1 Extrémy funkcí dvou proměnných

Naše znalosti získané při hledání extrémů funkcí jedné proměnné rozšíříme o další dimenzi na funkce dvou proměnných. Lokální extrémy funkcí více proměnných jsou definovány analogicky extrémům funkcí jedné proměnné. Tak jako jsme při hledání podezřelých bodů u funkcí jedné proměnné užívali první derivaci funkce, budeme v tomto případě užívat analogické parciální derivace podle jednotlivých proměnných. A stejně jako dříve, využijeme pravidla, že ve stacionárních (podezřelých) bodech jsou parciální derivace funkce rovny 0. Pro rozhodování je-li funkce ve svém maximu, nebo minimu, využijeme vlastností druhých derivací funkce. Pro funkci dvou proměnných existují 4 parciální derivace druhého řádu, z toho dvě jsou identické. Uspořádáním těchto derivací do matice získáme tzv. **Hessovu matici** funkce a její determinant nazýváme Hessiánem. Je-li Hessián v podezřelém bodě kladný, má vyšetřovaná funkce extrém. Je-li záporný v podezřelém bodě daná funkce extrém nemá. V případě, že je v podezřelém bodě Hessián rovný 0, neumíme rozhodnout nachází-li se v bodě lokální extrém nebo ne. O tom, je-li extrém maximum nebo minimum rozhoduje znaménko druhé derivace funkce podle proměnné x v podezřelém bodě. Je-li kladná, má zde funkce minimum, je-li záporná jedná se o maximum.

Hessova matice má pro funkci dvou proměnných má tvar:

$$\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}$$

Determinant příslušné Hessovy matice - **Hessián** - má tvar:

$$z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{xy} \cdot z_{yx} = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2$$

Nyní si ukážeme postup při hledání extrémů funkce dvou proměnných v praxi.

1.1 Řešené příklady

Příklad 1. *Vyšetřete lokální extrémy funkce $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 5$.*

Řešení. Vyšetřovaná funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$. Nejprve určíme první derivace funkce podle jednotlivých proměnných. Při derivování hledíme na druhou proměnnou jako na konstantu.

$$z_x = \frac{dz}{dx} = 3x^2 + 3y^2 - 15 - 0 + 0 = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$z_y = \frac{dz}{dy} = 0 + 6xy - 0 - 12 + 0 = 6xy - 12$$

Obě parciální derivace položíme rovny 0 a vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$$

$$6xy - 12 = 0$$

Z druhé rovnice vyplývá, že $y = \frac{2}{x}$ a dosazením do první rovnice dostaneme rovnici:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

Tato rovnice má čtyři kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 2$. Dosazením do druhé rovnice vypočítáme odpovídající hodnoty proměnné y. Tedy $y_1 = -2$, $y_2 = 2$, $y_3 = -1$ a $y_4 = 1$. Máme zde tedy čtyři podezřelé body se souřadnicemi: A[-1;-2], B[1;2], C[-2;-1] a D[2;1].
Nyní určíme druhé parciální derivace:

$$z_{xx} = \frac{d^2z}{dx^2} = 6x$$

$$z_{yy} = \frac{d^2z}{dy^2} = 6x$$

$$z_{xy} = \frac{d^2z}{dxdy} = 6y$$

$$z_{yx} = \frac{d^2z}{dydx} = 6y$$

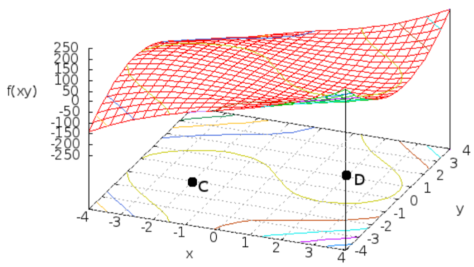
Parciální derivace z_{xy} a z_{yx} jsou vždy stejné, tento fakt nám může sloužit jako kontrola správnosti výpočtů derivací.

Hessova matice má tedy tvar:

$$\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

Determinant Hessovy matice - Hessián má tvar $36x^2 - 36y^2$. Dosazením souřadnic podezřelých bodů do Hasiánu ověříme, jedná-li se o lokální extrémy. Pro bod A[-1;-2] je Hessián roven -108. Zde tedy podle definice nemá vyšetřovaná funkce extrém.
Pro bod B[1;2] je Hessián roven opět -108. Ani zde nemá vyšetřovaná funkce extrém.
Dosazením souřadnic bodu C[-2;-1] získáme hodnotu Hessiánu rovnu 108. V tomto bodě se tedy nachází extrém $z_{xx} = -12$ jedná se tedy o maximum. Dosazením souřadnic bodu D[2;1] získáme hodnotu Hessiánu rovnu 108. V tomto bodě se tedy nachází extrém $z_{xx} = 12$ jedná se tedy o minimum.

