Teoretická fyzika ï Základy speciální teorie relativity

Michal Lenc ï podzim 2012

Obsah

1. Princip relativity

1.1 Galileiho princip relativity

Princip relativity říká, že fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech inerciálních souřadných soustavách. Inerciální soustava je definována tak, že se v ní volná částice pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, musí tedy být vzájemný pohyb dvou různých inerciálních soustav rovnoměrný přímočarý. Galileiho princip relativity předpokládá vztah mezi časem a prostorovými souřadnicemi v soustavě K a K' (ta má se soustavou stejně orientované souřadné osy)

$$t = \tau + t' \quad , \quad \vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}\,' + \vec{V} t' \quad , \tag{1.1}$$

přitom obvykle ztotožníme počátek odečítání času a prostorových souřadnic, tj. pokládáme $\tau = 0$, $\vec{\rho} = \vec{0}$. Porovnání druhého Newtonova pohybového zákonu v soustavách K a K'

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}\left(\vec{r}, t\right) \quad , \quad m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t'^2} = \vec{F}'\left(\vec{r}\,', t'\right) \tag{1.2}$$

vede po dosazení (1.1) do druhé rovnice v (1.2) k podmínce transformace síly

$$\vec{F}\left(\vec{r}, t\right) = \vec{F}'\left(\vec{r} - \vec{V} t, t\right) \quad . \tag{1.3}$$

Jestliže síla splňuje podmínku (1.3), vyhovuje pohybová rovnice daná druhým Newtonovým zákonem Galileiho principu relativity. Je tomu tak například vždy, závisí-li síla na vzdálenosti částice od nějakého silového centra (nebo od jiné částice). Ale také například Lorentzova síla v homogenním elektrickém a magnetickém poli by vyhovovala Galileovu principu relativity, pokud by se pole transformovala podle vztahu

$$\vec{E}_0' = \vec{E}_0 + \vec{V} \times \vec{B}_0 \quad , \quad \vec{B}_0' = \vec{B}_0 \quad . \tag{1.4}$$

Pole se ale ve skutečnosti (jako řešení Maxwellových rovnic) transformují jako

$$\begin{gathered} \vec{E}_{0\parallel}' = \vec{E}_{0\parallel} \quad , \quad \vec{B}_{0\parallel}' = \vec{B}_{0\parallel} \quad , \\ \vec{E}_{0\perp}' = \frac{\left(\vec{E}_0 + \vec{V} \times \vec{B}_0\right)_\perp}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad , \quad \vec{B}_{0\perp}' = \frac{\left(\vec{B}_0 - \dfrac{\vec{V} \times \vec{E}_0}{c^2}\right)_\perp}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad . \end{gathered} \tag{1.5}$$

Podívejme se, jak se při Galileiho transformaci chová vlnová rovnice

$$\Box \psi \equiv \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0 \quad . \tag{1.6}$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že se soustava K' pohybuje vůči K podél osy x. Je pak

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad ,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}=\left(-V\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial t'}\right) \quad\Rightarrow \tag{1.7}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=V^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-2V\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} \quad .$$

Máme tedy pro d´Alembertův operátor v pohybující se soustavě jiný výraz než v původní soustavě, a mohli bychom tedy principiálně odlišit privilegovanou inerciální soustavu v klidu.

1.2 Události, interval

Základním pojmem pro úvodní úvahy o Einsteinově principu relativity je událost (pro jednoduchost na chvíli dvě prostorové dimenze potlačíme), charakterizovaná časem t a bodem na ose x, kdy a kde k události došlo. Hodnoty samozřejmě závisí na volbě souřadné soustavy. Připomeňme si známou situaci, kdy poloha bodu v rovině je charakterizována kartézskými souřadnicemi x a y. Hodnoty závisí na poloze počátku a na orientaci os souřadné soustavy. Vezmeme-li však čtverec vzdálenosti dvou bodů

$$l^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2 \quad , \tag{1.8}$$

zjistíme snadno, že je ve všech kartézských soustavách stejný. Transformační rovnice mezi soustavami K a K' jsou

$$x=a+\cos\varphi\, x'+\sin\varphi\, y' \quad , \quad y=b-\sin\varphi\, x'+\cos\varphi\, y' \quad . \tag{1.9}$$

Einstein předpokládal, že rychlost šíření světla ve vakuu $c=299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ je ve všech inerciálních souřadných soustavách stejná. Potom pro dvě události, spojené šířením světla ve vakuu (např. první událostí je emise nějakého fotonu, druhou událostí absorpce tohoto fotonu) platí (první člen je čtverec součinu rychlosti a doby šíření, ten musí být přirozeně roven druhému členu, což je čtverec vzdálenosti, kterou světlo urazilo)

$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2-\left(x_2-x_1\right)^2=0 \quad , \quad c^2\left(t_2'-t_1'\right)^2-\left(x_2'-x_2'\right)^2=0 \quad . \tag{1.10}$$

V zobecnění pak nazveme veličinu

$$s^2=c^2\left(t_2-t_1\right)^2-\left(x_2-x_1\right)^2 \tag{1.11}$$

čtvercem intervalu mezi (libovolnými) dvěma událostmi.

Všimněme si, že invariance (1.8) vzhledem k transformaci (1.9) vychází ze vztahu $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Vztah (1.11) se od (1.8) odlišuje znaménkem minus místo plus, budeme tedy hledat transformaci, která vychází ze vztahu $\cosh^2\psi-\sinh^2\psi=1$, tedy

$$c\,t = c\,\tau + \cosh\psi\, c\,t^{/} + \sinh\psi\, x^{/} \quad , \quad x = \xi + \sinh\psi\, c\,t^{/} + \cosh\psi\, x^{/} \quad . \tag{1.12}$$

Snadno vidíme, že transformace (1.12) ponechává výraz pro čtverec intervalu (1.11) invariantní.

1.3 Lorentzova transformace

Zatímco úhel φ v (1.8) má jasný geometrický význam, musíme fyzikální význam úhlu ψ teprve najít. Téměř vždy předpokládáme ztotožnění počátku odečítání času i prostorových souřadnic ve všech inerciálních soustavách, tedy položíme v (1.12) $c\,\tau = \xi = 0$. Ať se nyní pohybuje soustava $K^{/}$ (a tedy i její počátek $x^{/} = 0$) vůči soustavě K rychlostí V. Potom máme z (1.12) s označením $\beta = V/c$

$$V = \frac{x}{t} = c \tanh\psi \quad \Rightarrow \quad \cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \sinh\psi = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.13}$$

a výsledný vztah pro Lorentzovu transformaci (přidáme dva dosud potlačené rozměry geometrického prostoru)

$$c\,t = \frac{c\,t^{/} + \beta\, x^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad x = \frac{x^{/} + V\,t^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad y = y^{/} \quad , \quad z = z^{/} \quad . \tag{1.14}$$

1.4 Einsteinův princip relativity

Pro infinitezimálně blízké události můžeme psát interval jako

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) \tag{1.15}$$

a Lorentzovu transformaci jako

$$c\,\mathrm{d}t = \frac{c\,\mathrm{d}t^{/} + \dfrac{V}{c}\mathrm{d}x^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x^{/} + V\,\mathrm{d}t^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y^{/} \quad , \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z^{/} \quad . \tag{1.16}$$

Požadavek, aby rovnice vyjadřující fyzikální zákony byly invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci, nazýváme Einsteinovým principem relativity.

Vždy jsou uváděny dva klasické příklady na použití vztahu (1.14) – kontrakce délek a dilatace času. V soustavě K je podél osy x v klidu měřítko, jehož dvě rysky mají v této soustavě souřadnice x_1, x_2. Vzdálenost (klidová) rysek je tedy $\Delta x_0 = x_2 - x_1$. Vzdálenost v soustavě $K^{/}$ je (souřadnice jsou určovány ve stejném čase $t_1^{/} = t_2^{/}$)

$$\Delta x^{/} = x_2^{/} - x_1^{/} = \Delta x_0 \sqrt{1-\beta^2} \quad . \tag{1.17}$$

Protože vzdálenost zjišťovaná v pohybující se soustavě je menší než vzdálenost v klidové soustavě, mluvíme o kontrakci délky. Nyní předpokládejme, že se v soustavě $K^{/}$ odehrají v ļasech t_1' a t_2' v jediném místŊ $x_1'=x_2'$, $y_1'=y_2'$, $z_1'=z_2'$ dvŊ události (interval mezi událostmi je tedy $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$. V soustavŊ K je interval mezi tŊmito událostmi

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{1.18}$$

Ļasový interval zjiġŠovaný v soustavŊ, vŢļi které se soustava, kde se události odehrály v jednom místŊ prostoru je delġí, mluvíme proto o dilataci ļasu. Je dŢleġité uvŊdomit si pŚesný význam poļítaných veliļin a tedy i pojmŢ Ăkontrakce délekñ a Ădilatace ļasuñ.

