

# Teoretická fyzika ó Zóklady teorie elektromagnetického pole

Michal Lenc ó podzim 2012

## Obsah

Teoretická fyzika ó Zóklady teorie elektromagnetického pole.....	1
1. Úvod.....	3
1.1 Maxwellovy rovnice.....	3
1.2 Energie a hybnost elektromagnetického pole.....	4
1.3 Elektřina a magnetismus.....	5
1.4 Podmínky na rozhraní.....	6
1.5 Elektromagnetické vlny.....	7
2. Elektrostatika.....	8
2.1 Coulombův zákon.....	8
2.2 Newtonův zákon.....	8
2.3 Poissonova rovnice.....	9
2.3.1 Greenova funkce.....	9
2.3.2 Greenova vta.....	10
2.4 Elektrostatická energie náboj.....	11
2.5 Multipólový rozklad pole.....	11
2.5.1 Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích.....	11
2.5.2 Legendreovy polynomy.....	12
2.5.3 Kulové funkce.....	13
2.6 Pole bodových nábojů ve vakuu.....	14
2.7 Dielektrická koule v homogenním poli.....	15
3. Magnetostatika.....	15
3.1 Analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou.....	15
3.2 Magnetické pole kruhové smyčky.....	17

4.	Kvasistacionární pole. ....	17
4.1	Skin-efekt. ....	17
4.2	Vzájemná induk nost a vlastní induk nost. ....	19
4.3	Komplexní odpor .....	20
5.	Maxwellovy rovnice v materiálovém prost edí .....	21
5.1	Mikroskopické Maxwellovy rovnice .....	21
5.2	Maxwellovy rovnice pro prost edí s triviálními materiálovými vztahy.....	23
6.	asov prom nná elektromagnetická pole ve vakuu .....	24
6.1	Rovinná a kulová vlna.....	24
6.2	Obecné e-ení nehomogenní rovnice pro potenciály .....	24
6.3	Pole asov prom nného dipólu .....	25
6.4	Lienard v - Wiechert v potenciál .....	28
6.5	Ztráta energie zá ením.....	29
7.	Rozptyl zá ení volnými náboji.....	30
7.1	Thomson v vzorec.....	30
7.2	Modifikace Thomsonova vzorce .....	31
7.3	Index lomu .....	31
8.	Elektromagnetické pole v dispersním prost edí.....	32
8.1	Maxwellovy rovnice.....	32
8.2	Disipace energie.....	34
8.3	Fázová a grupová rychlost.....	34
9.	Rovnice elektromagnetického pole ve ty rozm rném zápisu .....	35
9.1	ty rozm rný vektor proudu, rovnice continuity .....	35
9.2	Náboj v elektromagnetickém poli .....	36
9.3	Tenzor elektromagnetického pole.....	37
9.4	První pár Maxwellových rovnic .....	39
9.5	Druhý pár Maxwellových rovnic .....	39

9.6	Tensor energie a hybnosti .....	40
9.7	Vlnová rovnice a rovinné vlny .....	41

## 1. Úvod

### 1.1 Maxwellovy rovnice

Základ teorie elektromagnetického pole tvoří Maxwellovy rovnice a pohybové rovnice náboje v elektromagnetickém poli. Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické pole vytvářené ve vakuu volnými náboji hustoty  $\rho$  a proudy hustoty  $\vec{j}$  jsou

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Druhý Newtonův zákon pro částici s nábojem  $e$  je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad . \quad (1.2)$$

Konstanty v (1.1) jsou dány volbou soustavy jednotek SI. Intenzita elektrického pole je udávána ve  $\text{Vm}^{-1}$ , indukce magnetického pole má jednotku T. Platí

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad , \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \quad , \quad c = 299792458 \text{ m s}^{-1} \quad . \quad (1.3)$$

Zavádíme také indukci elektrického  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  a intenzitu magnetického pole  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ .

Pomocí těchto veličin můžeme Maxwellovy rovnice přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad . \end{aligned} \quad (1.4)$$

První část rovnic v (1.4) určuje charakter pole, druhá část rovnic spojuje pole se zdroji. Ve tvaru (1.4) platí rovnice i v látkovém prostředí, na rozdíl od vakua jsou však v látkovém prostředí vztahy mezi vektory indukce a intenzity netriviální a často velmi komplikované. To, že za základní vektory pole považujeme právě elektrickou intenzitu a magnetickou indukci, je dáno charakterem Lorentzovy síly v (1.2) a prvním částí rovnic v (1.4).

## 1.2 Energie a hybnost elektromagnetického pole

Máme testovací částici s energií  $\varepsilon$  a hybností  $\vec{p}$ . Při průchodu ke spojitěmu rozložení náboje a proudu je

$$\Delta \varepsilon = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \frac{1}{\rho} \vec{F} \cdot \vec{j} \Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho \vec{E} \Delta V + \vec{j} \times \vec{B} \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad . \quad (1.5)$$

Energie získaná částicí za jednotku času je tedy  $\vec{j} \cdot \vec{E} \Delta V$ , je tedy práce vykonaná polem za jednotku času vztahovaná na jednotku objemu  $-\vec{j} \cdot \vec{E}$ . S využitím vztahu

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\vec{H} \times \vec{E}) \quad (1.6)$$

odvodíme z Maxwellových rovnic výraz

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad . \quad (1.7)$$

Na pravé straně vystupuje hustota vykonané práce a nějaký tok, výraz na levé straně můžeme tedy interpretovat jako časovou změnu hustoty energie. Po zavedení veličiny hustoty energie  $W$  a Poyntingova vektoru  $\vec{S}$

$$W = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad , \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.8)$$

můžeme (1.7) psát v integrálním tvaru jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W \, dV + \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV + \int_\Sigma \vec{S} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0 \quad . \quad (1.9)$$

