Drsná matematika I – 4. přednáška
Relace a zobrazení

Jan Slovák

Masarykova univerzita

10. 10. 2011

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

V závěrečné části úvodní motivační kapitoly se vrátíme k formálnímu popisu matematických struktur, budeme se je ale průběžně snažit ilustrovat na již známých příkladech. Zároveň můžeme tuto část brát jako cvičení ve formálním přístupu k objektům a konceptům matematiky.

Definition

Binární relací mezi množinami A a B rozumíme podmnožinu R kartézského součinu $A \times B$. Často píšeme $a \simeq_R b$ pro vyjádření skutečnosti, že $(a, b) \in R$, tj. že body $a \in A$ a $b \in B$ jsou v relaci R. **Definičním oborem relace** je podmnožina

$$D \subset A, \quad D = \{a \in A; \exists b \in B, (a, b) \in R\}.$$

Podobně **oborem hodnot relace** je podmnožina

$$I \subset B, \quad I = \{b \in B; \exists a \in A, (a, b) \in R\}.$$

Speciálním případem relace mezi množinami je **zobrazení z množiny** A **do množiny** B. Je to případ, kdy pro každý prvek definičního oboru relace existuje právě jeden prvek z oboru hodnot, který je s ním v relaci. Nám známým případem zobrazení jsou všechny skalární funkce, kde oborem hodnot zobrazení je množina skalárů, třeba celých nebo reálných čísel. Pro zobrazení zpravidla používáme značení, které jsme také u skalárních funcí zavedli. Píšeme

$$f : D \subset A \to I \subset B, f(a) = b$$

pro vyjádření skutečnosti, že (a, b) patří do relace, a říkáme, že b je hodnotou zobrazení f v bodě a.

Dále říkáme, že f je

- zobrazení množiny A do množiny B, jestliže je $D = A$,
- zobrazení množiny A na množinu B, jestliže je $D = A$ a $I = B$, často také **surjektivní zobrazení**
- **injektivní zobrazení**, jestliže je $D = A$ a pro každé $b \in I$ existuje právě jeden **vzor** $a \in A$, $f(a) = b$.

Vyjádření zobrazení $f : A \to B$ jakožto relace
$f \subset A \times B, \quad f = \{(a, f(a)); a \in A\}$ známe také pod názvem **graf zobrazení** f.

U zobrazení je jasná koncepce, jak se skládají. Máme-li zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$, pak jejich **složení** $g \circ f$ je definováno

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Ve značení používaném pro relace totéž můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} f \subset A \times B, &\quad f = \{(a, f(a)); a \in A\} \\ g \subset B \times C, &\quad g = \{(b, g(b)); b \in B\} \\ g \circ f \subset A \times C, &\quad g \circ f = \{(a, g(f(a))); a \in A\}. \end{aligned}$$

Zcela obdobně definujeme **skládání relací**, v předchozích vztazích jen doplníme existenční kvantifikátory, tj. musíme uvažovat všechny „vzory“ a všechny „obrazy“.Uvažme relace $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$. Potom

$$S \circ R \subset A \times C, \quad S \circ R = \{(a, c); \exists b \in B, (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Zvláštním případem relace je **identické zobrazení**

$$\mathrm{id}_A = \{(a, a) \in A \times A; a \in A\}$$

na množině A. Je neutrální vzhledem ke skládání s každou relací s definičním oborem nebo oborem hodnot A.

Pro každou relaci $R \subset A \times B$ definujeme **inverzní relaci**

$$R^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in R\} \subset B \times A.$$

Pozor, u zobrazení, je stejný pojem užíván ve specifičtější situaci. Samozřejmě, že existuje pro každé zobrazení jeho invezní relace, ta však nemusí být zobrazením. Zcela logicky proto hovoříme o existenci inverzního zobrazení, pokud každý prvek $b \in B$ je obrazem pro právě jeden vzor v A. V takovém případě je samozřejmě inverzní zobrazení právě inverzní relací.
Všimněme si, že složením zobrazení a jeho inverzního zobrazení (pokud obě existují) vždy vznikne identické obrazení, u obecných relací tomu tak být nemusí.