1.5 Relativistická kinematika

Pro rychlost ($\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$, $\vec{v}' = \mathrm{d}\vec{r}'/\mathrm{d}t'$) dostaneme z rovnice (1.16) transformaļní vztahy

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2} \quad , \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' V/c^2} \quad , \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' V/c^2} \quad . \tag{1.19}$$

Vztah pro transformaci rychlosti odvodíme také následující úvahou. MŊjme v soustavŊ K' ļástici, která se pohybuje konstantní rychlostí u, tedy platí pro ni $x' = u\,t'$. Z hlediska vnŊjġího pozorovatele v soustavŊ K dostaneme podle (1.14)

$$x = \frac{x' + V\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(u+V)\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad t = \frac{t' + V\,x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\left(1 + V\,u/c^2\right)t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{1.20}$$

pro rychlost v soustavŊ K máme pak

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u+V}{1 + u\,V/c^2} \quad . \tag{1.21}$$

Velikost této rychlosti uġ nemŢġe pŚekroļit velikost rychlosti svŊtla a pro $u = c$ dostáváme pŚirozenŊ $v_x = c$.

1.6 Hybnost a energie

PŚi odvození výrazŢ pro hybnost a energii ļástice hmotnosti m musíme vycházet z jiġ známé invariantní veliļiny ï to je interval (1.15). Ten mŢġeme pouġít pro konstrukci invariantního úļinku pro volnou ļástici, který by pro malé rychlosti pŚecházel do klasického tvaru. VezmŊme tedy za základ rozmŊrovŊ správný a úmŊrný hmotnosti invariantní výraz

$$S = -m\,c \int_a^b \mathrm{d}s \quad . \tag{1.22}$$

Pouġijeme-li pro parametrizaci ļasovou souŚadnici, dostáváme

$$S=-mc\int_a^b\sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\vec{r}^{\,2}}=-mc^2\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\,\mathrm{d}t\quad . \tag{1.23}$$

Porovnáním se standardním výrazem $S=\int_{t_a}^{t_b}L\,\mathrm{d}t$ tak dostáváme pro Lagrangeovu funkci

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\quad . \tag{1.24}$$

Hybnost a energii získáme obvyklým postupem

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}\quad,\quad E=\vec{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}}\quad . \tag{1.25}$$

Pro malé rychlosti přechází výraz pro hybnost na klasický tvar $\vec{p}=m\vec{v}$ a pro energii dostáváme z prvních dvou členů rozvoje odmocniny

$$E=mc^2+\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\quad .$$

Často se vztahy (1.25) pro hybnost a energii chápou jako nárůst hmotnosti částice s rychlostí. Vhodnější je ale považovat hmotnost za charakteristickou vlastnost částice a vztah (1.25) prostě říká, že vztah mezi rychlostí a hybností je složitější než v nerelativistické aproximaci. Snad nejslavnější fyzikální rovnicí je (uvažujme částici v klidu)

$$E=mc^2\quad . \tag{1.26}$$

Představme si nějaké atomové jádro hmotnosti *M*, jako celek v klidu. Oddělíme-li postupně jednotlivé nukleony a vzdálíme tak, že jejich interakci lze zanedbat, zjistíme, že rozdíl energií

$$\Delta E=\left(M-\sum_a m_a\right)c^2\quad , \tag{1.27}$$

kde sčítáme hmotnosti všech volných nukleonů, je obecně nenulový. Je-li rozdíl kladný, lze rozštěpením jádra energii získat, je-li záporný, lze složením lehčích jader do těžšího jádra energii získat. Používáme-li pro popis jevů důsledně fyzikální terminologie, nemůže dojít k filosofickým diskusím o přeměně hmoty na energii či naopak.

S pomocí veličin energie a vektoru hybnosti vyjádříme celkovou energii *E* a kinetickou energii *T*

$$E=\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2+m^2c^4}\quad,\quad T=E-mc^2=\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2+m^2c^4}-mc^2\quad . \tag{1.28}$$

V limitních případech má výraz pro kinetickou energii tvar

$$T \ll mc^2 \quad \Rightarrow \quad T \approx \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \quad , \quad T \gg mc^2 \quad \Rightarrow \quad T \approx |\vec{p}|c \quad . \tag{1.29}$$

1.7 Více o intervalu

Mějme dvě události popsané v inerciální soustavě K souřadnicemi $(t_1, \vec{r}_1)$ a $(t_2, \vec{r}_2)$. Události jsou spojeny časupodobným intervalem a druhá událost nastala později než první

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2 > 0 \quad , \quad \Delta t = t_2 - t_1 > 0 \quad , \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad .$$

Ukážeme, že pořadí událostí vidí stejně pozorovatelé ve všech inerciálních soustavách. Osu x zvolíme jako společnou osu soustavy K a soustavy K', která se vůči K podél této osy pohybuje rychlostí V. Lorentzova transformace (1.16) je

$$c\,\Delta t = \gamma\left(c\,\Delta t' + \beta\,\Delta x'\right) \quad , \quad \Delta x = \gamma\left(\Delta x' + V\,\Delta t'\right) \quad , \quad \Delta y = \Delta y' \quad , \quad \Delta z = \Delta z' \quad .$$

Máme

$$c\,\Delta t' = \gamma\left(c\,\Delta t - \beta\,\Delta x\right) > \gamma\left(c\,\Delta t - |\Delta \vec{r}|\right) > 0 \quad .$$

Poslední nerovnost plyne z toho, že interval je časupodobný, předposlední nerovnost z toho, že odečítáme větší hodnotu, protože vždy $\beta < 1$ a $\Delta x < |\Delta \vec{r}|$.

Jsou-li události spojeny prostorupodobným intervalem a druhá událost nastala v soustavě K později než první, můžeme najít takovou soustavu K', kde druhá událost nastane dříve než první. Zvolíme společnou osu x tak, aby na ní ležely prostorové souřadnice obou událostí a její orientaci tak, aby $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$. Potom máme

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0 \quad , \quad \Delta t > 0 \quad , \quad \Delta x > 0 \quad ,$$

Takže $c\,\Delta t < \Delta x$. Lorentzova transformace dává

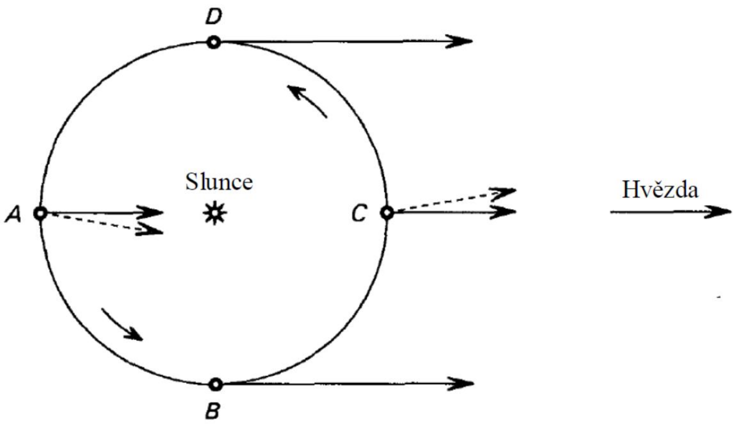
$$c\,\Delta t' = \gamma\left(c\,\Delta t - \beta\,\Delta x\right) = \gamma\, c\,\Delta t\left(1 - \beta\,\bar{\beta}\right) \quad , \quad \bar{\beta} = \frac{\Delta x}{c\,\Delta t} > 1 \quad .$$

Pro všechny soustavy K' s $1/\bar{\beta} < \beta < 1$ je pak opravdu $\Delta t' = t_2' - t_1' < 0$.