Obdobnou úvahu můžeme provést pro hybnost. Při průchodu ke spojitěmu rozložení náboje je

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho \vec{E} \Delta V + \vec{j} \times \vec{B} \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad . \quad (1.10)$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme výraz

$$\begin{aligned} \vec{D} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} = \\ \vec{E} (\nabla \cdot \vec{D}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{H}) + \vec{H} (\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - \vec{j} \times \vec{B} - \rho \vec{E} \quad . \end{aligned} \quad (1.11)$$

Poslední dva členy na pravé straně popisují Lorentzovu sílu, můžeme tedy výraz na levé straně interpretovat jako časovou změnu hustoty hybnosti pole

$$\vec{G} = \vec{D} \times \vec{B} \quad . \quad (1.12)$$

Provedeme úpravu výrazu (1.11)

$$\begin{aligned} \left[ \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) - \vec{D} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E} \cdot \vec{D} \right) - \frac{1}{2} \left( \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial x_i} \right) , \\ \left[ \vec{H}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right]_i &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) - \frac{1}{2} \left( \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_i} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i} \right) . \end{aligned} \quad (1.13)$$

a zákon zachování má pak tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V G_i dV + \int_V P_i dV + \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j d\Sigma = 0 \quad . \quad (1.14)$$

Definovali jsme Maxwell v tensor nap tí  $T_{ij}$  jako<sup>1</sup>

$$T_{ij} = -(E_i D_j + H_i B_j) + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \quad (1.15)$$

a hustotu hybnosti prost edí

$$P_i = \rho E_i + (\vec{j} \times \vec{B})_i + \frac{1}{2} \left[ \vec{D} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial x_i} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_i} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_i} \right] . \quad (1.16)$$

Takto definovaný Maxwell v tensor ur uje tok hybnosti z uvaflovaného objemu. Jeho stopa je rovna hustot energie

$$W - \sum_{i=1}^3 T_{ii} = 0 \quad . \quad (1.17)$$

### 1.3 Elekt ina a magnetismus

Pro statické (na ase nezávislé) jevy m fleme zvlá– studovat elektrostatiku a zvlá– magnetostatiku, jak je vid t z Maxwellových rovnic (1.4). Pro elektrostatiku je

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.18)$$

a pro magnetostatiku

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \quad (1.19)$$

e–íme-li úlohu pro homogenní prost edí s triviálními vztahy mezi indukcí a intenzitou, tj.

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad , \quad (1.20)$$

Vede substitute

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (1.21)$$

k tomu, fle rovnice s rotací v (1.18) je spln na identicky a rovnice s divergencí dává Poissonovu rovnici

---

<sup>1</sup> Jsou mofné i jiné definice, které se vldy shodují pro vakuum. Vzhledem k obtífnosti experimentálního ov ování v jiném prost edí není otázka správného rozd lení hybnosti mezi špoleř a šhmotuř roz e-ena.

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} . \quad (1.22)$$

Naopak substitute

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad (1.23)$$

vede k tomu, že rovnice s divergencí v (1.19) je splněna identicky a rovnice s rotací vede na rovnici<sup>2</sup>

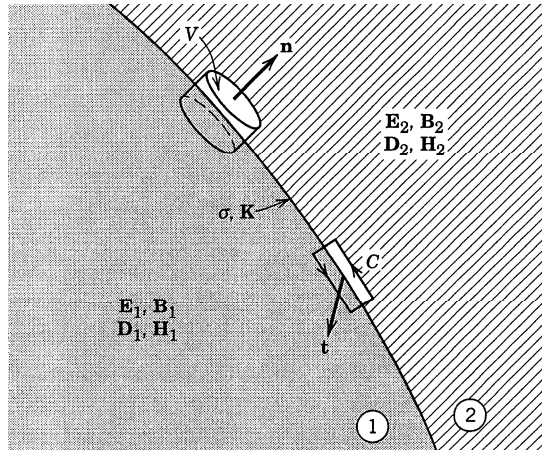
$$\Delta \vec{A}' - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}') = -\mu_r \mu_0 \vec{j} . \quad (1.24)$$

Vektorový potenciál nezmení hodnotu magnetické indukce, protože-li k p-ovému vektoru gradient libovolné skalární funkce (rotgrad  $f \equiv 0$ ). Toho můžeme využít k volbě takového potenciálu  $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f$ , jehož divergence je nulová<sup>3</sup> a místo (1.24) máme opět (vektorovou) Poissonovu rovnici

$$\Delta \vec{A} = -\mu_r \mu_0 \vec{j} .$$

#### 1.4 Podmínky na rozhraní

Máme-li dvě homogenní prostředí se společným rozhraním, řešíme rovnice pole zvlášť v každém z nich. Potom musíme zajistit, aby byly na společném rozhraní splněny podmínky plynoucí z Maxwellových rovnic. Na obrázku<sup>4</sup> je popis všech potřebných veličin:  $\vec{n}$  normála



a  $\vec{t}$  tečna k rozhraní, rovnoběžné s rozhraním jsou i podstavy válce o ploše  $\Delta S$  a delší strany obdélníku délky  $\Delta \ell$ . Kratší strany obdélníka i stěny válce mají zanedbatelné délky.