Definition

V případě $A = B$ hovoříme o relaci na množině A. Říkáme, že R je:

- **reflexivní**, pokud $\mathrm{id}_A \subset R$ (tj. $(a, a) \in R$ pro všechny $a \in A$),
- **symetrická**, pokud $R^{-1} = R$ (tj. pokud $(a, b) \in R$, pak i $(b, a) \in R$),
- **antisymetrická**, pokud $R^{-1} \cap R \subset \mathrm{id}_A$ (tj. pokud $(a, b) \in R$ a zároveň $(b, a) \in R$, pak $a = b$),
- **tranzitivní**, pokud $R \circ R \subset R$, tj. pokud z $(a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$ vyplývá i $(a, c) \in R$.

Relace se nazývá **ekvivalence**, pokud je současně reflexivní, symetrická i tranzitivní. Relace se nazývá **uspořádání** jestliže je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická.

Dobrým příkladem uspořádání je inkluze. Uvažme množinu 2^A všech podmnožin konečné množiny A (značení je speciálním případem obvyklé notace B^A pro množinu všech zobrazení $A \to B$) a na ní relaci $X \subset Z$ danou vlastností „být podmnožinou". Evidentně jsou splněny všechny tři vlastnosti pro uspořádání: skutečně, je–li $X \subset Y$ a zároveň $Y \subset X$ musí být nutně množiny X a Y stejné. Je–li $X \subset Y \subset Z$ je také $X \subset Z$ a také reflexivita je zřejmá. Říkáme, že uspořádání je **úplné**, když pro každé dva prvky platí že jsou **srovnatelné**, tj. buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Všimněme si, že ne všechny dvojice (X, Y) podmnožin v A jsou srovnatelné v tomto smyslu. Přesněji, pokud je v A více než jeden prvek, existují podmnožiny X a Y, kdy není ani $X \subset Y$ ani $Y \subset X$.

Připomeňme rekurentní definici přirozených čísel $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, kde

$$0 = \emptyset, \quad n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Definujeme relaci $m < n$ právě, když $m \in n$. Evidentně jde o úplné uspořádání. Např. $2 \leq 4$, protože

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} = 4.$$

Jinak řečeno, samotná rekurentní definice zadává vztah $n \leq n + 1$ a tranzitivně pak $n \leq k$ pro všechna k, která jsou tímto postupem definována později.

Každá ekvivalence R na množině A zadává zároveň **rozklad** množiny A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. **třídy ekvivalance**. Klademe pro libovolné $a \in A$

$$R_a = \{b \in A; (a, b) \in A\}.$$

Často budeme psát pro R_a prostě $[a]$, je-li z kontextu zřejmé, o kterou ekvivalenci jde.
Zjevně $R_a = R_b$ právě, když $(a, b) \in R$ a každá taková podmnožina je tedy reprezentována kterýmkoliv svým prvkem, tzv. **reprezentantem**. Zároveň $R_a \cap R_b \neq \emptyset$ právě, když $R_a = R_b$, tj. třídy ekvivalence jsou po dvou disjunktní. Konečně, $A = \cup_{a \in A} R_a$, tj. celá množina A se suktečně rozloží na jednotlivé třídy.
Můžeme také třídám rozkladu rozumět tak, že třídu $[a]$ vnímáme jako prvek a „až na ekvivalenci“.

Příklad – konstrukce celých čísel

Na přirozených číslech umíme sice sčítat a víme, že přičtením nuly se číslo nezmění. Umíme i definovat odečítání, při něm ale jen někdy existuje výsledek.
Základní ideou konstrukce celých čísel z přirozených je tedy přidat k nim chybějící rozdíly. To můžeme udělat tak, že místo výsledku odečítání budeme pracovat s uspořádanými dvojicemi čísel, které nám samozřejmě vždy výsledek dobře reprezentují. Zbývá jen dobře definovat, kdy jsou (z hlediska výsledku odečítání) takové dvojice ekvivalentní. Potřebný vztah tedy je:

$$(a,b) \sim (a',b') \iff a-b=a'-b' \iff a+b'=a'+b.$$

Všimněme si, že zatímco výrazy v prostřední rovnosti v přirozených číslech neumíme, výrazy v pravo už ano. Snadno ověříme, že skutečně jde o ekvivalenci a její třídy označíme jako celá čísla $\mathbb{Z}$.