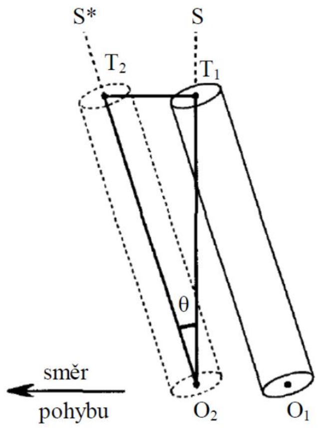
2. Příklady relativistických jevů

2.1 Aberace světla

Při pozorování hvězd ze Země se projevuje (mimo jiné) to, že Země obíhá kolem Slunce. Na obrázcích je znázorněn jev aberace světla, který se nejvíce projeví v bodech A a C,



zatímco paralaxa se nejvíce projeví při pozorování v bodech B a D. Když světelný paprsek od



hvězdy S vstupuje do tubusu v bodě T_1, je okulár v místě O_1 tak, aby při posunutí tubusu vlivem pohybu Země byl v poloze O_2, kde zachytí uvažovaný paprsek. Hvězda se ovšem jeví v poloze S*. Obecný výraz pro transformaci složek vektoru rychlosti máme vztah (1.19)

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' V/c^2} \quad , \quad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' V/c^2} \quad , \quad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + v_x' V/c^2} \quad . \tag{2.1}$$

Sledujeme-li šíření světelného paprsku v rovině $x - y$ ($v_z = v_z' = 0$ při vhodné volbě úhlů θ resp. θ', tj. $v_x = c\sin\theta$, $v_y = -c\cos\theta$ resp. $v_x' = c\sin\theta'$, $v_y' = -c\cos\theta'$)

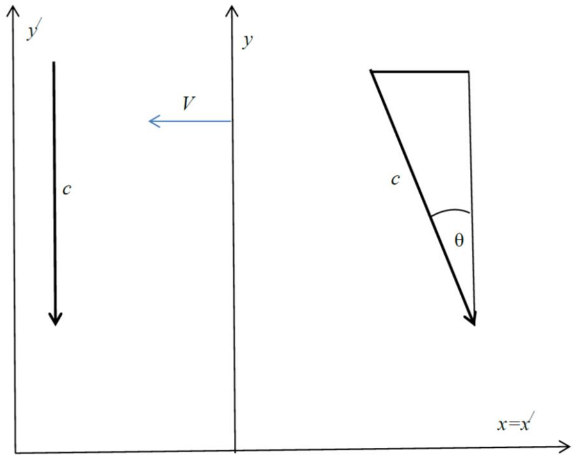
$$\sin\theta = \frac{\sin\theta' + \beta}{1 + \beta\sin\theta'} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\sin\theta'} \quad , \tag{2.2}$$

dostaneme po podělení výrazů ve (2.2) vztah mezi úhly v soustavě spojené se zdrojem vysílajícím paprsek K' a soustavě spojené s detektorem přijímajícím paprsek K (tubus dalekohledu), která se vůči K' pohybuje rychlostí $-V$ podél osy x

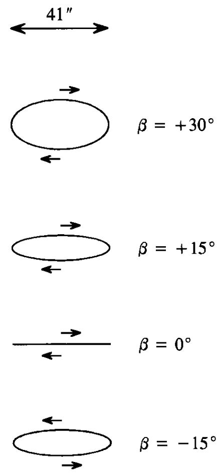
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\beta + \sin\theta'}{\sqrt{1-\beta^2}\cos\theta'} \quad . \tag{2.3}$$

Pro $\theta^{/}=0$ dostaneme z (2.3)

$$\operatorname{tg}\theta=\beta\Big/\sqrt{1-\beta^{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta=\beta \quad . \tag{2.4}$$



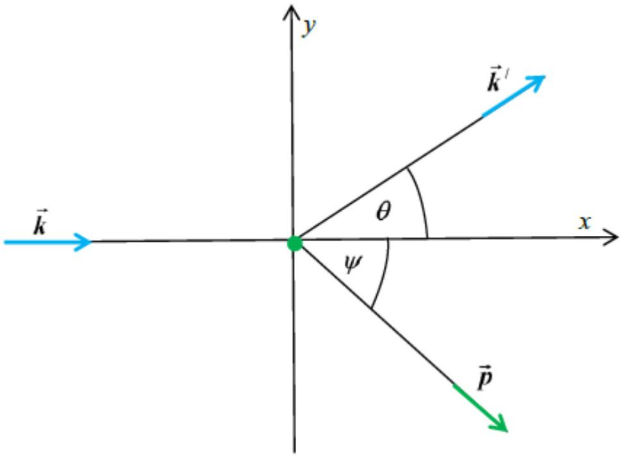
Na obrázku je případ $\theta^{/}=0$ nakreslen. Pro pohyb Země kolem Slunce je maximální velikost aberace rovná 20,5". Jestliže neleží směr ke hvězdě v rovině ekliptiky, pozorujeme zdánlivou polohu hvězdy jako elipsu s velkou osou 41", jak je vidět na dalším obrázku.



2.2 Comptonův rozptyl

Podél osy x dopadá foton rentgenového záření s energií $\hbar\omega$ na elektron v klidu, po rozptylu pokračuje odchýlen od původního směru o úhel θ a s nižší energií $\hbar\omega^{/}$. Zákony zachování nám dají (pohyb se děje v rovině)

$$\begin{gathered}\hbar\omega+mc^{2}=\hbar\,\omega^{/}+\sqrt{p^{2}c^{2}+m^{2}c^{4}} \quad , \\ \frac{\hbar\omega}{c}=\frac{\hbar\omega^{/}}{c}\cos\theta+p\cos\psi \quad , \quad 0=\frac{\hbar\omega^{/}}{c}\sin\theta-p\sin\psi \quad .\end{gathered} \tag{2.5}$$



Po kratġím výpoļtu (vylouļením ĂnepotŚebnýchñ neznámých p a γ) dojdeme k výslednému známému vztahu pro rozdíl vlnových délek ($k = \hbar\omega/c = 2\pi/\lambda$)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C\left(1 - \cos\theta\right) \quad , \quad \lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{mc} \quad , \tag{2.6}$$

kde λ_C je konstanta ï Comptonova vlnová délka.

2.3 DopplerŢv jev

DopplerŢv jev je pozorovaná zmĎna energie fotonu (frekvence vlnĎní ω'), emitovaného zdrojem, který se sám pohybuje rychlostí V podél osy x vŢļi laboratorní soustavĎ ("pozorovateli") K (v ní je pozorována frekvence vlnĎní ω). Soustava spojená se zdrojem je K'. Uvaġujme rovinnou vlnu s vlnovým vektorem v rovinĎ $x-y$. NapŚíklad polohy míst s danou intensitou vlny musí urļit stejnĎ pozorovatelé v obou soustavách, pouze jim pŚiŚadí rŢzné souŚadnice a frekvence, ale fáze vlny je relativistický invariant. V naġem pŚípadĎ píġeme rovnost fází jako

$$\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\cos\theta' - \frac{y'}{c}\sin\theta'\right) = \omega\left(t - \frac{x}{c}\cos\theta - \frac{y}{c}\sin\theta\right) \quad . \tag{2.7}$$

Úhel mezi smĎrem ġíŚení vlny a smĎrem pohybu zdroje (tj. osou x) jsme oznaļili θ. Dosadíme-li do (2.7) ze vztahu pro Lorentzovu transformaci (1.14), dostáváme

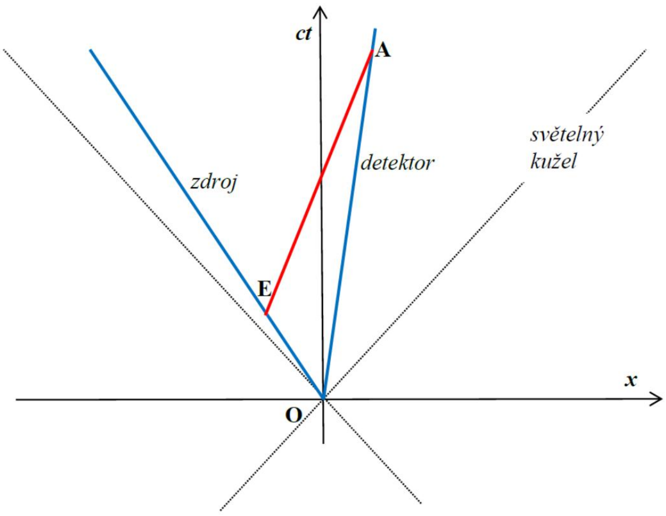
$$\omega'\left(t' - \frac{x'}{c}\cos\theta' - \frac{y'}{c}\sin\theta'\right) = \omega\left(\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}t' - \frac{\cos\theta - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{x'}{c} - \frac{y'}{c}\sin\theta\right) \quad . \tag{2.8}$$

