Drsná matematika I – 5. přednáška
Vektory a matice

Jan Slovák

Masarykova univerzita

17. 10. 2011

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta.
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/).
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.
- František Šik, Lineární algebra zaměřená na numerickou analýzu, MU, 1998, 176 s. ISBN 80-210-1996-2.

Definition

Symbolem $\mathbb{K}$ budeme nadále značit nějakou množinu skalárů. Prozatím budeme **vektorem** rozumět uspořádanou n-tici skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat **dimenzí**.
Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme) a násobení vektoru $u = (a_1, \dots, a_n)$ skalárem b definujeme tak, že každý prvek n-tice u vynásobíme skalárem b (skaláry v $\mathbb{K}$ násobit umíme), tj.

$$u + v = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$
$$b \cdot u = b \cdot (a_1, \dots, a_n) = (b \cdot a_1, \dots, b \cdot a_n).$$

Zpravidla jsou skaláry z pole, případně komutativního okruhu.

Pokud jste se ještě nesmířili s abstrakcí okruhů a polí, přemýšlujte v rámci číselných oborů. Potom okruhy skalárů zahrnují i celá čísla $\mathbb{Z}$ a všechny zbytkové třídy, zatímco mezi poli jsou pouze $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ a zbytkové třídy $\mathbb{Z}_k$ s prvočíselným k.

Pro sčítání vektorů v $\mathbb{K}^n$ zjevně platí (KG1)–(KG4) s nulovým prvkem

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Schválně zde používáme pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů.

Konvence značení

Podobně budeme pro sčítání a násobení používat stále stejný symbol (plus a buď tečku nebo prosté zřetězení znaků). Navíc nebudeme používat pro vektory žádné speciální značení, a ponecháváme na čtenáři aby udržoval svoji pozornost přemýšlením o kontextu. Pro skaláry ale spíše budeme používat písmena ze začátku abecedy a pro vektory od konce (prostředek nám zůstane na indexy proměných, komponent a v součtech).

Theorem

Pro všechny vektory v, $w \in \mathbb{K}^n$ *a skaláry* a, $b \in \mathbb{K}$ *platí*

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Důkaz.

Pro kterékoliv pole skalárů $\mathbb{K}$ se vlastnosti (V1)–(V4) snadno ověří pro každý prostor $\mathbb{K}^n$, protože při ověřování vždy používáme pouze vlastnosti skalárů. □

Budeme takto pracovat např. s $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, $(\mathbb{Z}_k)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Všimněme si také, že k ověření vlastností (V1)–(V4) potřebujeme pro použité skaláry pouze vlastnosti okruhu. Vlastnost (P) však bude přesto podstatná později.

Definition

Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.
Vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme (i–té) **řádky matice** A, $i = 1, \dots, m$, vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme (j–té) **sloupce matice** A, $j = 1, \dots, n$.

Matici můžeme také chápat jako zobrazení
$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$.

Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně právě vektory v $\mathbb{K}^n$. Obecné matice lze však chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m \cdot n}$, prostě zapomeneme na řádkování. Zejména tedy je definováno:

Sčítání matic a **násobení matic skaláry**:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$a \cdot A = (a.a_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $a \in \mathbb{K}$.
Dále pak matice

$$-A = (-a_{ij})$$

se nazývá **matice opačná** k matici A.

Konečně, matice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se nazývá **nulová matice**.

Zapomenutím řádkování tak získáme následující tvrzení:

Theorem

Předpisy pro $A + B$, $a \cdot A$, $-A$, 0 zadávají na množině všech matic typu m/n operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

Matice lze vhodně využít pro zápis lineárních rovnic. Uvažme následující systém m rovnic v n proměnných:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m.
\end{aligned}
$$

Posloupnost $x_1, \dots, x_n$ lze chápat jako vektor proměnných, tj. sloupec v matici typu $n/1$, a podobně s hodnotami $y_1, \dots, y_n$.

Systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A \cdot x = y$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Původní rovnice nyní obdržíme tak, že vždy bereme řádky z A a sčítáme součiny odpovídajících komponent, tj. $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$. Tím získáme i-tý prvek výsledného vektoru.
V rovině, tj. pro vektory dimenze 2, jsme už zavedli takovýto počet a viděli jsme, že s ním lze pracovat velice efektivně. Nyní budeme postupovat obecněji a zavedeme i na maticích operace násobení.