Graf funkce je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 1: Graf funkce $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 5$ s vyznačeným minimem v bodě $D[2;1]$ a maximem v bodě $C[-2;-1]$

Příklad 2. *Nalezněte lokální extrémy funkce* $z = x^3 + y^3 - 3xy + 6$

Řešení. První parciální derivace:
$z_x = 3x^2 - 3y$
$z_y = 3y^2 - 3x$

Obě derivace položíme rovny 0 a vypočítáme souřadnice podezřelých bodů:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= y \\ y^2 &= x \end{aligned}$$

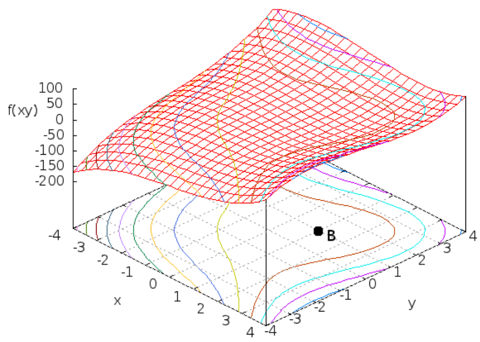
$$\begin{aligned} y^4 &= y \\ y(y^3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 1$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 1$$

Nyní určíme druhé derivace:
$z_{xx} = 6x$
$z_{xy} = -3$
$z_{yx} = -3$
$z_{yy} = 6y$
Hessián má tedy tvar: $6x \cdot 6y - (-3)^2$
Po dosazení souřadnic bodů A[0;0] a B[1;1] získáme hodnotu Hessiánu -9 pro bod A a 25 pro bod B. Je tedy zřejmé, že v bodě A není extrém, ale v bodě B ano. Podle hodnoty z_{xx}, v bodě B je rovna 6, je zde minimum.

Graf funkce je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 2: Graf funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy + 6$ s vyznačeným minimem v bodě $B[1;1]$

Příklad 3. *Určete lokální extrémy funkce* $z = x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$

Řešení. První parciální derivace:
$z_x = 3x^2 + 6x + 4y$
$z_y = 4x + 2y$

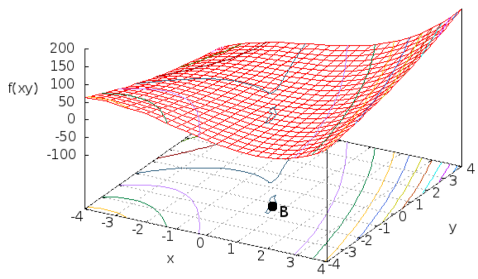
$$\begin{aligned} 3x^2+6x+4y &= 0 \\ 4x+2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2+6x+4y &= 0 \\ 2x+y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -2x \\ 3x^2+6x-8x &= 0 \\ 3x^2-2x &= 0 \\ x(3x-2) &= 0 \\ x_1 = 0 \quad &, \quad x_2 = \frac{2}{3} \\ y_1 = 0 \quad &, \quad y_2 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

Druhé derivace jsou:
$z_{xx} = 6x+6$
$z_{xy} = 4$
$z_{yx} = 4$
$z_{yy} = 2$
Hessián má tedy tvar $12x+12-16 = 12x-4$. Dosazením souřadnic dostáváme pro bod $A[0;0]$ hodnotu -4 a pro bod $B[\frac{2}{3};-\frac{4}{3}]$ hodnotu 4. V bodě A tedy nemá zadaná funkce extrém. V bodě B se extrém nachází a jedná se o minimum (hodnota z_{xx} je rovna 10).

Graf funkce je znázorněn na následujícím obrázku.



