostor a za jeho bázi zvolme 1 a i. V této bázi určete matici následujících lineárních zobrazení:

a) konjugace,

b) násobení číslem $(2+i)$. Určete matici těchto zobrazení v bázi $(1-i)$, $(1+i)$.

Řešení.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

b) V obou bazích je matice stejná a to $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Vysvětlení viz příklad ??.

□

2.53. Nalezněte matici rotace v kladném smyslu o úhel $\pi/3$ kolem přímky procházející počátkem s orientovaným směrovým vektorem $(1, 1, 0)$ ve standardní bázi $\mathbb{R}^3$.

Řešení. Uvedené otočení lze získat složením po řadě těchto tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu x);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy x;
- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde na osu rotace).

Matice výsledné rotace bude součinem matic odpovídajících uvedeným třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení – prvnímu zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo. Takto dostaneme hledanou matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že výslednou rotaci bylo možné získat např. také složením následujících tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu y);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy y;
- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa y přejde na osu rotace).

Analogicky tak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

2.54. Určete matici A, která ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ zadává kolmou projekci do vektorového podprostoru generovaného vektory $u_1 = (-1, 1, 0)$ a $u_2 = (-1, 0, 1)$.

Řešení. Nejprve poznamenejme, že uvedený podprostor je rovinou procházející počátkem s normálovým vektorem $u_3 = (1, 1, 1)$. Uspořádaná trojice $(1, 1, 1)$ je totiž očividným řešením soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_3 &= 0, \end{aligned}$$

tj. vektor u_3 je kolmý na vektory u_1, u_2. Podotkněme rovněž, že jsme tento příklad již vyřešili (matici A známe z dřívějšího příkladu).

Při dané projekci se vektory u_1 a u_2 musejí zobrazit na sebe a vektor u_3 potom na nulový vektor. V bázi složené po řadě z vektorů u_1, u_2, u_3 je proto matice této projekce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí matic přechodu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

od báze (u_1, u_2, u_3) ke standardní bázi a od standardní báze k bázi (u_1, u_2, u_3) získáme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

2.55. (1) Uvažme zobrazení s maticí ve standardní bázi

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak dostáváme

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1,$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -1$. Vlastní vektory s vlastní hodnotou $\lambda = 1$ se spočtou:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

s bází prostoru řešení, tj. všech vlastních vektorů s touto vlastní hodnotou

$$u_1 = (0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1).$$

Podobně pro $\lambda = -1$ dostáváme třetí nezávislý vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = (-1, 0, 1).$$

V bázi u_1, u_2, u_3 (všimněte si, že u_3 musí být lineárně nezávislý na zbylých dvou díky předchozí větě a u_1, u_2 vyšly jako dvě nezávislá řešení) má f diagonální matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Celý prostor $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem vlastních podprostorů, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$. Tento rozklad je dán jednoznačně a vypovídá mnoho o geometrických vlastnostech zobrazení f. Vlastní podprostor V_1 je navíc přímým součtem jednorozměrných vlastních podprostorů, které lze však zvolit mnoha různými způsoby (takový další rozklad nemá tedy již žádný geometrický význam).

(2) Uvažme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definované derivováním polynomů, tj. $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$. Zobrazení f má tedy v obvyklé bázi $(1, x, x^2)$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $|A - \lambda \cdot E| = -\lambda^3$, existuje tedy pouze jediná vlastní hodnota, $\lambda = 0$. Spočtěme vlastní vektory:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prostor vlastních vektorů je tedy jednorozměrný, generovaný konstantním polynomem 1.

2.56. Příklad včetně změny báze. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané ve standardní bázi maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete toto zobrazení a napište jeho matici v bázi:

$$\begin{aligned} e_1 &= [1, -1, 1] \\ e_2 &= [1, 2, 0] \\ e_3 &= [0, 1, 1] \end{aligned}$$

Řešení. Spočítejme nejprve vlastní čísla jim příslušné vlastní vektory: charakteristický polynom dané matice je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

Kořeny tohoto polynomu, vlastní čísla, udávají, kdy nebude mít matice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

plnou hodnost, tedy soustava rovnic

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

bude mít i jiné řešení než řešení $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$. Vlastní čísla tedy jsou $0, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$. Spočítejme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním hodnotám:

- 0: Řešíme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

  Jejím řešením je jednodimenzionální vektorový prostor vlastních vektorů $\langle(1, -1, 1)\rangle$.
- $2+\sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -(1+\sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

  Řešením je jednodimenzionální prostor $\langle(1, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})\rangle$.
- $2-\sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} (\sqrt{2}-1) & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & (\sqrt{2}-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

  Řešením je prostor vlastních vektorů $\langle(1, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})\rangle$.