Porovnáním ļlenŢ u t' dostaneme vztah vyjadŚující DopplerŢv jev

$$\omega = \omega'\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} \approx \omega'\left[1 + \beta\cos\theta + \frac{\beta^2}{2}\cos 2\theta\right] \quad . \tag{2.9}$$

Klasický Dopplerův jev (bez členu u β^2) je rozdíl ve frekvenci přibližujícího se ($\theta = 0$) a vzdalujícího se ($\theta = \pi$) zdroje, relativistický Dopplerův jev (člen u β^2) pozorujeme pro $\theta = \pi/2$. Porovnáním členů u x' dostaneme vztah vyjadřující aberaci světla, ale s jiným značením a jinou situací (zde se pohybuje soustava spojená se zdrojem, v 2.1 se pohybovala laboratorní soustava).

Pokud budeme uvažovat o vzájemném pohybu zdroje a detektoru po společné přímce, můžeme si představit diagram na obrázku (nemusí se jednat jen o světlo, může jít třeba o zvukové vlnění). V obrázku je znázorněn světelný kužel, po kterém by se z bodu O šířily světelné paprsky. Protože na osách máme souřadnice x a ct a pro světlo máme interval $s^2 = c^2 t^2 - x^2 = 0$, je úhel povrchu kužele s osami roven $45°$. Naopak přímky znázorňující



pohyb zdroje OE a detektoru OA musí svírat s osou ct úhel menší jak $45°$, jejich rychlost je menší jak rychlost světla. Úsečka EA svírá s osou ct úhel mnohem menší než $45°$, jde-li o zvukovou vlnu, nebo úhel právě $45°$, jde-li o elektromagnetické vlnění. Máme tedy pro rychlosti signálu, zdroje a detektoru

$$c_S = \frac{x_A - x_E}{t_A - t_E} \quad , \quad v_Z = -\frac{x_E}{t_E} \quad , \quad v_D = \frac{x_A}{t_A} \quad .$$

Rychlosti počítáme tak, že kladné jsou při vzdalování zdroje a detektoru. Když se zdroj a detektor potkají v O, zapne se signál. Vypnutí signálu po uplynutí jedné periody nastane u zdroje v bodě E a detektor je zaznamená v bodě A. Vlastní čas, který uplynutí periody odpovídá je pro zdroj a detektor dán vztahy

$$
\begin{aligned}
\tau_Z &= \frac{\overline{\mathrm{OE}}}{c} = \sqrt{t_E^2 - x_E^2/c^2} = t_E\sqrt{1-v_Z^2/c^2} \quad , \\
\tau_D &= \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{c} = \sqrt{t_A^2 - x_A^2/c^2} = t_A\sqrt{1-v_D^2/c^2} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Poměr frekvencí je převrácenou hodnotou poměru period

$$
\frac{f_D}{f_Z} = \frac{\tau_Z}{\tau_D} = \frac{t_E}{t_A}\frac{\sqrt{1-v_Z^2/c^2}}{\sqrt{1-v_D^2/c^2}} \quad .
$$

Poměr časových údajů získáme úpravou

$$
c_S = \frac{x_A - x_E}{t_A - t_E} = \frac{v_D\, t_A + v_Z\, t_E}{t_A - t_E} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_E}{t_A} = \frac{1 - v_D/c_S}{1 + v_Z/c_S} \quad ,
$$

takže

$$
\frac{f_D}{f_Z} = \frac{1 - v_D/c_S}{1 + v_Z/c_S}\frac{\sqrt{1-v_Z^2/c^2}}{\sqrt{1-v_D^2/c^2}} \quad . \tag{2.11}
$$

Pro všechny rychlosti malé ve srovnání s rychlosti světla (zvukové vlny) dostáváme klasický vztah pro Dopplerův jev – při vzdalování ($v_Z > 0, v_D > 0$) vnímaná frekvence klesá, při přibližování ($v_Z < 0, v_D < 0$) vnímaná frekvence roste

$$
\frac{f_D}{f_Z} \doteq \frac{1 - v_D/c_S}{1 + v_Z/c_S} \quad . \tag{2.12}
$$

Pro světlo ($c_S = c$) můžeme (2.11) přepsat na

$$
\frac{f_D}{f_Z} = \sqrt{\left(\frac{1 - v_D/c}{1 + v_Z/c}\right)\left(\frac{1 - v_Z/c}{1 + v_D/c}\right)} \quad . \tag{2.13}
$$

Vezme teď v úvahu vztah pro skládání rychlostí (1.21) a pro vzájemnou rychlost zdroje a detektoru máme

$$
v = \frac{v_Z + v_D}{1 + v_Z\, v_D/c^2} \quad .
$$

Roznásobením výrazů ve (2.13) a dosazením relativní rychlosti dostáváme vztah

$$
\frac{f_D}{f_Z} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad , \tag{2.14}
$$

který přirozeně souhlasí se vztahem (2.9) pro $\theta = 0$.

2.4 Vstřícné svazky

Při srážce dvou částic (řekněme elektronu a positronu) může vzniknout nová částice. Spočtěme maximální hmotnost vzniklé částice.

(a) Na elektron v klidu dopadá positron s kinetickou energií $T = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - m c^2$. Zákony zachování dávají

$$m c^2 + \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{M^2 c^4 + P^2 c^2} \quad , \quad 0 + p = P \quad , \tag{2.15}$$

takže (pro $T \gg m c^2$)

$$M c^2 \approx \sqrt{2 m c^2 T} \quad . \tag{2.16}$$

(b) Čelně se srážejí elektron a positron stejné energie. Ze zákonů zachování pak

$$\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{M^2 c^4 + P^2 c^2} \quad , \quad p - p = P \quad , \tag{2.17}$$

takže (opět pro $T \gg m c^2$)

$$M c^2 \approx 2T \quad . \tag{2.18}$$

Pro kinetickou energii v LEP $T \approx 200$ GeV a klidovou energii elektronu $m c^2 \approx 500$ keV jde o vskutku propastný rozdíl v dosažitelné maximální hmotnosti částice vytvořené při srážce elektronu s positronem.

3. Čtyřvektory

3.1 Základní pojmy

Při značení se budeme jednak řídit Einsteinovou konvencí (přes stejné indexy nahoře i dole se sčítá), jednak latinské indexy budou nabývat hodnot pro časoprostorové veličiny (0, 1, 2, 3), řecké indexy hodnot pro prostorové veličiny (1, 2, 3). Nanejvýš často tato domluva bývá i opačná.

Nejprve definujeme podstatné tenzory. Metrický tenzor a jednotkový tenzor jsou

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.1}$$

Snadno vidíme, že platí

$$g_{il}\, g^{lk} = \delta_i^k \quad . \tag{3.2}$$

Úplný antisymetrický pseudotensor 4. řádu je definován pomocí vztahů

$$\varepsilon^{iklm} \left(\varepsilon^{0123} = 1 \right) \quad , \quad \varepsilon_{iklm} \left(\varepsilon_{0123} = -1 \right) \quad . \tag{3.3}$$

Čtyřvektory souřadnic události (kontravariantní a kovariantní) zapisujeme jako

$$x^i = \left(x^0, x^1, x^2, x^3 \right) = \left(c t, \vec{r} \right) \quad , \quad x_i = \left(x_0, x_1, x_2, x_3 \right) = \left(c t, -\vec{r} \right) \quad . \tag{3.4}$$

Pomocí metrického tenzoru převádíme složky kontravariantního vektoru na složky kovariantního vektoru a naopak

$$x_i = g_{ik}\, x^k \quad , \quad x^i = g^{ik}\, x_k \tag{3.5}$$

(s Einsteinovou sumační konvencí). Interval pak můžeme psát jako

$$s^2 = x^i\, x_i = g_{ik}\, x^i\, x^k = g^{ik}\, x_i\, x_k = c^2\, t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \quad . \tag{3.6}$$