<sup>2</sup>  $\text{rot rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V} .$

<sup>3</sup>  $\text{div } \vec{A} = 0$  znamená, že funkci  $f$  volíme jako řešení rovnice  $\Delta f = -\text{div } \vec{A}' .$

<sup>4</sup> J. D. Jackson: Classical Electrodynamics (John Wiley & Sons, 1999), Figure 1.4.

Povrchová hustota náboje je označena  $\sigma$ , povrchová hustota proudu  $\vec{K}$  (má složky pouze podél rozhraní). Integrovaný tvar Maxwellových rovnic s divergencemi je

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho dV \Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \Delta S = \sigma \Delta S$$

a

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} \Delta S = 0 .$$

Integrovaný tvar rovnic s rotacemi je

$$\oint_C \vec{E} \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) d\ell = 0 \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) \Delta \ell = 0$$

a

$$\oint_C \vec{H} \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) d\ell = \int_S \vec{j} \cdot \vec{t} dS \Rightarrow (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) \Delta \ell = \vec{K} \cdot \vec{t} \Delta \ell .$$

Integrované rovnice  $\int_S \partial \vec{B} / \partial t dS$  a  $\int_S \partial \vec{D} / \partial t dS$  mají omezený integrand a v limitě malé plochy jdou k nule, proto jsou v posledních dvou vztazích ani nepsány. Máme tak pro normálové složky

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma , \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.25)$$

a pro tečné složky<sup>5</sup>

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 , \quad \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} . \quad (1.26)$$

## 1.5 Elektromagnetické vlny

Zavedeme-li pro popis časových proměnného elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál vztahy

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} , \quad (1.27)$$

máme po dosazení do Maxwellových rovnic

$$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (1.28)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j} .$$

S využitím kalibrační transformace (tj. transformace, která nevede ke změně vektorů  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ )

<sup>5</sup> Platí  $\vec{X} \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) = \vec{t} \cdot (\vec{n} \times \vec{X})$  a vektor  $\vec{t}$  je libovolný tečný vektor k rozhraní.

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \quad , \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.29)$$

m fême dosáhnout, aby platilo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1.30)$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní vlnovou rovnici

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad (1.31)$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} \quad .$$

## 2. Elektrostatika

### 2.1 Coulomb v zákon

Síla, kterou působí náboj  $q_2$  (nacházející se v místě 2) na náboj  $q_1$  v místě 1 je

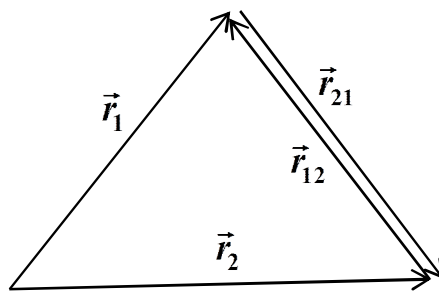
$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad , \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad (2.1)$$

a síla, kterou působí náboj  $q_1$  (nacházející se v místě 1) na náboj  $q_2$  v místě 2 je

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad , \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad r_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad , \quad (2.2)$$

je tedy

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \quad (2.3)$$



### 2.2 Newton v zákon

Newton v gravita ní zákon zde uvádíme pro porovnání. Síla, kterou působí hmotnost  $m_2$  (nacházející se v místě 2) na hmotnost  $m_1$  v místě 1 je

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad , \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad r_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad (2.4)$$



a síla, kterou působí hmotnost  $m_1$  (nacházející se v místě 1) na hmotnost  $m_2$  v místě 2 je

$$\vec{F}_2 = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad , \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad , \quad (2.5)$$

je tedy samozřejmě  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ .

## 2.3 Poissonova rovnice

### 2.3.1 Greenova funkce<sup>6</sup>

Poissonovu rovnici pro elektrostatické pole

$$-\Delta \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

i rovnici pro gravitační pole

$$\Delta \phi = 4\pi G \mu \quad (2.7)$$

budeme psát jednotným způsobem jako

$$\hat{H}|\psi\rangle = |J\rangle \quad , \quad (2.8)$$

kde  $\hat{H} = -\Delta$  a  $|J\rangle = \rho/\epsilon_0$  nebo  $|J\rangle = -4\pi G \mu$ . Předpokládejme, že známe vlastní funkce a vlastní hodnoty operátoru  $\hat{H}$

$$\langle x|\hat{H}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \lambda_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)|x'\rangle = \sum_m \lambda_m \psi_m^*(x') \psi_m(x) \quad . \quad (2.9)$$

Předpokládejme dále, že žádná z vlastních hodnot není rovna nule. Položíme pak Greenovu funkci rovnou

$$\langle x|\hat{G}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)|x'\rangle = \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \psi_m^*(x') \psi_m(x) \quad . \quad (2.10)$$

Potom dostáváme

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{G}\hat{H}|x'\rangle &= \langle x|\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)\left(\sum_n \lambda_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|x'\rangle = \\ &\langle x|\left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|x'\rangle = \langle x|\hat{I}|x'\rangle = \delta(x-x') \quad . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Řešení Poissonovy rovnice tak zapíšeme ve tvaru

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|\hat{G}|J\rangle = \int \langle x|\hat{G}|x'\rangle \langle x'|J\rangle dx' \quad (2.12)$$

nebo

---

<sup>6</sup> Tento odstavec možno vynechat.

$$\psi(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(x) \int \psi_n^*(x') J(x') dx' \quad . \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Greenova v ta

V-imn me si nejprve p sobení laplaciánu na funkci  $1/r$  . Máme

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (2.14)$$

v-ude, kde je tato funkce dobe definována, tedy s výjimkou bodu  $r=0$  . Použitím Gaussovy v ty na kouli se st edem v po átku máme