Na třídách ekvivalence definujeme operaci sčítání (a s ní i odečítání) pomocí reprezentantů. Např.

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)],$$

což zjevně nezávisí na výběru reprezentantů. Lze si přitom vždy volit reprezentanty $(a, 0)$ pro kladná čísla a reprezentanty $(0, a)$ pro čísla záporná, se kterými se nám bude patrně počítat nejlépe.
Tento jednoduchý přklad ukazuje, jak důležité je umět nahlížet na třídy ekvivalence jako na celistvý objekt a soustředit se na vlastnosti těchto objektů, nikoliv formální popisy jejich konstrukcí. Ty jsou však důležité k ověření, že takové objekty vůbec existují.

U celých čísel nám už platí všechny vlastnosti skalárů (KG1)–(KG4) a (O1)-(O4), z popisu vlastností skalárů. Pro násobení je neutrálním prvkem jednička, ale pro všechna čísla a různá od nuly a jedničky neumíme najít číslo a^{-1} s vlastností $a \cdot a^{-1} = 1$, tzn. chybí nám inverzní prvky. Zároveň si povšimněte, že platí vlastnost oboru integrity (OI), tzn. je-li součin dvou čísel nulový, musí být alespoň jedno z nich nula.
Díky poslední jmenované vlastnosti můžeme zkonstruovat racionální čísla $\mathbb{Q}$ přidáním všech chybějících inverzí zcela obdobným způsobem, jak jsme konstruovali $\mathbb{Z}$ z $\mathbb{N}$.

Příklad – konstrukce racionálních čísel

Na množině uspořádáných dvojic (p, q), $q \neq 0$, celých čísel definujeme relaci $\sim$ tak, jak očekáváme, že se mají chovat podíly p/q:

$$(p, q) \sim (p', q') \quad \Longleftrightarrow \quad p/q = p'/q' \quad \Longleftrightarrow \quad p \cdot q' = p' \cdot q.$$

Opět neumíme očekávané chování v prostřední rovnosti v množině $\mathbb{Z}$ formulovat, nicméně rovnost na pravé straně ano. Zjevně jde o dobře definovanou relaci ekvivalence (ověřte podrobnosti!) a racionální čísla jsou pak její třídy ekvivalence. Když budeme formálně psát p/q místo dvojic (p, q), budeme definovat operace násobení a sčítání právě pomocí formulí, které nám jsou jistě dobře známy.

Příklad – zbytkové třídy

Jiným dobrým a jednoduchým příkladem jsou tzv. zbytkové třídy celých čísel. Pro pevně zvolené přirozené číslo k definujeme equivalenci $\sim_k$ tak, že dvě čísla a, $b \in \mathbb{Z}$ jsou ekvivalentní, jestliže jejich zbytek po dělení číslem k je stejný. Výslednou množinu tříd ekvivalence označujeme $\mathbb{Z}_k$.
Nejjednodušší je tato procedura pro $k = 2$. To dostáváme $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, kde nula reprezentuje sudá čísla, zatímco jednička čísla lichá. Opět lze snadno zjistit, že pomocí reprezentantů můžeme definovat násobení a sčítání. Zkuste si ověřit, že výsledná množina „skalárů“ je komutativním tělesem (tj. splňuje i vlastnost (P) pole) právě když je k prvočíslo.

Každá ekvivalence R na množině A zadává zároveň **rozklad** množiny A na podmnožiny vzájemně ekvivalentních prvků, tzv. **třídy ekvivalance**. Klademe pro libovolné $a \in A$

$$R_a = \{b \in A; (a, b) \in A\}.$$

Často budeme psát pro R_a prostě $[a]$, je-li z kontextu zřejmé, o kterou ekvivalenci jde.
Zjevně $R_a = R_b$ právě, když $(a, b) \in R$ a každá taková podmnožina je tedy reprezentována kterýmkoliv svým prvkem, tzv. **reprezentantem**. Zároveň $R_a \cap R_b \neq \emptyset$ právě, když $R_a = R_b$, tj. třídy ekvivalence jsou po dvou disjunktní. Konečně, $A = \cup_{a \in A} R_a$, tj. celá množina A se suktečně rozloží na jednotlivé třídy.
Můžeme také třídám rozkladu rozumět tak, že třídu $[a]$ vnímáme jako prvek a „až na ekvivalenci“.