Věnujme se na chvíli trojrozměrnému eukleidovskému prostoru. Tam máme polární a axiální vektory. Při záměně orientace kartézských souřadných os se změní zápis vektoru průvodiče

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (-x)\left(-\vec{i}\right) + (-y)\left(-\vec{j}\right) + (-z)\left(-\vec{k}\right) \quad . \tag{3.7}$$

Definujeme operaci zrcadlení jako

$$\vec{r}^{\,/} = \hat{P}\vec{r} = -\vec{r} \quad . \tag{3.8}$$

Pro vektor rychlosti máme tedy

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \vec{v}^{\,/} \left(= \hat{P}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\left(\hat{P}\vec{r}\right)}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}^{\,/}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -\vec{v} \quad . \tag{3.9}$$

Pro vektor úhlové rychlosti ale

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} \quad , \quad \vec{\omega}^{\,/} = \hat{P}\vec{\omega} = \vec{r}^{\,/} \times \vec{v}^{\,/} = \left(-\vec{r}\right) \times \left(-\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{\omega} \quad . \tag{3.10}$$

Vektory, které se při zrcadlení transformují stejně jako průvodič, se nazývají polární a vektory, které se transformují stejně jako úhlová rychlost, se nazývají axiální. Obecně zavádíme ve trojrozměrném prostoru axiální vektor jako pseudovektor duální k antisymetrickému tenzoru

$$C_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma=1}^{3} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, C_{\beta\gamma} \quad , \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta\, B_\gamma - A_\gamma\, B_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad . \tag{3.11}$$

Ve čtyřrozměrném prostoročase jsou duálními antisymetrický tenzor 2. řádu s antisymetrickým pseudotenzorem 2. řádu a antisymetrický pseudotenzor 3. řádu s vektorem

$${}^*A^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}\, A_{lm} \quad , \quad {}^*A^{ikl} = \varepsilon^{iklm}\, A_m \quad . \tag{3.12}$$

3.2 Lorentzova grupa

Setkali jsme se s již s Lorentzovou transformací. Tato transformace je jednou z transformací, tvořících Lorentzovu grupu. Tak jako se skalární součin vektorů v trojrozměrném eukleidovském prostoru nemění při transformacích z grupy rotací, nebude se skalární součin čtyřvektorů měnit při transformacích z Lorentzovy grupy. Přibližně můžeme říci, že Lorentzova grupa obsahuje rotace v trojrozměrném prostoru, Lorentzovy transformace a různé operace inverse. Transformaci budeme popisovat pomocí transformační matice Λ (v zápisu pomocí matic je horní index řádkový a spodní sloupcový)

$$x^i \to x^{\prime i} = \Lambda^i_k\, x^k \quad , \quad x \to x' = \Lambda\, x \quad . \tag{3.13}$$

Skalární součin čtyřvektorů je definován jako

$$\left(x, y\right) \equiv x_i\, y^i = g_{ik}\, x^k\, y^i \quad . \tag{3.14}$$

Lorentzova transformace je lineární zobrazení, které zobrazuje prostoročas sám na sebe a které zachovává skalární součin

$$g_{lm}\, x^{\prime m}\, x^{\prime n} = g_{lm}\, \Lambda^l_i\, x^i\, \Lambda^m_k\, x^k = g_{ik}\, x^i\, x^k \quad . \tag{3.15}$$

Podmínka pro invarianci skalárního součinu je tedy

$$g_{lm}\, \Lambda^l_i\, \Lambda^m_k = g_{ik} \quad . \tag{3.16}$$

Jsou-li Λ a M Lorentzovy transformace, jsou také Λ^{-1} a $\Lambda\mathrm{M}$ Lorentzovy transformace, což snadno odvodíme

$$\begin{aligned} g_{ik} &= g_{lm}\, \Lambda^l_r\, \Lambda^m_s \left(\Lambda^{-1}\right)^r_i \left(\Lambda^{-1}\right)^s_k = g_{rs} \left(\Lambda^{-1}\right)^r_i \left(\Lambda^{-1}\right)^s_k \quad , \\ g_{ik} &= g_{lm}\, \mathrm{M}^l_i\, \mathrm{M}^m_k = g_{rs}\, \Lambda^r_l\, \Lambda^s_m\, \mathrm{M}^l_i\, \mathrm{M}^m_k = g_{rs} \left(\Lambda\mathrm{M}\right)^r_i \left(\Lambda\mathrm{M}\right)^s_k \quad . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Lorentzovy transformace tvoří grupu. Grupa má čtyři podmnožiny, charakterizované signaturou determinantu a Λ^0_0, neboť

$$\left(\det\Lambda\right)^2 = 1 \quad , \quad \left(\Lambda^0_0\right)^2 - \sum_{j=1}^{3} \left(\Lambda^j_0\right)^2 = 1 \quad . \tag{3.18}$$

Máme

$$\begin{aligned} L^+_+ &: \ \det\Lambda = 1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda^0_0 = 1 \quad , \quad I \in L^+_+ \quad , \\ L^+_- &: \ \det\Lambda = -1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda^0_0 = 1 \quad , \quad I_s \in L^+_- \quad , \\ L^-_+ &: \ \det\Lambda = 1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda^0_0 = -1 \quad , \quad I_{st} \in L^-_+ \quad , \\ L^-_- &: \ \det\Lambda = -1 \quad , \quad \operatorname{sgn}\Lambda^0_0 = -1 \quad , \quad I_t \in L^-_- \quad . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Speciální Lorentzova grupa je tvořena transformacemi s $\det\Lambda = 1$ a $\operatorname{sgn}\Lambda^0_0 = 1$. Speciální Lorentzova grupa obsahuje identickou transformaci, další podmnožiny jsou charakterizovány prvky I_s (prostorová inverse), I_t (časová inverse) a I_{st} (časoprostorová inverse), definovanými pomocí vztahů

$$\begin{aligned} \left(I_s\, x\right)^0 &= x^0 \quad , \quad \left(I_s\, x\right)^\alpha = -x^\alpha \quad , \\ \left(I_t\, x\right)^0 &= -x^0 \quad , \quad \left(I_t\, x\right)^\alpha = x^\alpha \quad , \\ \left(I_{st}\, x\right)^0 &= -x^0 \quad , \quad \left(I_{st}\, x\right)^\alpha = -x^\alpha \quad . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Se speciální Lorentzovou grupou je spojena grupa komplexních matic druhého řádu s determinantem, rovným jedné, platí $SO\left(3,1\right) = SL\left(2, C\right) / Z_2$.

Například matici Lorentzovy transformace (1.14) ($\tanh\psi = \beta$) nebo matici rotace kolem osy z o úhel φ zapíšeme jako

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi & 0 & 0 \\ \sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

nebo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Zkrácené značení

$$\beta = \frac{v}{c} \quad , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3.22}$$

je velmi časté a budeme jej také používat. Dalším velmi častým postupem bude užití výrazu pro interval s parametrizací podle času

$$\mathrm{d}s = \sqrt{c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{r}^{\,2}} = c\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{d}t = \frac{c}{\gamma}\mathrm{d}t \quad . \tag{3.23}$$

3.3 Čtyřrychlost a čtyřzrychlení

Definujeme čtyřvektor rychlosti přirozeným způsobem jako

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \quad , \quad u^i = \left(\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right) \quad , \quad u^i u_i = 1 \quad . \tag{3.24}$$

Slovem přirozeně míníme, že máme automaticky zajištěno, že jde o čtyřvektor a prostorová část je úměrná časové změně polohy. Obdobně přirozeně definujeme čtyřvektor zrychlení

$$w^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} \quad , \quad u^i w_i = 0 \quad . \tag{3.25}$$

Podívejme se na relativistický popis pohybu s konstantním zrychlením. V souřadné soustavě spojené s částicí K, kde okamžitá rychlost částice je samozřejmě $v = 0$ (soustava nemusí být inerciální) máme

$$u_K^i = (1,0,0,0) \quad , \quad w_K^i = \left(0, a/c^2, 0, 0\right) \quad , \tag{3.26}$$

kde $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ je obyčejné zrychlení. V obecné souřadné soustavě je rychlost podle (3.24)

$$u^i = \gamma(1, \beta, 0, 0) \quad . \tag{3.27}$$

Všimněme si, že pro stanovení čtyřrychlosti jsme mohli také použít vztah $u^i = \Lambda^i_k \, u^k_K$ s maticí Λ ze (3.21)