Zobrazení tedy můžeme interpretovat jako projekci podél vektoru $(1, -1, 1)$ do roviny dané vektory $(1, 1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ a $(1, 1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ složenou s lineárním zobrazením daným natažením daným vlastními čísly ve směru uvedených vlastních vektorů.

Nyní jej vyjádřeme v uvedené bázi. K tomu budeme potřebovat matici přechodu T od standardní báze k dané nové bázi. Tu získáme tak, že souřadnice vektorů staré báze v bázi nové napíšeme do sloupců matice T. My však snadněji zapíšeme matici přechodu od priklané báze k bázi standardní, tedy matici T^{-1}. Souřadnice vektorů nové báze pouze zapíšeme do sloupců:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro matici B zobrazení v nové bázi pak máme (viz **??**).

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

2.57. Další příklady. Nalezňete vlastní čísla a jim příslušné (prostory) vlastních vektorů matice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Řešení. Trojnásobná vlastní hodnota -1, příslušný vektorový prostor je $\langle (1, 0, 0), (0, 2, 1) \rangle$. □

2.58. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu získejte ortogonální bázi podprostoru

$$U = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Množina řešení uvedené homogenní lineární rovnice je zřejmě vektorovým prostorem s bází

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory ortogonální báze získané užitím Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu budeme značit v_1, v_2, v_3. Nejprve položme $v_1 = u_1$. Dále

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2^T \cdot v_1}{||v_1||^2}\, v_1 = u_2 - \frac{1}{2}\, v_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right)^T,$$

resp. zvolme násobek $v_2 = (-1, -1, 2, 0)^T$. Následně je

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3^T \cdot v_1}{||v_1||^2}\, v_1 - \frac{u_3^T \cdot v_2}{||v_2||^2}\, v_2 = u_3 - \frac{1}{2}\, v_1 - \frac{1}{6}\, v_2 =$$
$$= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right)^T.$$

Máme tedy celkem

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dodejme, že pro jednoduchost příkladu lze bezprostředně uvést ortogonální bázi z vektorů

$$(1, -1, 0, 0)^T, \quad (0, 0, 1, -1)^T, \quad (1, 1, -1, -1)^T$$

nebo

$$(-1, 1, 1, -1)^T, \quad (1, -1, 1, -1)^T, \quad (-1, -1, 1, 1)^T.$$

□

2.59. Napište matici zobrazení kolmé projekce do roviny procházející počátkem a kolmé na vektor (1, 1, 1).

Řešení. Obraz libovolného bodu (vektoru) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ v uvažovaném zobrazení získáme tak, že od daného bodu odečteme jeho kolmou projekci do normálového směru dané roviny, tedy do směru (1, 1, 1). Tato projekce $\mathbf{p}$ je dána (viz přednáška) jako

$$\frac{(\mathbf{x}, (1, 1, 1))}{|(1, 1, 1)|^2} = (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}).$$

Výsledné zobrazení je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{p} &= (\frac{2x_1}{3} - \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{2x_2}{3} - \frac{x_1 + x_3}{3}, \frac{2x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{3}) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Srovnej s (**??**).

□

2.60. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány třídimenzionální (trojrozměrné) podprostory

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \qquad V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$v_3 = (1, -1, -1, 1)^T$. Určete dimenzi a libovolnou bázi podprostoru $U \cap V$.

Řešení. Do podprostoru $U \cap V$ náleží právě ty vektory, které je možné obdržet jako lineární kombinaci vektorů u_i a také jako lineární kombinaci vektorů v_i. Hledáme tedy čísla $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ taková, aby platilo

$$x_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

tj. hledáme řešení soustavy

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_1 & + & y_2 & + & y_3, \\
x_1 & + & x_2 & & & = & y_1 & - & y_2 & - & y_3, \\
x_1 & & & + & x_3 & = & -y_1 & + & y_2 & - & y_3, \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & -y_1 & - & y_2 & + & y_3.
\end{array}$$