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) dV = -4\pi \quad . \quad (2.15)$$

Pokud považujeme  $\Delta(1/r)$  za funkci, je její chování neobvyklé. Zapisujeme ji pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (2.16)$$

Z Gaussovy v ty plyne Greenova v ta. M jme identity

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (u \vec{\nabla} v) &= u \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} v) + (\vec{\nabla} u) \cdot (\vec{\nabla} v) \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot (v \vec{\nabla} u) &= v \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) + (\vec{\nabla} v) \cdot (\vec{\nabla} u) \quad . \end{aligned}$$

Po ode tení rovnic a užití Gaussovy v ty dostáváme Greenovu v tu

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) dV = \int_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot \vec{n} dS \quad . \quad (2.17)$$

Máme te pro  $u=\phi$  a  $v=1/r$

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (2.18)$$

Roz-í íme-li integra ní oblast na celý prostor a p edpokládáme-li dostate n rychlý pokles funkcí v nekone nu, dostáváme

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' \quad . \quad (2.19)$$

Ve dvourozm rném p ípad je postup podobný. V-imn me si nejprve p sobení laplaciánu na funkci  $\ln r$  . Máme

$$\vec{\nabla} \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \ln r) = 0 \quad (2.20)$$

v-ude, kde je  $\Delta$  definována, tedy s výjimkou bodu  $r=0$ . Použitím Gaussovy v ty na kružnici se středem v počátku máme

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \ln r) dS = 2\pi, \quad (2.21)$$

je tedy chování funkce  $\Delta(\ln r)$  neobvyklé. Zapisujeme je pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\Delta \ln r = 2\pi \delta^{(2)}(\vec{r}). \quad (2.22)$$

Z Greenovy v ty potom dostáváme (pozor na podmínky v nekonečnu a ořezm  $\Delta \ln r$ )

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int \sigma(\vec{r}') \ln|\vec{r} - \vec{r}'| d^2\vec{r}'. \quad (2.23)$$

## 2.4 Elektrostatická energie náboj .

Elektrostatickou energii spojitého rozložení náboje

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV \quad (2.24)$$

můžeme pro soustavu bodových náboj  $\rho(\vec{r}) = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a)$  zdánlivě snadno napsat jako  
 dle posledního dosazení

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \phi_a, \quad \phi_a = \phi(\vec{r}_a). \quad (2.25)$$

Z Coulombova zákona máme

$$\phi_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_b \frac{e_b}{r_{ab}}, \quad r_{ab} = |\vec{r}_a - \vec{r}_b|. \quad (2.26)$$

Musíme tedy vyloučit působení pole vytvořeného daným bodovým nábojem sama na sebe, abychom mohli psát konečný výraz pro energii

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{r_{ab}}. \quad (2.27)$$

## 2.5 Multipólový rozklad pole.

### 2.5.1 Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích

Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích je

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}. \quad (2.28)$$

Separací proměnných

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad (2.29)$$

dojdeme ke třem obyčejným diferenciálním rovnicím

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \lambda^2 R(r) = 0 \quad , \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left( \lambda^2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad .$$

Jednoduše odvodíme, že (pohledem na periodicitu v proměnné  $\varphi$ )  $m$  musí být celé číslo a

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos m\varphi + S_m \sin m\varphi \quad . \quad (2.31)$$

Dále pak zjistíme, že řešením radiální rovnice je (píjeme  $\lambda^2 = l(l+1)$ )

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \quad . \quad (2.32)$$

Nejzajímavější je rovnice pro polární úhel. Substituce  $\cos \theta = x$  vede k Legendrovo rovnici

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_l^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_l^m(x)}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0 \quad , \quad (2.33)$$

kteřá má jako regulární řešení polynomy v proměnných  $\cos \theta$  a  $\sin \theta$ .

### 2.5.2 Legendrovy polynomy

Snadno vidíme, že pro  $m=0$  máme rovnici (2.33) přepsat na

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} \right] + l(l+1) P_l(x) = 0 \quad . \quad (2.34)$$

Integrací rozdílů rovnic pro  $l=m$  a  $l=n$  na intervalu  $(-1,1)$  dostaneme vztah

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad , \quad (2.35)$$

odkud plyne ortogonalita Legendrových polynomů  $P_l(x)$  na tomto intervalu. Z mnoha dalších vlastností Legendrových polynomů uvedeme dvě: vyjádření polynomu pomocí Rodriguesa vzorce

$$P_l(x) = \frac{1}{l! 2^l} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.36)$$

a výraz pro vytvářející funkci

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \quad . \quad (2.37)$$

Použitím Leibnizova pravidla

$$\frac{d^m [f(x)g(x)]}{dx^m} = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^{m-k} f(x)}{dx^{m-k}} \frac{d^k g(x)}{dx^k} \quad (2.38)$$

dostaneme  $m$  násobným derivováním rovnice (2.34) rovnici

$$(1-x^2)f''(x) - 2x(m+1)f'(x) + (n-m)(n+m+1)f(x) = 0, \quad (2.39)$$

kde  $f(x) = d^m P_l(x)/dx^m$ . Substituce  $f(x) = (1-x^2)^{-m/2} g(x)$  vede k tomu, že funkce  $g(x)$  musí splňovat rovnici (2.33), je tedy konečná

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}. \quad (2.40)$$

Využijeme-li ještě (2.36), můžeme (2.40) rozšířit i na oblast záporných  $m$ , tedy

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^l}{l!2^l} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (1-x^2)^l, \quad -l \leq m \leq l. \quad (2.41)$$

Polynomy (2.41) se nazývají přidružené Legendreovy polynomy. Námi definované polynomy  $P_l^m(x)$  nebo  $P_l(x)$  nejsou na intervalu  $(-1,1)$  normované na jedničku. Ostatní známé drobné i větší odchylky v definicích speciálních funkcí jsou díky historickému vývoji bohužel zcela běžné.