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Protože se jedná o zrychlený pohyb, není tento jednoduchý postup pro výpočet čtyřvektoru zrychlení použitelný, protože nejde o přechod mezi inerciálními soustavami. Musíme tedy provést přímý výpočet podle definice (3.25) a s čtyřvektorem rychlosti (3.27). S uvážením

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma^3}{c^2} v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{c^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma v)$$

dospějeme k výrazu

$$w^i = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\mathrm{d}(\gamma v)}{\mathrm{d}t} (\beta, 1, 0, 0) \quad . \tag{3.28}$$

Po malé úpravě (z rovnosti $w^i \, w_i = w^i_K \, w_{K\,i}$) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = a \quad . \tag{3.29}$$

S počátečními podmínkami $v_0 = 0$, $x_0 = 0$ dostáváme řešení

$$v = \frac{a\,t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\,t}{c}\right)^2}} \quad , \quad x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a\,t}{c}\right)^2} - 1 \right) \quad . \tag{3.30}$$

Zpočátku ve shodě s klasickými výrazy $v \approx at$, $x \approx at^2/2$, po delší době se ale rychlost limitně blíží k rychlosti světla $v \to c$ a trajektorie částice je blízká dráze světelného paprsku $x \to ct$.

3.4 Princip nejmenšího účinku

Účinek musí být invariantní a co nejjednodušší. Nabízí se integrál podél světočáry. Abychom dostali pro účinek známý nerelativistický výraz, musíme konstantu úměrnosti zvolit rovnu $-mc$, tedy

$$S=-mc\int_a^b \mathrm{d}s=-mc^2\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{3.31}$$

Lagrangeova funkce a hybnost jsou

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad \vec{p}=\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{3.32}$$

Hamiltonova funkce je pak

$$H=\vec{p}\cdot\vec{v}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4} \quad . \tag{3.33}$$

Z předchozích rovnic (3.32) a (3.33) vidíme, že

$$\vec{p}=\frac{H\vec{v}}{c^2} \quad , \quad \vec{v}=\frac{c^2\,\vec{p}}{H}=\frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad . \tag{3.34}$$

Pohybové rovnice dostaneme z variačního principu

$$\begin{gathered}\delta S=-mc\,\delta\int_a^b \mathrm{d}s \quad , \quad \delta\,\mathrm{d}s=\delta\left(g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^k\right)^{1/2}=\frac{g_{ik}\,\mathrm{d}x^i\,\delta\,\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=u_k\,\delta\,\mathrm{d}x^k \quad , \\ \delta S=-mc\int_a^b u_k\,\delta\,\mathrm{d}x^k=-mc\,u_k\,\delta x^k\Big|_a^b+mc\int_a^b \delta x^k\,\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \quad .\end{gathered} \tag{3.35}$$

Odsud pak

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}=0 \quad , \quad p_i=-\frac{\partial S}{\partial x^i}=mc\,u_i \quad . \tag{3.36}$$

Čtyřvektor hybnosti definujeme jako časupodobný vektor (čtverec velikosti je kladný)

$$p^i=\left(\frac{H}{c},\vec{p}\right) \quad , \quad p^i\,p_i=m^2c^2 \tag{3.37}$$

a čtyřvektor síly jako prostorupodobný vektor (je kolmý na časupodobný vektor hybnosti)

$$g^i=\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1-\beta^2}},\frac{\vec{f}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad , \quad g^i\,p_i=0 \quad . \tag{3.38}$$

Čtverec velikosti čtyřvektoru síly je

$$g^i\,g_i=\frac{1}{c^2\left(c^2-v^2\right)}\left[\left(\vec{f}\cdot\vec{v}\right)^2-c^2\,f^2\right]<0 \quad .$$

Hamiltonova - Jacobiho rovnice volné částice je z (3.37)

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k}=m^2c^2 \quad , \quad \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]=m^2c^2 \quad . \tag{3.39}$$

4. Náboj v elektromagnetickém poli

4.1 Čtyřrozměrný potenciál a účinek

Elektromagnetické pole popisujeme pomocí čtyřrozměrného potenciálu

$$A^i=\left(\frac{\phi}{c},\vec{A}\right) \quad , \quad A_i=\left(\frac{\phi}{c},-\vec{A}\right) \quad , \tag{4.1}$$

kde ϕ je skalární a $\vec{A}$ vektorový potenciál. Pomocí derivací A_i vytvoříme antisymetrický tensor druhého řádu

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad . \tag{4.2}$$

Dimense prostoročasu je čtyři, má tedy tensor F_{ik} šest nezávislých složek. Snadno se přesvědčíme, že jsou to složky dvou trojrozměrných třírozměrných vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$, které jsou v třírozměrném zápisu dány vztahy

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad . \tag{4.3}$$

Tensor elektromagnetického pole má pomocí $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vyjádření

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{4.4}$$

K účinku volné částice přidáme člen závislý na elektromagnetickém poli – nejjednodušším invariantním výrazem obsahujícím čtyřvektor A_i je skalár $A_i\,\mathrm{d}x^i$. Vezmeme tedy jako účinek

$$S=\int_a^b\left(-mc\,\mathrm{d}s-eA_i\,\mathrm{d}x^i\right) \quad . \tag{4.5}$$

Parametrizujeme-li integrál pomocí souřadnice času, dostáváme

$$S=\int_{t_a}^{t_b}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\vec{A}\cdot\vec{v}-e\phi\right)\mathrm{d}t \quad . \tag{4.6}$$

Ukážeme odvození pohybových rovnic jak ve čtyřrozměrném, tak třírozměrném zápisu. Pro variaci $\mathrm{d}s$ jsme již odvodili vztah ve (3.35), tj. $\delta\,\mathrm{d}s=u_i\,\delta\,\mathrm{d}x^i$, takže variací (4.5) dostáváme

$$\delta S = -\int_a^b \left(m c u_i \, \delta \mathrm{d}x^i + e A_i \, \delta \mathrm{d}x^i + e \, \delta A_i \, \mathrm{d}x^i \right) =$$
$$-\left(m c u_i + e A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left(m c \, \mathrm{d}u_i + e \, \delta x^i \, \mathrm{d}A_i - e \, \delta A_k \, \mathrm{d}x^k \right) \quad . \tag{4.7}$$

Infinitesimální změny potenciálu rozepíšeme

$$\mathrm{d}A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \mathrm{d}x^k \quad , \quad \delta A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \delta x^i$$

a parametrizujeme integrál pomocí elementu $\mathrm{d}s$ (tedy $\mathrm{d}x^k = u^k \, \mathrm{d}s$), dostáváme tak

$$\delta S = -\left(m c u_i + e A_i \right) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left[m c \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}s} - e \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i \, \mathrm{d}s \quad . \tag{4.8}$$

Variační princip nám tak dává jak výraz pro zobecněnou hybnost

$$p_i = m c u_i + e A_i \quad , \tag{4.9}$$

tak pohybovou rovnici

$$m c \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}s} = e \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \quad . \tag{4.10}$$

Pomocí tensoru pole (4.2) resp. jeho kontravariantních složek $F^{ik} = g^{il} g^{km} F_{lm}$ můžeme (4.10) zapsat jako

$$m c \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = e F^{ik} u_k \quad . \tag{4.11}$$

Odvození pohybových rovnic z (4.6) vychází z Lagrangeovy funkce

$$L = -m c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \phi \quad . \tag{4.12}$$

Je pak

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + e \vec{A} = \vec{p} + e \vec{A} \quad ,$$
$$\frac{d}{d t} \left(\vec{p} + e \vec{A} \right) = \frac{d \, \vec{p}}{d t} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A}$$

a

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = e \vec{\nabla} \left(\vec{A} \cdot \vec{v} \right) - e \vec{\nabla} \phi = e \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A} + e \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) - e \vec{\nabla} \phi \quad .$$

Dosazením do Lagrangeovy rovnice dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \quad . \tag{4.13}$$