Součin matic

Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad $\mathbb{K}$ definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq k \leq q.$$

Například máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Čtvercové matice

U matice typu n/n hovoříme o **čtvercové matici**. Počet řádků a sloupců se nazývá **dimenze matice**. Matici

$$E = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se říká **jednotková matice**.
Na množině čtvercových matic nad $\mathbb{K}$ dimenze n je součin matic definován pro každé dvě matice:

Theorem

Pro libovolný okruh skalárů je na množině všech čtvercových matic dimenze n definována operace násobení. Splňuje vlastnosti (O1) a (O3) vzhledem k jednotkové matici $E = (\delta_{ij})$. Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje (O4). Obecně však neplatí (O2) ani (OI), zejména tedy neplatí (P).

Při důkazu předchozího tvrzení není podstatný stejný počet řádků a sloupců, kromě samotné existence operace násobení pro všechny dvojice matice. Příslušné vlastnosti proto platí obecněji:

Theorem

Násobení matic je asociativní a distributivní, tj. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, *kdykoliv jsou tato násobení definována. Jednotková matice je neutrálním prvkem pro násobení zleva i zprava.*

Inverzní matice

Se skaláry umíme počítat tak, že z rovnosti $a \cdot x = b$ umíme vyjádřit $x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to měli umět s maticemi, máme ale problém, jak poznat, zda taková inverzní matice existuje, a jak ji spočítat.

Definition

Říkáme, že B je **matice inverzní** k matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$ a je samozřejmé, že obě matice musí mít tutéž dimenzi n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme **invertibilní matice**.

Pokud A^{-1} a B^{-1} existují, pak existuje i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Je totiž (díky právě dokázané asociativitě násobení)
$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A.B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E$ a
$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = E$.

Protože s maticemi umíme počítat zrovna jako se skaláry, jen mají složitější chování, můžeme formálně snadno řešit systémy lineárních rovnic: Jestliže vyjádříme soustavu n rovnic pro n neznámých součinem matic

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y$$

a existuje matice inverzní k matici A, pak lze násobit zleva A^{-1} a dostaneme $A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$, tj. hledané řešení. Naopak rozepsáním podmínky $A \cdot A^{-1} = E$ pro neznámé skaláry v hledané matici A^{-1} dostaneme n systémů lineárních rovnic se stejnou maticí na levé straně a různými vektory napravo.

Z hlediska řešení systémů rovnic

$$A \cdot x = b$$

je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory b, které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Uvedeme si jednoduché manipulace s řádky rovnic a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému.

Takovým operacím říkáme **řádkové elementární transformace**. Jsou to:

- záměna dvou řádků
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
- přičtení řádku k jinému řádku.

Je zjevné, že odpovídající operace na úrovni rovnic v systému nemohou změnit množinu všech jeho řešení.

Sloupcové elementární transformace matic jsou

- záměna dvou sloupců
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
- přičtení sloupce k jinému sloupci,

Tyto operace však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné. Později budeme vidět, že sloupcové elementární transformace vedou k řešení téhož systému ale v transformovaných souřadnicích.
Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postup je algoritmický a většinou se mu říká **Gausova eliminace** proměnných.

Theorem

Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) ***schodovitý tvar****:*

- *Je-li $a_{ij} = 0$ a všechny předchozí prvky na i-tém řádku jsou také nulové, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$*
- *je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-ním řádku, pak $a_{ij} = 0$.*

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

Uvedený postup je obvyklá eliminace proměnných v systémech lineárních rovnic. Pro řešení systémů rovnic má ale uvedený postup rozumný smysl jen, když mezi skaláry neexistují dělitelé nuly. Pokud tvoří skaláry pole, pak můžeme navíc ze schodovitého tvaru snadno spočíst řešení (případně ověřit jeho neexistenci). Rozdíly jsou dobře vidět při porovnání třeba $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, případně $\mathbb{Z}_2$ nebo $\mathbb{Z}_3$.

realizace pomocí elementárních matic

Všimněme si, že elementární řádkové (resp. sloupcové) transformace odpovídají vynásobením zleva (resp. zprava) následujícími maticemi:

- Přehození i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

realizace pomocí elementárních matic

- Vynásobení i-tého řádku (resp. sloupce) skalárem a:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

realizace pomocí elementárních matic

- Sečtení i-tého řádku (resp. sloupce) s j-tým:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{pmatrix}
1 & 0 & & & & & \\
0 & \ddots & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} \\
i \rightarrow & \\
 & \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & & & \\ & & j & & & & \end{array}
\end{array}$$