### 2.5.3 Kulové funkce

Pomocí přidružených Legendreových polynomů definujeme úplný ortonormální soubor kulových funkcí (tj. každou funkci úhlových proměnných ve sférických souřadnicích můžeme napsat pomocí (nekonečné)ady těchto funkcí)

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) \exp(im\varphi). \quad (2.42)$$

Platí tedy

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{l_1}^{m_1*}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \quad (2.43)$$

a

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} f_l^m Y_l^m(\theta, \varphi), \quad f_l^m = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta f(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta, \varphi). \quad (2.44)$$

Číslo  $N$  kolik prvních kulových funkcí je

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\
Y_1^{-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(-i\varphi) \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \quad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \exp(i\varphi) \\
Y_2^{-2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \exp(-2i\varphi) \quad Y_2^2 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \exp(2i\varphi) \\
Y_2^{-1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \exp(-i\varphi) \quad Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \quad Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta \exp(i\varphi)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Velmi důležitým speciálním případem rozkladu (2.44) je vztah pro Legendre v polynom obecného úhlu mezi dvěma jednotkovými vektory  $\vec{n} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$  a  $\vec{n}' = (\sin\alpha \cos\beta, \sin\alpha \sin\beta, \cos\alpha)$ , tedy

$$\begin{aligned}
\cos\gamma &= \vec{n} \cdot \vec{n}' = \cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha \cos(\varphi - \beta) \quad , \\
P_l(\cos\gamma) &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=l} Y_l^{m*}(\alpha, \beta) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

## 2.6 Pole bodových náboj ve vakuu

Víme, že pole bodového náboje ve vakuu je dáno Coulombovým potenciálem. Je-li náboj  $q$  umístěn mimo souadnicovou soustavu, například na ose  $z$  (v bodě  $z=R$ ), je tento potenciál dán vztahem

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[x^2 + y^2 + (z-R)^2]^{1/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta]^{1/2}} \quad . \tag{2.47}$$

Vztah (2.37) nám umožní zapsat potenciál (2.47) ve tvaru multipólového rozkladu

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^l \quad , \quad r \leq R \quad , \\
\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^l \quad , \quad r \geq R \quad .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Pro  $r \gg R$  převažuje souadnicová soustava (vzhledem k souadnicové soustavě, nikoliv poloze náboje) složka  $l=0$ . Umístíme-li však náboj opačné velikosti do  $z=-R$ , vytvoří se identické podmínky s  $l=0$  a pro  $r \gg R$  převažuje pak dipólová složka ( $l=1$ )

$$\phi_{dip} \approx \frac{2qR}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} = \frac{D}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} \quad , \tag{2.49}$$

kde  $D=2qR$  označuje dipólový moment. Podobně, umístíme-li v rovině  $z=0$  náboje  $q$  ve vzdálenosti  $R$  od souadnicové osy  $x$  a náboje  $-q$  ve vzdálenosti  $R$  od souadnicové osy  $y$ ,

vyruší se identické příspěvky členy s  $l=0$  a  $l=1$  (při výpočtu využíváme (2.46)) a pro  $r \gg R$  převládne pak kvadrupólová složka ( $l=2$ )

$$\phi_{quad} \approx -\frac{2qR^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-3\cos^2\theta}{r^3}, \quad (2.50)$$

kde  $Q=qR^2$  je kvadrupólový moment.

## 2.7 Dielektrická koule v homogenním poli

Pro vodivou nekonečně homogenní prostředí s dielektrickou konstantou  $\epsilon_1$  s intenzitou elektrického pole  $\vec{E} = -E\vec{e}_z$  je poručeno umístění koule se středem v počátku a poloměrem  $R$ . Koule má dielektrickou konstantu  $\epsilon_2$ . Pro popis výsledného pole bude stačit dipólový člen elektrostatického potenciálu

$$\Phi = \left( Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta. \quad (2.51)$$

Podmínky spojitosti na povrchu koule tedy složky intenzity  $E_t = E_\theta$  a normálové složky indukce  $D_n = \epsilon E_r$  vedou pro

$$E_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad D_n = -\epsilon \frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

k rovnicím

$$\begin{aligned} \left( A_1 + \frac{B_1}{R^3} \right) \sin\theta &= \left( A_2 + \frac{B_2}{R^3} \right) \sin\theta, \\ -\epsilon_1 \left( A_1 - \frac{2B_1}{R^3} \right) \cos\theta &= -\epsilon_2 \left( A_2 - \frac{2B_2}{R^3} \right) \cos\theta. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Pole v nekonečnu musí nabývat povodní hodnoty, je tedy  $A_1 = E$ . Pole v počátku musí být konečné, a to vyžaduje  $B_2 = 0$ . Zbývající rovnice pro  $B_1$  a  $A_2$  snadno vyřešíme, takže máme

$$\Phi = \begin{cases} \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) E r \cos\theta & 0 \leq r \leq R \\ \left( 1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{R^3}{r^3} \right) E r \cos\theta & R \leq r < \infty \end{cases}. \quad (2.53)$$