Příklad – konstrukce celých čísel

Na přirozených číslech umíme sice sčítat a víme, že přičtením nuly se číslo nezmění. Umíme i definovat odečítání, při něm ale jen někdy existuje výsledek.
Základní ideou konstrukce celých čísel z přirozených je tedy přidat k nim chybějící rozdíly. To můžeme udělat tak, že místo výsledku odečítání budeme pracovat s uspořádanými dvojicemi čísel, které nám samozřejmě vždy výsledek dobře reprezentují. Zbývá jen dobře definovat, kdy jsou (z hlediska výsledku odečítání) takové dvojice ekvivalentní. Potřebný vztah tedy je:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a - b = a' - b' \iff a + b' = a' + b.$$

Všimněme si, že zatímco výrazy v prostřední rovnosti v přirozených číslech neumíme, výrazy v pravo už ano. Snadno ověříme, že skutečně jde o ekvivalenci a její třídy označíme jako celá čísla $\mathbb{Z}$.

Na třídách ekvivalence definujeme operaci sčítání (a s ní i odečítání) pomocí reprezentantů. Např.

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)],$$

což zjevně nezávisí na výběru reprezentantů. Lze si přitom vždy volit reprezentanty $(a,0)$ pro kladná čísla a reprezentanty $(0,a)$ pro čísla záporná, se kterými se nám bude patrně počítat nejlépe. Tento jednoduchý přklad ukazuje, jak důležité je umět nahlížet na třídy ekvivalence jako na celistvý objekt a soustředit se na vlastnosti těchto objektů, nikoliv formální popisy jejich konstrukcí. Ty jsou však důležité k ověření, že takové objekty vůbec existují.

U celých čísel nám už platí všechny vlastnosti skalárů (KG1)–(KG4) a (O1)-(O4), z popisu vlastností skalárů. Pro násobení je neutrálním prvkem jednička, ale pro všechna čísla a různá od nuly a jedničky neumíme najít číslo a^{-1} s vlastností $a \cdot a^{-1} = 1$, tzn. chybí nám inverzní prvky. Zároveň si povšimněte, že platí vlastnost oboru integrity (OI), tzn. je-li součin dvou čísel nulový, musí být alespoň jedno z nich nula.
Díky poslední jmenované vlastnosti můžeme zkonstruovat racionální čísla $\mathbb{Q}$ přidáním všech chybějících inverzí zcela obdobným způsobem, jak jsme konstruovali $\mathbb{Z}$ z $\mathbb{N}$.

Příklad – konstrukce racionálních čísel

Na množině uspořádáných dvojic (p, q), $q \neq 0$, celých čísel definujeme relaci $\sim$ tak, jak očekáváme, že se mají chovat podíly p/q:

$$(p, q) \sim (p', q') \iff p/q = p'/q' \iff p \cdot q' = p' \cdot q.$$

Opět neumíme očekávané chování v prostřední rovnosti v množině $\mathbb{Z}$ formulovat, nicméně rovnost na pravé straně ano. Zjevně jde o dobře definovanou relaci ekvivalence (ověřte podrobnosti!) a racionální čísla jsou pak její třídy ekvivalence. Když budeme formálně psát p/q místo dvojic (p, q), budeme definovat operace násobení a sčítání právě pomocí formulí, které nám jsou jistě dobře známy.

Příklad – zbytkové třídy

Jiným dobrým a jednoduchým příkladem jsou tzv. zbytkové třídy celých čísel. Pro pevně zvolené přirozené číslo k definujeme equivalenci $\sim_k$ tak, že dvě čísla a, $b \in \mathbb{Z}$ jsou ekvivalentní, jestliže jejich zbytek po dělení číslem k je stejný. Výslednou množinu tříd ekvivalence označujeme $\mathbb{Z}_k$.
Nejjednodušší je tato procedura pro $k = 2$. To dostáváme $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, kde nula reprezentuje sudá čísla, zatímco jednička čísla lichá. Opět lze snadno zjistit, že pomocí reprezentantů můžeme definovat násobení a sčítání. Zkuste si ověřit, že výsledná množina „skalárů“ je komutativním tělesem (tj. splňuje i vlastnost (P) pole) právě když je k prvočíslo.