Toto prostinké pozorování je ve skutečnosti velice podstatné, protože součin invertibilních matic je invertibilní a všechny elementární transformace jsou nad polem skalárů invertibilní. Pro libovolnou matici A tedy dostaneme násobením vhodnou invertibilní maticí $P = P_k \cdots P_1$ zleva (postupné násobení k maticemi zleva) její ekvivalentní řádkový schodovitý tvar $A' = P \cdot A$.
Jestliže obecně aplikujeme tentýž eliminační postup na sloupce, dostaneme z každé matice B její sloucový schodovitý tvar B' vynásobením vhodnou invertibilní maticí $Q = Q_1 \cdots Q_\ell$. Pokud ale začneme s maticí $B = A'$ v řádkově schodovitém tvaru, eliminuje takový postup pouze všechny dosud nenulové prvky mimo diagonálu matice a závěrem lze ještě i tyto elementárními operacemi změnit na jedničky. Celkem jsme tedy ověřili důležitý výsledek, ke kterému se budeme mnohokrát vracet:

Theorem

Pro každou matici A typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$ existují čtvercové invertibilní matice P dimenze m a Q dimenze n takové, že matice $P \cdot A$ je v řádkově schodovitém tvaru a

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Algoritmus pro výpočet inverzní matice

V předchozích úvahách jsme se dostali prakticky k úplnému algoritmu pro výpočet inverzní matice. Během jednoduchého níže uvedeného postupu buď zjistíme, že inverze neexistuje, nebo bude inverze spočtena. I nadále pracujeme nad polem skalárů. Ekvivalentní řádkové transformace se čtvercovou maticí A dimenze n vedou k matici P' takové, že $P' \cdot A$ bude v řádkově schodovitém tvaru. Přitom může (ale nemusí) být jeden nebo více posledních řádků nulových. Jestliže má existovat inverzní matice k A, pak existuje i inverzní matice k $P' \cdot A$. Jestliže však je poslední řádek v $P \cdot A$ nulový, bude nulový i poslední řádek v $P \cdot A \cdot B$ pro jakoukoliv matici B dimenze n. Existence takového nulového řádku ve výsledku (řádkové) Gaussovy eliminace tedy vylučuje existenci A^{-1}.

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího, nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E. Jinými slovy, najdeme další invertibilní matici P'' takovou, že pro $P = P'' \cdot P'$ platí $P \cdot A = E$. Výměnou řádkových a sloupcových transformací lze za předpokladu existence A^{-1} stejným postupem najít Q takovou, že $A \cdot Q = E$. Odtud

$$P = P \cdot E = P \cdot (A \cdot Q) = (P \cdot A) \cdot Q = Q.$$

To ale znamená, že jsme nalezli hledanou inverzní matici $A^{-1} = P = Q$ k A.

Prakticky tedy můžeme postupovat tak, že vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E, matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar, potom tzv. zpětnou eliminací na diagonální matici a v té násobíme řádky inverzními prvky z $\mathbb{K}$. Tytéž úpravy postupně prováděné s E vedou právě k matici $P = P'' \cdot P'$ z předchozích úvah, tedy z ní získáme právě hledanou inverzi. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že matice inverzní neexistuje.

V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme **lineární kombinace**. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme později, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1 u_{i_1} + \cdots + a_k u_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A.
Jestliže existuje lineární kombinace daných řádků s alespoň jedním nenulovým skalárním koeficientem, jejímž výsledkem je nulový řádek, říkáme, že jsou **lineárně závislé**. V opačném případě, tj. když jedinou možnost jak získat nulový řádek je vynásobení výhradně nulovými skaláry, jsou **lineárně nezávislé**. Obdobně definujeme lineárně závislé a nezávislé sloupce matice.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových „schodů“ v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Theorem

Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Matice A má stejný počet $h(A)$ linárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména je hodnost vždy nejvýše rovna menšímu z rozměrů matice A.

Algoritmus pro výpočet inverzních matic také říká, že čtvercová matice A dimenze m má inverzi právě, když je její hodnost rovna počtu řádků m.

řešení systémů rovnic eliminací

Jestliže budeme uvažovat matici systému rovnic a přidáme k ní ještě sloupec požadovaných hodnot, hovoříme o rozšířené matici systému. Postup, který jsme předvedli odpovídá postupné eliminaci proměnných v rovnicích a vyškrtání lineárně závislých rovnic.

- Pokud nám při přechodu na řádkově schodovitý tvar zůstane v rozšířené matici více nenulových řádků než v matici systému, pak žádné řešení nemůže existovat.
- Pokud je hodnost obou matic stejná, pak nám při zpětném dopočtu řešení zůstane právě tolik volných parametrů, kolik je rozdíl mezi počtem proměnných hodností.