## 3. Magnetostatika

### 3.1 Analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou

Viděli jsme, že ve stejném Poissonovy rovnice (2.6) v elektrostatice je potenciál (2.19)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.1)$$

a tedy intenzita

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (3.2)$$

e-ním základní rovnice magnetostatiky (volíme kalibraci  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ )

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.3)$$

je analogicky

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' \quad (3.4)$$

Pro magnetickou indukci pak je

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}' \quad (3.5)$$

Pro bodový náboj napíšeme  $\rho(\vec{r}') d^3\vec{r}' = e \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0) d^3\vec{r}'$  a z obecného vztahu (3.2)

dostáváme Coulombovo pole

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (3.6)$$

Obdobně pro lineární vodič napíšeme  $\vec{j}(\vec{r}') d^3\vec{r}' = J \delta^{(2)}(\vec{r}'_{\perp} - \vec{r}_{0\perp}) d^2\vec{r}'_{\perp} d\vec{r}'_{\parallel}$  a z obecného vztahu (3.5) dostáváme Biotovo a Savartovo pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}'_{\parallel} \times (\vec{r} - \vec{r}_{0\parallel})}{|\vec{r} - \vec{r}_{0\parallel}|^3} \quad (3.7)$$

Gaussova vta

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (3.8)$$

má analogii v Ampérov zákonu

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\ell} \vec{B} \cdot \vec{t} d\ell = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \mu_0 J \quad (3.9)$$



### 3.2 Magnetické pole kruhové smyky

Do vztahu pro vektorový potenciál (3.4) dosadíme za proudovou hustotu  $\vec{j}(\vec{r}')d^3\vec{r}' = J \delta(\rho' - a)\delta(z')\vec{e}_\varphi \rho' d\rho' dz' d\varphi'$ , kde  $\vec{e}_\varphi = -\sin(\varphi' - \varphi)\vec{e}_\rho + \cos(\varphi' - \varphi)\vec{e}_\varphi$ , a dostaneme

$$\vec{A}(\rho, z) = A_\varphi(\rho, z)\vec{e}_\varphi, \quad A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a \cos \varphi d\varphi}{(a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi)^{1/2}}, \quad (3.10)$$

$$A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 J}{\pi k} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k) \right], \quad k^2 = \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2}$$

a  $K(k)$  resp.  $E(k)$  jsou eliptické integrály

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi} d\xi. \quad (3.11)$$

Přivýpočtu indukce potřebujeme derivace eliptických integrál (výrazy získáme vhodnými úpravami integrand derivovaných výraz)

$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{E(k) - K(k)}{k}, \quad \frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{K(k)}{k}. \quad (3.12)$$

Potom máme pro složky indukce (azimutální složka je  $B_\varphi = 0$ )

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{z}{\rho \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k) \right], \quad (3.13)$$

$$B_z(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(a + \rho)^2 + z^2}} \left[ K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k) \right]. \quad (3.14)$$

## 4. Kvasistacionární pole.

### 4.1 Skin-efekt.

Maxwellovy rovnice v přiblížení kvasistacionárního pole<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup> Následující vztah můžeme chápat jako definici přiblížení kvasistacionárního pole: u proudů uvažujeme pouze proud daný Ohmovým zákonem.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \sigma \vec{E} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad .\end{aligned}\tag{4.1}$$

vedou na

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad .\tag{4.2}$$

Uvažujme nekonečný proud v drátě kruhového průřezu. V důsledku symetrie má elektrické i magnetické pole jedinou složku

$$\vec{E} = E(r) \exp\{-i\omega t\} \vec{e}_z \quad , \quad \vec{B} = B(r) \exp\{-i\omega t\} \vec{e}_\varphi\tag{4.3}$$

a máme tedy

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dE}{dr} \right) + k^2 E = 0 \quad , \quad i\omega B = -\frac{dE}{dr} \quad ,\tag{4.4}$$

kde jsme označili

$$k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta} \quad , \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}} \quad .\tag{4.5}$$

řešeními rovnic (4.4) konstantními na ose jsou

$$E(r) = K J_0(kr) \quad , \quad B(r) = -i \frac{k}{\omega} K J_1(kr) \quad .\tag{4.6}$$

Konstantu úměrnosti  $K$  získáme pomocí jedné nebo druhé následující podmínky (proud protékající drátem má danou hodnotu resp. tok magnetického pole plochou protínanou drátem musí mít danou hodnotu)

$$2\pi\sigma \int_0^R E(r) r dr = I \quad , \quad 2\pi R B(R) = \mu_0 I \quad .\tag{4.7}$$

Máme tedy uvnitř vodiče

$$E(r) = \frac{I}{\sigma \pi R^2} \frac{k R J_0(kr)}{2 J_1(kR)} \quad , \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{J_1(kr)}{J_1(kR)} \quad .\tag{4.8}$$