Zopakujme důležité vlastnosti čtyřvektorů rychlosti a zrychlení

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} \quad \Rightarrow \quad u_i u^i = 1 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(u_i u^i\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_i \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}x^i} = u_i w^i = 0 \quad , \tag{4.14}$$

Čtyřvektor rychlosti je časupodobný, čtyřvektor zrychlení prostorupodobný. Pro časupodobný čtyřvektor hybnosti máme

$$p^i = m u^i = \left(p^0, \vec{p}\right) = \left(\gamma m c, \gamma m \vec{v}\right) \quad , \quad p_i p^i = \left(m c\right)^2 \quad . \tag{4.15}$$

Při časové inversi $t \to -t$ je $p^0 \to p^0$ a $\vec{p} \to -\vec{p}$. Má-li zůstat pohybová rovnice (4.13) nezměněna, musí pak být $\vec{E} \to \vec{E}$ a $\vec{B} \to -\vec{B}$. Ze vztahu (4.3) pak pro potenciály musí být $\phi \to \phi$ a $\vec{A} \to -\vec{A}$. Při prostorové inversi $\vec{r} \to -\vec{r}$ je opět $p^0 \to p^0$ a $\vec{p} \to -\vec{p}$. Má-li zůstat v tomto případě pohybová rovnice (4.13) nezměněna, musí pak být $\vec{E} \to -\vec{E}$ a $\vec{B} \to \vec{B}$. Ze vztahu (4.3) pak pro potenciály musí být opět $\phi \to \phi$ a $\vec{A} \to -\vec{A}$. Vidíme, že pokud jde o diskrétní transformace, je invariance zachována pouze při současném působení časové a prostorové inverse. Je to pochopitelné, uvážíme-li, že čtyřvektory mají časupodobné i prostorupodobné složky.

Přidáme-li ke čtyřvektoru A_i čtyřrozměrný gradient libovolné funkce, tensor elektromagnetického pole se nezmění

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k}\left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k\,\partial x^i}}_{=0} \quad .$$

Této vlastnosti říkáme kalibrační invariance. Nezmění se ani pohybová rovnice náboje v poli, protože příslušný člen v účinku je

$$-\int_a^b e\left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i = -\int_a^b e A_i\,\mathrm{d}x^i - \underbrace{\int_a^b \mathrm{d}\left(e f\right)}_{e f(b) - e f(a)} \quad .$$

4.2 Invarianty elektromagnetického pole

Pole je popsáno antisymetrickým tensorem F_{ik}. Podle (3.12) k němu můžeme vytvořit duální tensor ${}^{*}F^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm} F_{lm}$. Máme tedy možnost vytvořit dva invariantní výrazy (skaláry vzhledem k transformacím z Lorentzovy grupy)

$$F^{ik} F_{ik} = \mathrm{inv} \quad , \quad {}^{*}F^{ik} F_{ik} = \mathrm{inv} \quad . \tag{4.16}$$

Ve vyjádření tensorů pomocí vektorů pole podle (4.4) pak máme

$$c^2 \vec{B}^2 - \vec{E}^2 = \mathrm{inv} \quad , \quad \vec{E}\cdot\vec{B} = \mathrm{inv} \quad . \tag{4.17}$$

Vztah (4.17) má důležité důsledky. Pokud v nějaké soustavě platí $\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$, můžeme vždy najít inerciální soustavu, kdy buď $\vec{E}=0$ (pokud je $c^2 \vec{B}_0^2 - \vec{E}_0^2 > 0$) nebo $\vec{B}=0$ (pokud je $c^2 \vec{B}_0^2 - \vec{E}_0^2 < 0$) Naopak, platí-li v nějaké soustavě $\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 \neq 0$, můžeme vždy najít inerciální soustavu, kde budou obě pole rovnoběžná.

4.3 Pohyb náboje v konstantním homogenním poli

Konstantním polem nazýváme pole, které se s časem nemění. Homogenní pole má pak v celém prostoru stejný směr i velikost. Elektrické pole intenzity $\vec{E}$ získáme ze skalárního potenciálu[1]

$$\phi = -\vec{E}\cdot\vec{r} \quad , \tag{4.18}$$

magnetické pole indukce $\vec{B}$ z vektorového potenciálu[2]

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r} \quad . \tag{4.19}$$

K vektorovému potenciálu můžeme přidat gradient libovolné funkce. Například pro pole $\vec{B}=(0,0,B)$ přičtením nebo odečtením gradientu funkce $f = x\,y\,B/2$ dostáváme potenciály

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2}B\,y, \frac{1}{2}B\,x, 0\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \vec{A}_{(+)} = (0, B\,x, 0) \\ \vec{A}_{(-)} = (-B\,y, 0, 0) \end{cases} \quad .$$

Výraz $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ budeme nazývat kinetickou energií[3].

Uvažujme nejprve pohyb v elektrickém poli, v jehož směru orientujeme osu x a který se odehrává v rovině $x\,y$. S pohybovými rovnicemi (tečka je derivace podle času t)

---

[1] $\mathrm{grad}\left(\vec{E}\cdot\vec{r}\right) = \left(\vec{E}\cdot\mathrm{grad}\right)\vec{r} = \vec{E}$.

[2] $\mathrm{rot}\left(\vec{B}\times\vec{r}\right) = \vec{B}\,\mathrm{div}\vec{r} - \left(\vec{B}\cdot\mathrm{grad}\right)\vec{r} = 2\vec{B}$.

[3] Přesněji by bylo jako kinetickou energii nazývat $\mathcal{T} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - m c^2$, tedy celkovou energii bez potenciální energie (výraz daný odmocninou) s odečtením klidové energie (mc^2). Naše volba však vede k užitečným zkrácením řady výrazů.

$$\dot{p}_x = eE \quad , \quad \dot{p}_y = 0$$

a počátečními podmínkami

$$p_x(0) = 0 \quad , \quad p_y(0) = p_0$$

dostáváme

$$p_x = eEt \quad , \quad p_y = p_0 t \quad . \tag{4.20}$$

Kinetická energie je

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \quad , \tag{4.21}$$

kde jsme označili $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(0)$. Podle vztahu (3.34) máme pro složky rychlosti

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}$$

a integrací těchto rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} - \mathcal{E}_0}{eE} \quad , \\ y &= \frac{p_0 c}{eE} \ln \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} + ceEt}{\mathcal{E}_0} = \frac{p_0 c}{eE} \ln \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} - ceEt} \quad . \end{aligned} \tag{4.22}$$

První vyjádření pro y použijeme pro výraz $\exp[eEy/(p_0 c)]$, druhé pak pro $\exp[-eEy/(p_0 c)]$. Sečtením obou výrazu a podělením dvěma dostaneme

$$\cosh \frac{eEy}{p_0 c} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}{\mathcal{E}_0} \quad .$$

Dosazením do výrazu pro x dostáváme rovnici trajektorie

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE}\left[\cosh\left(\frac{eEy}{p_0 c}\right) - 1\right] \quad . \tag{4.23}$$

Pro $\mathcal{E}_0 \approx mc^2$ a $p_0 \approx m v_0$ a $\cosh[eEy/(m v_0 c)] \approx 1 + 1/2[eEy/(m v_0 c)]^2$ dostáváme přirozeně z nerelativistické teorie známou parabolickou trajektorii

$$x = \frac{eE}{2 m v_0^2} y \quad .$$

Nyní budeme počítat pohyb v homogenním magnetickém poli, v jehož směru orientujeme osu z. Pohybová rovnice je

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{v}\times\vec{B} \quad .$$

Z toho že $\vec{v}\cdot\dot{\vec{p}} = e\vec{v}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)=0$ hned vidíme, že se zachovává kinetická energie

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\vec{p}}\cdot\dot{\vec{p}} = \frac{c^2}{\mathcal{E}}\vec{v}\cdot\dot{\vec{p}} = 0 \quad .$$