Obrázek 3: Graf funkce $z = x^3+3x^2+4xy+y^2$ s vyznačeným minimem v bodě $B[\frac{2}{3};-\frac{4}{3}]$

Příklad 4. *Určete lokální extrémy funkce* $z = 2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

Řešení. První derivace:
$z_x = 6x^2+y^2+10x$
$z_y = 2xy+2y$

$$\begin{aligned}6x^2 + y^2 + 10x &= 0\\ 2xy + 2y &= 0\\ \\ 2y(x+1) &= 0\\ y = 0 \quad &, \quad x = -1\end{aligned}$$

Pro $y = 0$:

$$\begin{aligned}6x^2 + 10x &= 0\\ 3x^2 + 5x &= 0\\ x(3x+5) &= 0\\ x_1 = 0 \quad &, \quad x_2 = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

Pro $x = -1$:

$$\begin{aligned}6 + y^2 - 10 &= 0\\ y^2 &= 4\\ y_1 = 2 \quad &, \quad y_2 = -2\end{aligned}$$

Získali jsme tedy 4 body se souřadnicemi: $A[0;0]$, $B[-\frac{5}{3};0]$, $C[-1;2]$ a $D[-1;-2]$.
Druhé derivace funkce jsou:
$z_{xx} = 12x + 10$
$z_{xy} = 2y$
$z_{yx} = 2y$
$z_{yy} = 2x + 2$
Hessián má tedy tvar: $(12x+10)(2x+2) - 4y^2$. Dosazením souřadnic podezřelých bodů dostáváme následující hodnoty: pro A je Hessián 20, pro B $\frac{40}{3}$, pro C a pro D je -16. V bodech C a D tedy není extrém. V bodě A je minimum, protože zde je hodnota z_{xx} 10, v bodě B je maximum, protože zde je hodnota z_{xx} -10.

Graf funkce je znázorněn na následujícím obrázku.

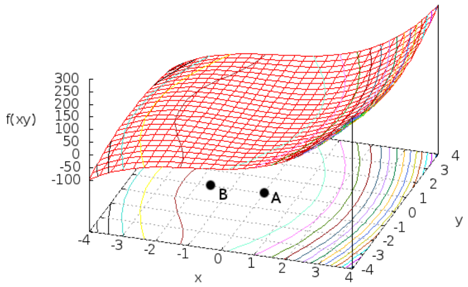
1.2 Příklady na procvičení

Určete lokální extrémy funkce:

1. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$
2. $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$
3. $z = (3x - x^3)(y^2 + 1)$
4. $z = xy(4 - x - y)$

Výsledky:

1. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12$
   (a) $z_x = 2x - 2$
   $z_y = 2y - 4$



Obrázek 4: Graf funkce $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$s vyznačeným minimem v bodě $A[0;0]$ a maximem v bodě $B[-\frac{5}{3};0$

(b) Podezřelý bod je A[1;2]

(c) $z_{xx} = 2$
$z_{xy} = 0$
$z_{yx} = 0$
$z_{yy} = 2$

(d) Hessián má tvar: $2 \cdot 2 - 0$.

(e) bod A[1;2] je lokální minimum.

2. $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$

(a) $z_x = 2xy^2 - 2x$
$z_y = 2yx^2 - 2y$

(b) Podezřelé body: A[0;0], B[1;1], C[1;-1], D[-1;1], E[-1;-1]

(c) $z_{xx} = 2y^2 - 2$
$z_{xy} = 4xy$
$z_{yx} = 4xy$
$z_{yy} = 2x^2 - 2$

(d) Hessián má tvar: $(2y^2 - 2)(2x^2 - 2) - 16x^2y^2$.

(e) Lokální maximum v bodě A[0;0].

3. $z = (3x - x^3)(y^2 + 1)$

(a) $z_x = (3 - 3x^2)(y^2 + 1)$
$z_y = 2y(3x - x^3)$

(b) Podezřelé body: A[1;0], B[-1;0]

(c) $z_{xx} = -6x(y^2 + 1)$
$z_{xy} = 2y(3 - 3x^2)$
$z_{yx} = 2y(3 - 3x^2)$
$z_{yy} = 2(3x - x^3)$

(d) Hessián: $(6x(y^2 + 1))(2(3x - x^3)) - (2(3x - x^3))^2$

(e) Extrém není v žádném bodě.

4. $z = xy(4 - x - y)$

(a) $z_x = y(4 - x - y) - xy$
$z_y = x(4 - x - y) - xy$

(b) Podezřelé body: $A[0;4]$, $B[4;0]$, $C[0;0]$, $D[\frac{4}{3};\frac{4}{3}]$.

(c) $z_{xx} = -2y$
$z_{xy} = 4 - 2y - 2x$
$z_{yx} = 4 - 2y - 2x$
$z_{yy} = -2x$

(d) Hessián: $4xy - (4 - 2y - 2x)^2$

(e) Lokální minimum v bodě $D[\frac{4}{3};\frac{4}{3}]$.