Pro malé hodnoty frekvence je

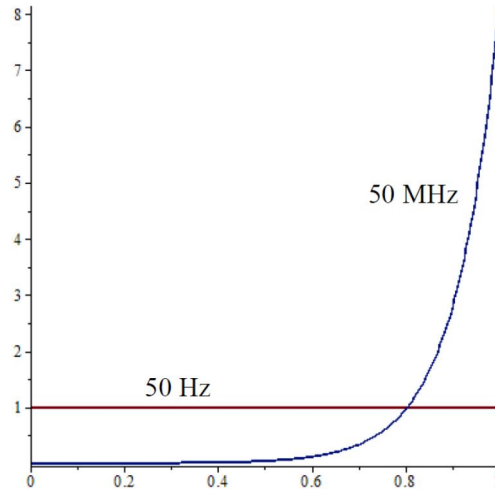
$$E(r) \approx \frac{I}{\sigma \pi R^2} \quad , \quad B(r) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{r}{R} \quad ,\tag{4.9}$$

zatímco pro velké hodnoty máme v blízkosti  $r \approx R$

$$\begin{aligned}\vec{E} &\approx \frac{I}{\sqrt{2}\pi\sigma R\delta} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{R-r}{\delta}\right\} \exp\left\{i\left(\frac{R-r}{\delta} - \frac{\pi}{4} - \omega t\right)\right\} \vec{e}_z, \\ \vec{B} &\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{R-r}{\delta}\right\} \exp\left\{i\left(\frac{R-r}{\delta} - \omega t\right)\right\} \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Vztahy (4.10) získáváme z asymptotického rozvoje Besselových funkcí

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]. \quad (4.11)$$



Pro různé relativní hodnoty hustoty proudu pro měděný drát poloměru 1 mm se specifickým odporem  $1/\sigma = 1,555 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$  je u dvou různých frekvencí ( $f = 50 \text{ Hz}$  a  $f = 50 \text{ MHz}$ ) je ukázán na obrázku. Je vidět, že pro vyšší frekvenci je skin-efekt zanedbatelný.

#### 4.2 Vzájemná indukčnost a vlastní indukčnost.

Uvažujme dvě geometricky pevné cívky s proměnným proudem v cívce 2. Indukované napětí v cívce 1 vyvolané změnou pole buzeného cívkou 2 je<sup>8</sup>

$$U_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{(1)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 dS_1, \quad \int_{(1)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_1 dS_1 = \oint_{(1)} \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_1, \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{(2)} \frac{d\vec{\ell}_2}{r_{12}}. \quad (4.12)$$

Po dosazení dostáváme

$$U_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\vec{\ell}_2 \cdot d\vec{\ell}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (4.13)$$

<sup>8</sup> Poznámka: normála k ploše je dána pravidlem pravé ruky, tedy ve směru vektorového součinu tečny a vnitřní normály k orientované (proti směru hodinových ručiček) uzavřené křivce na ploše.

Pokud by tekla proud cívku 1, bylo by indukované napětí v cívkě 2

$$U_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad , \quad M_{21} = M_{12} = M \quad . \quad (4.14)$$

Ale také změna magnetického toku cívku 1 vytvoří indukované napětí v této cívkě, stejně platí pro cívku 2. Obecně tedy můžeme psát

$$U_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \quad , \quad U_2 = M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad . \quad (4.15)$$

změna energie magnetického pole je rovna záporné vzaté práci

$$\frac{dW}{dt} = -U_1 I_1 - U_2 I_2 = L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} - M \left( I_1 \frac{dI_2}{dt} + I_2 \frac{dI_1}{dt} \right) \quad , \quad (4.16)$$

takže pro energii magnetického pole je

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad , \quad L_1 L_2 \geq M^2 \quad . \quad (4.17)$$

Energii magnetického pole máme ovšem také vyjádřit jako

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{j} \cdot \vec{A} \, dV \quad . \quad (4.18)$$

Při odvození rovnosti obou výrazů v (4.18) je postupně využito vztah

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad . \quad (4.19)$$

Vztahu pro energii využijeme pro výpočet vlastní indukčnosti

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_V B^2 \, dV \quad . \quad (4.20)$$

Uvažujme dvě cívky ve tvaru solenoidu každou o  $N$  závitů těsně u sebe. Průřez cívek je  $S$  a jejich délka  $\ell$ . Pole první a druhé cívky jsou tedy přibližně  $B_1 \approx \mu_0 N I_1 / \ell$ ,  $B_2 \approx \mu_0 N I_2 / \ell$  a pro indukčnosti máme  $L_1 \approx L_2 \approx -M \approx \mu_0 N^2 S / \ell$ . Pro energii magnetického pole pak

$$W \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{2\ell} (I_1 + I_2)^2 \quad . \quad (4.21)$$

### 4.3 Komplexní odpor

Pro obvod s odporem, kondenzátorem a indukčností v sériovém zapojení máme

$$U = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt} \quad , \quad I = \frac{dQ}{dt} \quad , \quad (4.22)$$

tedy pro harmonický proud

$$U = U_0 \exp\{-i\omega t\} \quad , \quad I = I_0 \exp\{-i\omega t\} \quad (4.23)$$

dostáváme vztah

$$U = Z I \quad , \quad Z = R - i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad . \quad (4.24)$$

Vezmeme-li reálnou část (4.24), dostáváme

$$I = \frac{U_0 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad , \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} \quad . \quad (4.25)$$

Pro soustavu induktivně vázaných obvodů má zobecněná rovnice (4.22) tvar

$$U_a = R_a I_a + \frac{Q_a}{C_a} + \sum_b L_{ab} \frac{dI_b}{dt} \quad , \quad I_a = \frac{dQ_a}{dt} \quad , \quad (4.26)$$

který pro periodické d je dává

$$U_a = \sum_b Z_{ab} I_b \quad , \quad Z_{ab} = \left( R_a + \frac{i}{\omega C_a} \right) \delta_{ab} - i \omega L_{ab} \quad . \quad (4.27)$$

Vlastní frekvence dostaneme z podmínky řešitelnosti soustavy rovnic pro proudy p i v-ech  $U_a = 0$ , tedy

$$\det(Z_{ab}) = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Rovnice (4.26) lze formálně získat dosazením lagrangiánu  $\mathcal{L}$  a disipativní funkce  $\mathfrak{R}$

$$\mathcal{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2} L_{ab} \frac{dQ_a}{dt} \frac{dQ_b}{dt} - \sum_a \frac{1}{2} \frac{Q_a^2}{C_a} + \sum_a Q_a U_a \quad , \quad \mathfrak{R} = \sum_a \frac{1}{2} R_a \left( \frac{dQ_a}{dt} \right)^2 \quad (4.29)$$

do obecného vztahu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dQ_a}{dt}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_a} = - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \frac{dQ_a}{dt}} \quad . \quad (4.30)$$

Jde tedy o analogii k souboru tlumených harmonických oscilátorů buzených vn j-í silou.