Pohybovou rovnici si tedy můžeme přepsat na

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = e\vec{v}\times\vec{B} \tag{4.24}$$

nebo ve složkách

$$\dot{v}_x = \omega v_y \quad , \quad \dot{v}_y = -\omega v_x \quad , \quad \dot{v}_z = 0 \quad , \tag{4.25}$$

kde

$$\omega = \frac{e c^2 B}{\mathcal{E}} \quad . \tag{4.26}$$

Pro komplexní proměnnou $w = x + i\,y$ získáme kombinací prvních dvou rovnic v (4.25)

$$\ddot{w} = -i\,\omega\,\dot{w} \quad \Rightarrow \quad \dot{w} = v_{0t}\exp\left[-i\left(\omega t+\alpha\right)\right] \quad ,$$

kde v_{0t} a α jsou reálné konstanty. Oddělíme-li reálnou a imaginární část, dostáváme

$$v_x = v_{0t}\cos\left(\omega t+\alpha\right) \quad , \quad v_y = -v_{0t}\sin\left(\omega t+\alpha\right) \quad . \tag{4.27}$$

Ze (4.27) vidíme, proč jsme konstantu označili v_{0t} – je to velikost rychlosti v rovině kolmé ke směru magnetického pole. Rovnice (4.27) integrujeme a dostáváme

$$x = x_0 + a\sin\left(\omega t+\alpha\right) \quad , \quad y = y_0 + a\cos\left(\omega t+\alpha\right) \quad , \tag{4.28}$$

kde

$$a = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\,\mathcal{E}}{e c^2 B} = \frac{p_t}{e B} \quad . \tag{4.29}$$

Integrace poslední z rovnic v (4.25) dává

$$z = z_0 + v_{0z}\,t \quad . \tag{4.30}$$

Je tedy pohyb v homogenním magnetickém poli pohybem po kruhové spirále, v případě $v_{0z}=0$ pohybem po kružnici poloměru a v rovině $z=z_0$. V případě malých rychlostí bude mít trajektorie stejný tvar, pouze ve (4.29) dosadíme nerelativistické výrazy, tedy $a = m v_{0t}/\left(e B\right)$.

Nakonec rozebereme pohyb ve zkřížených (tj. navzájem kolmých) elektrických a magnetických polích. Viděli jsme, že relativistické výrazy pro pohyb v elektrickém poli nejsou příliš jednoduché, budeme proto řešit úlohu v nerelativistické aproximaci. Osu z orientujeme opět podél magnetické indukce a rovinu yz volíme tak, aby v ní ležel vektor elektrické intenzity. Pohybová rovnice

$$m\dot{\vec{v}} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

je pak ve složkách

$$m\ddot{x} = e\dot{y}B \quad , \quad m\ddot{y} = eE_y - e\dot{x}B \quad , \quad m\ddot{z} = eE_z \quad . \tag{4.31}$$

Třetí rovnici v (4.31) můžeme hned integrovat

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0 \quad . \tag{4.32}$$

Kombinací prvních dvou rovnic ve (4.31) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}+i\dot{y}\right) + i\omega\left(\dot{x}+i\dot{y}\right) = i\frac{e}{m}E_y \quad , \quad \omega = \frac{eB}{m} \quad .$$

Řešení homogenní rovnice pro proměnnou $w = \dot{x}+i\dot{y}$ známe z předchozího případu, řešením nehomogenní rovnice je konstanta E_y/B, takže

$$\dot{x}+i\dot{y} = a\exp\left[-i\left(\omega t+\alpha\right)\right] + \frac{E_y}{B} \quad .$$

Oddělení reálné a imaginární části a následná integrace rovnic vede na

$$x = x_0 + \frac{a}{\omega}\sin\left(\omega t+\alpha\right) + \frac{E_y}{B}t \quad , \quad y = y_0 + \frac{a}{\omega}\cos\left(\omega t+\alpha\right) \quad . \tag{4.33}$$

Konstanty zvolíme tak, aby se částice v čase $t=0$ nacházela v počátku. Potom

$$x = \frac{a}{\omega}\sin\left(\omega t\right) + \frac{E_y}{B}t \quad , \quad y = \frac{a}{\omega}\left[\cos\left(\omega t\right)-1\right] \quad , \quad z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t \quad . \tag{4.34}$$

Označíme-li složku rychlosti podél osy x v čase $t=0$ jako v_{0x}, je parametr a dán vztahem $a = v_{0x} - E_y/B$. V rovině xy je průmět trajektorie

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0x}}{\omega}\sin\left(\omega t\right) + \frac{E_y}{\omega B}\left[\omega t - \sin\left(\omega t\right)\right] \quad , \\ y &= \frac{v_{0x}}{\omega}\left[\cos\left(\omega t\right) - 1\right] + \frac{E_y}{\omega B}\left[1 - \cos\left(\omega t\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{4.35}$$

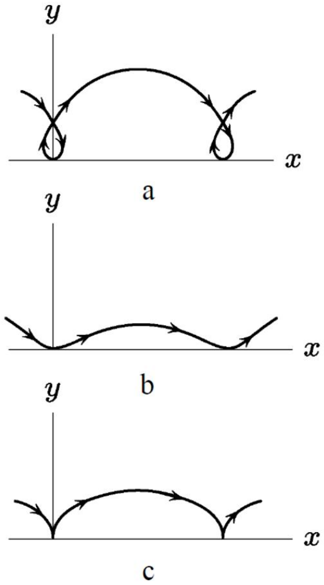
Při $v_{0x}=0$ je to rovnice cykloidy (obrázek c). Pohyb nabité částice ve zkřížených polích je docela pozoruhodný, srovnáme-li orientaci elektrického pole a střední hodnoty rychlosti

$$\left\langle v_x\right\rangle = \frac{E_y}{B} \quad , \quad \left\langle v_y\right\rangle = 0 \quad , \quad \left\langle v_z\right\rangle = v_{0z} + \frac{eE_z}{m}t \quad .$$

Z tŊchto hodnot také vidíme meze platnosti nerelativistického pŚiblíģení. Uvaģujeme-li jen pohyb v rovinŊ $x\,y$, je podmínkou

$$E_y \ll c\,B \quad .$$

U pohybu ve smŊru osy z zase záleģí na dobŊ, po kterou se ļástice bude pohybovat.



4.4 Adiabatický invariant

Z obecné Hamiltonovy teorie mŢģeme odvodit existenci tzv. adiabatických invariantŢ, které pŚi pomalých zmŊnách podmínek pohybu zŢstávají konstantní. PŚi pohybu v témŊŚ homogenním magnetickém poli je adiabatickým invariantem

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{P}_t\,\mathrm{d}\vec{r} \quad , \tag{4.36}$$

kde integraļní kŚivkou je prŢmŊt trajektorie (kruģnice) v rovinŊ kolmé k magnetickému poli a $\vec{P}_t$ je prŢmŊt zobecnŊné hybnosti do této roviny. Dosazení $\vec{P}_t = \vec{p}_t + e\,\vec{A}$ (vektorový potenciál volíme takový, ģe leģí celý v této rovinŊ) do (4.36) dává

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{p}_t\,\mathrm{d}\vec{r} + \frac{e}{2\pi}\oint \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad .$$

Orientace kruģnice je po smŊru hodinových ruļiļek pro $e\,B > 0$ a proti smŊru hodinových ruļiļek pro $e\,B$. Stokesova vŊta[4] proto dává pro druhý integrál hodnotu $-|e\,B|\,r^2/2$, kde r je

---

[4] Vzorec Stokesovy vŊty $\oint_C \vec{V}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}\ell = \int_S \mathrm{rot}\vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ pŚedpokládá, ģe vnŊjší normála ke kŚivce C, teļna $\vec{\tau}$ k této kŚivce a normála $\vec{n}$ k ploše S tvoŚí pravotoļivou soustavu.

poloměr kružnice (podle (4.29) $r = p_t / |e B|$), zatímco hodnota prvního integrálu je $r\, p_t$. Adiabatický invariant je tedy

$$I = \frac{p_t^2}{2|e B|} \quad . \tag{4.37}$$

Při adiabatické změně magnetické indukce se proto mění příčná složka hybnosti jako $\sqrt{C|B|}$, kde C je kladná konstanta. Této skutečnosti je s výhodou užito například při udržování vysokoteplotního plazmatu uvnitř daného objemu. Je-li v centrální části indukce poměrně malá a k okrajovým částem se zvyšuje, máme pro podélnou složku hybnosti

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - C\left|B(\vec{r})\right| \quad .$$

V oblasti silného pole se pohyb podél siločáry zastaví a obrátí zpět. Opačná situace, kdy jsou nabité částice uvolňovány v oblasti silného pole a pohybují se do oblasti slabšího pole je využita ve spektrometrech k vytváření téměř rovnoběžných svazků.