Při maticovém zápisu této homogenní soustavy (a při zachování pořadí proměnných) je

$$\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&0&-1&1&1\\1&0&1&1&-1&1\\0&1&1&1&1&-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&0&-1&0&2&2\\0&-1&0&2&0&2\\0&1&1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&-1&0&2&2\\0&0&1&3&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1\\0&1&1&1&1&-1\\0&0&1&0&-2&-2\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&-2\\0&0&1&0&-2&-2\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2\\0&1&0&0&2&0\\0&0&1&0&-2&-2\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Dostáváme tak řešení

$$x_1 = -2t,\ x_2 = -2s,\ x_3 = 2s + 2t,\ y_1 = -s - t,\ y_2 = s,\ y_3 = t,$$

$t, s \in \mathbb{R}$. Odtud dosazením získáváme obecný vektor průniku

$$\begin{pmatrix}x_1 + x_2 + x_3\\x_1 + x_2\\x_1 + x_3\\x_2 + x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2t - 2s\\2s\\2t\end{pmatrix}.$$

Vidíme, že

$$\dim U \cap V = 2, \quad U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

□

2.61. Uveďte nějakou bázi podprostoru

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru reálných matic 3×2. Tuto bázi doplňte na bázi celého prostoru.

Řešení. Připomeňme, že bázi podprostoru tvoří množina lineárně nezávislých vektorů, které generují uvažovaný podprostor. Protože

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

celý podprostor U je generován pouze prvními dvěma maticemi. Ty jsou potom lineárně nezávislé (jedna není násobkem druhé), a tak zadávají bázi. Chceme-li ji doplnit na bázi celého prostoru reálných matic 3×2, musíme najít další čtyři matice (dimenze celého prostoru je zjevně 6) takové, aby výsledná šestice byla lineárně nezávislá. Můžeme využít toho, že známe např. standardní bázi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prostoru reálných matic 3×2, který lze přímo ztotožnit s $\mathbb{R}^6$. Sepíšeme-li dva vektory báze U a vektory standardní báze celého prostoru v tomto pořadí, výběrem prvních 6 lineárně nezávislých vektorů dostaneme hledanou bázi. Pokud však uvážíme, že kupř.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

můžeme ihned bázového vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

podprostoru U doplnit maticemi (vektory prostoru matic)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na bázi. Upozorněme, že výše uvedený determinant lze vyčíslit velmi snadno – je roven součinu prvků na diagonále, neboť matice je v dolním trojúhelníkovém tvaru (nad diagonálou jsou všechny prvky nulové). □

2.62. Napište nějakou bázi reálného vektorového prostoru matic 3×3 nad $\mathbb{R}$ s nulovou stopou (součet prvků na diagonále) a napište souřadnice matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

v této bázi.

2.63. Zaveďte nějaký skalární součin na vektorovém prostoru matic z předchozího příkladu. Spočítejte normu matice z předchozího příkladu, která je indukovaná Vámi zavedeným součinem.

2.64. Určete nějakou bázi vektorového prostoru antisymetrických reálných čtvercových matic typu 4×4. Uvažte standardní skalární součin v této bázi a pomocí tohoto součinu vyjádřete velikost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

.

2.65. Najděte ortogonální doplněk $U^{\perp}$ podprostoru

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4);\ x_1 = x_3, x_2 = x_3 + 6x_4\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Řešení. Ortogonální doplněk $U^{\perp}$ tvoří právě ty vektory, které jsou kolmé na každé řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0, \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 6x_4 & = & 0. \end{array}$$

Vektor je ovšem řešením této soustavy tehdy a jenom tehdy, když je kolmý na oba vektory $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, -1, -6)$. Je tedy

$$U^{\perp} = \{a \cdot (1, 0, -1, 0) + b \cdot (0, 1, -1, -6);\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

2.66. Určete, zda jsou podprostory $U = \langle(2, 1, 2, 2)\rangle$ a $V = \langle(-1, 0, -1, 2)\,,\ (-1, 0, 1, 0)\,,\ (0, 0, 1, -1)\rangle$ prostoru $\mathbb{R}^4$ na sebe kolmé. Pokud ano, je $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tj. je $U^{\perp} = V$?

Řešení. Vektor, který zadává podprostor U, je kolmý na každý ze tří vektorů, které generují V. Podprostory jsou tak na sebe kolmé. Avšak není pravda, že $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. Podprostor V je totiž pouze dvojdimenzionální, protože

$$(-1, 0, -1, 2) = (-1, 0, 1, 0) - 2\,(0, 0, 1, -1)\,.$$

$\square$

2.67. V závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$ stanovte dimenzi podprostoru U vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li U generován vektory

(a) $u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, t, 1), \quad u_3 = (2, 2, t)$;
(b) $u_1 = (t, t, t), \quad u_2 = (-4t, -4t, 4t), \quad u_3 = (-2, -2, -2)$.

Řešení. V prvním případu je $\dim U = 2$ pro $t \in \{1, 2\}$, jinak je $\dim U = 3$. Ve druhém případu je $\dim U = 2$ pro $t \neq 0$ a $\dim U = 1$ pro $t = 0$. $\square$

2.68. Sestrojte ortogonální bázi podprostoru

$$\langle\,(1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 1, -1),\ (-1, 1, 1, 1)\,\rangle$$

prostoru $\mathbb{R}^4$.

Řešení. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem lze obdržet výsledek

$$((1, 1, 1, 1),\ (1, 1, 1, -3),\ (-2, 1, 1, 0))\,.$$

$\square$

2.69. V prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru všech lineárních kombinací vektorů $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -7)$, $(4, -2, 4, 14)$ a podprostoru generovaného vektory $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

Řešení. Při zachování pořadí podprostorů ze zadání jsou ortogonálními bázemi např.

$$((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -7))$$

a

$$((1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)).$$

□

2.70. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ jsou vektory

$$(1, 1, 2, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 1, a), \quad (1, b, 2, 3, -2)$$

v prostoru $\mathbb{R}^5$ po dvou ortogonální?

Řešení. Výsledek je $a = 9/2$, $b = -5$, neboť musí mj. platit

$$1 + b + 4 + 0 + 0 = 0, \quad 1 - b + 0 + 3 - 2a = 0.$$

□

2.71. V prostoru $\mathbb{R}^5$ uvažujte podprostor generovaný vektory $(1, 1, -1, -1, 0), (1, -1, -1, 0, -1), (1, 1, 0, 1, 1), (-1, 0, -1, 1, 1)$. Najděte nějakou bázi jeho ortogonálního doplňku.

Řešení. Hledaná báze obsahuje jediný vektor. Je jím nějaký nenulový skalární násobek vektoru

$$(3, -7, 1, -5, 9).$$

□

2.72. Popište ortogonální doplněk podprostoru V prostoru $\mathbb{R}^4$, je-li V generován vektory $(-1, 2, 0, 1)$, $(3, 1, -2, 4)$, $(-4, 1, 2, -4)$, $(2, 3, -2, 5)$.

Řešení. Ortogonální doplněk (komplement) $V^\perp$ je množina všech skalárních násobků vektoru $(4, 2, 7, 0)$. □

2.73. V prostoru $\mathbb{R}^5$ určete ortogonální doplněk $W^\perp$ podprostoru W, jestliže

(a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t);\ r, s, t \in \mathbb{R}\}$;
(b) W je množina řešení soustavy rovnic $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$.

Řešení. Platí

(a) $W^\perp = \langle\, (1, 0, -1, 1, 0),\ (1, 3, 2, 1, -3)\,\rangle$;

(b) $W^{\perp} = \langle\, (1, 0, -1, 0, 0),\ (1, -1, 1, -1, 1)\,\rangle$.

□

2.74. Nechť jsou v prostoru $\mathbb{R}^4$ dány vektory

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1).$$

Doplňte tyto dva vektory libovolným způsobem na ortogonální bázi celého $\mathbb{R}^4$. (Můžete k tomu využít Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.)

Řešení. Hledaných doplnění je pochopitelně nekonečně mnoho. Jedním (skutečně jednoduchým) je např.

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1), \quad (1, 0, 0, -1), \quad (1, 0, -1, 1).$$

□

2.75. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem nalezněte nějakou ortonormální bází podprostoru $V \subset \mathbb{R}$,
kde $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

2.76. Je množina $V = \{(1, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \to V, \quad (1, y) \oplus (1, z) = (1, z + y)$$
$$\odot : \mathbb{R} \times V \to V, \quad z \odot (1, y) = (1, y \cdot z)$$

vektorovým prostorem?

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. □

2.77. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, 1, a, 1)$, $(1, b, 1, 1)$, $(c, 1, 1, 1)$ lineárně závislé?

Řešení. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \qquad a = c = 1, \qquad b = c = 1.$$

□

2.78. Nechť je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze složená z vektorů u, v, w, z. Zjistěte, zda jsou vektory

$$u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - w + z$$

lineárně (ne)závislé.

Řešení. Vektory jsou lineárně nezávislé. □

2.79. Doplňte vektory $1 - x^2 + x^3$, $1 + x^2 + x^3$, $1 - x - x^3$ na bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 3.

Řešení. Stačí připojit např. polynom x. □

2.80. Tvoří matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bázi vektorového prostoru čtvercových dvourozměrných matic?

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru 2×2 matic lineárně nezávislé. Vyplývá to z toho, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je tzv. regulární (tj. její hodnost je rovna rozměru; tj. lze z ní pomocí řádkových elementárních transformací obdržet jednotkovou matici; tj. existuje k ní matice inverzní; tj. má nenulový determinant, roven 116; tj. jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení; tj. každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení; tj. obor hodnot lineárního zobrazení, jež zadává, je vektorový prostor dimenze 4; tj. toto zobrazení je injektivní). □

2.81. Vyřešte maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zjevně neznámé X_1 a X_2 musejí být matice 2×2 (aby uvažované součiny matic existovaly a výsledkem byla matice 2×2). Položme

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

a roznásobme matice v první zadané rovnici. Má platit

$$\begin{pmatrix} a_1 + 3c_1 & b_1 + 3d_1 \\ 3a_1 + 8c_1 & 3b_1 + 8d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

tj. má být

$$\begin{array}{rrrrcl} a_1 & & + \ 3c_1 & & = & 1, \\ & b_1 & & + \ 3d_1 & = & 2, \\ 3a_1 & & + \ 8c_1 & & = & 3, \\ & 3b_1 & & + \ 8d_1 & = & 4. \end{array}$$

Sečtením (-3)násobku první rovnice se třetí dostáváme $c_1 = 0$ a následně $a_1 = 1$. Podobně sečtením (-3)násobku druhé rovnice se čtvrtou dostáváme $d_1 = 2$ a poté $b_1 = -4$. Je tedy

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnoty a_2, b_2, c_2, d_2 najdeme odlišným způsobem. Např. použitím vzorce

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

který platí pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (inverzní matice existuje právě tehdy, když $ad - bc \neq 0$), spočtěme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobení zadané rovnice touto maticí zprava dává

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

a tudíž

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

4. Cvičení

2.82. V závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$ rozhodněte o počtu řešení soustavy lineárních rovnic, která je zadaná maticí přidružené homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & a \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravé strany

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pro $a = 0$ nemá uvažovaný systém řešení; pro $a \neq 0$ má nekonečně mnoho řešení. □

2.83. Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic tří proměnných, jejíž množinou řešení je

(a) $\{(0, 0, 0)\}$;
(b) $\{(0, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$;
(c) $\{(x, 1, 0);\ x \in \mathbb{R}\}$;
(d) $\{(x, y, 2y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Při zachování pořadí jsou správné odpovědi „ano“, „ne“, „ne“ a „ano“. □

2.84. Vektory

$$(1, 2, 1), \quad (-1, 1, 0), \quad (0, 1, 1)$$

jsou lineárně nezávislé, a proto z nich lze sestavit bázi $\mathbb{R}^3$. Každý trojrozměrný vektor je tak nějakou jejich lineární kombinací. Jakou jejich lineární kombinací je vektor $(1, 1, 1)$?

Řešení. Výsledek je

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1).$$

□

2.85. Vyjádřete vektor $(5, 1, 11)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 1, 3)$, tj. nalezněte čísla $p, q, r \in \mathbb{R}$, pro která je

$$(5, 1, 11) = p\,(3, 2, 2) + q\,(2, 3, 1) + r\,(1, 1, 3)\,.$$

Řešení. Úloha má jediné řešení

$$p = 2, \qquad q = -2, \qquad r = 3.$$

□

2.86. Řešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Taková matice X existuje právě jedna, a to

$$\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

□

2.87. Vypočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -4 \\ 1 & 12 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

2.88. Nalezněte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Inverzní maticí je

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

2.89. Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, určete tuto matici C^{-1}.

Řešení. Je

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.90. Stanovte A^{-1}, je-li

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, přičemž i je imaginární jednotka;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. V prvním případě dostáváme

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix};$$

ve druhém potom

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.91. Za pomoci výpočtu inverzní matice určete řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Inverzní matice k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Následně lze snadno získat

$$x_1 = \frac{13}{4}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{4}.$$

□

2.92. Napište inverzní matici k $n \times n$ matici $(n > 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Řešení. Platí

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.93. Najděte adjungovanou matici F^*, je-li

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Ze znalosti inverzní matice F^{-1} dostáváme

$$F^* = (\alpha\delta - \beta\gamma)\, F^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta & 0 \\ -\gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix},$$

pro libovolná $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. □

2.94. Vypočítejte adjungované matice k maticím

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{pmatrix},$$

přičemž i označuje imaginární jednotku.

Řešení. Hledanými maticemi jsou

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 6 & -2i \\ -3+2i & 1+i \end{pmatrix}.$$

□