## 5. Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí

### 5.1 Mikroskopické Maxwellovy rovnice

Náboje a proudy rozdělíme na ty, kterou jsou vázané na prostředí a na vn j-í náboje a proudy. Mikroskopické Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí tedy budou

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{e} &= \frac{\rho + \rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{e} = - \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad , \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{h} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \rho \vec{v} + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{h} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Vytvoříme střední hodnoty<sup>9</sup> a dostaneme

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\langle \rho \rangle + \rho_{ext}}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \langle \rho \vec{v} \rangle + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ,\end{aligned}\tag{5.2}$$

kde jsme označili

$$\langle \vec{e} \rangle = \vec{E} \quad , \quad \langle \vec{h} \rangle = \vec{B} \quad .\tag{5.3}$$

Celkový náboj vázaný na prostředí, plně uzavřené uvnitř oblasti  $V$  je roven nule

$$\int_V \langle \rho \rangle dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \rho \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad ,\tag{5.4}$$

přičemž  $\vec{P}=0$  vně materiálu. Potom je totífl z Gaussovy vety nulovost celkového náboje zaručena

$$\int_V \langle \rho \rangle dV = -\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad .\tag{5.5}$$

Uvažujme dipólový moment

$$\int_V \vec{r} \langle \rho \rangle dV = -\int_V \vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dV = -\int_S \vec{r} (\vec{n} \cdot \vec{P}) dS + \int_V (\vec{P} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} dV = \int_V \vec{P} dV \quad .\tag{5.6}$$

Prove me nyní ez materiálem tak, aby byl plně uzavřen uvnitř nějaké plochy  $S$ . Celkový proud touto plochou vázaný na prostředí je dán celkovou hodnotou časové změny průmětu vektoru polarizace

$$\int_S \langle \rho \vec{v} \rangle \cdot \vec{n} dS = \int_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad \Rightarrow \quad \langle \rho \vec{v} \rangle = \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad ,\tag{5.7}$$

přičemž  $\vec{M}=0$  vně materiálu. Potom je totífl

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_S \left( \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS dt = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \int_\ell \vec{M} \cdot d\vec{\ell} dt + \int_S [\vec{P}(T) - \vec{P}(0)] \cdot \vec{n} dS \right\} = 0 \quad .\end{aligned}\tag{5.8}$$

Uvažujme magnetický moment

---

<sup>9</sup> Je to obdoba situace v mechanice kontinuity: středujeme přes malý objem, který sice obsahuje dostatek atomů i molekul pro vyhlazení mikroskopických fluktuací, ale stále jej můžeme z makroskopického hlediska považovat za šedobí prostředí.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \langle \rho \vec{v} \rangle dV &= \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M}) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_S \vec{r} \times (\vec{n} \times \vec{M}) dS - \frac{1}{2} \int_V (\vec{M} \times \vec{\nabla}) \times \vec{r} dV = \int_V \vec{M} dV . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Definice vektor polarizace  $\vec{P}$  a magnetizace  $\vec{M}$  pomocí moment je dleflitá pro jednozna nost, jinak by vyhovovaly také  $\vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{f}$  a  $\vec{M} + \vec{\nabla} f$ . Pov-ímn me si, fle spojení rovnic (5.4) a (5.7) dává rovnici continuity

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \langle \rho \vec{v} \rangle = 0 . \quad (5.10)$$

Vynecháme-li te indexy šestř, dostáváme kone ný tvar Maxwellových rovnic (1.4)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} . \end{aligned} \quad (5.11)$$

Materiálové vztahy jsou pak

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M}) . \quad (5.12)$$

V kovových materiálech pokládáme

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} . \quad (5.13)$$

## 5.2 Maxwellovy rovnice pro prost edí s triviálními materiálovými vztahy

V homogenním izotropním lineárním prost edí bez disperse máme jednoduché materiálové vztahy

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{B} . \quad (5.14)$$

Zavedeme-li pro popis elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} , \quad (5.15)$$

máme po dosazení do Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned} \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_r \varepsilon_0} , \\ \Delta \vec{A} - \varepsilon_r \mu_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \varepsilon_r \mu_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_r \mu_0 \vec{j} . \end{aligned} \quad (5.16)$$

S využitím kalibra ní transformace

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi \quad , \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.17)$$

můžeme mít

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_r \mu_r \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.18)$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní vlnovou rovnici

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0} \quad , \\ \Delta \vec{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_r \mu_0 \vec{j} \quad . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Označíme-li jsme rychlost světla ve vakuu  $c$  a index lomu  $n$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad , \quad n^2 = \epsilon_r \mu_r \quad . \quad (5.20)$$

## 6. Rovinná a kulová elektromagnetická pole ve vakuu

### 6.1 Rovinná a kulová vlna

Vlnová rovnice v jednorozměrném případě a vlnová rovnice pro sféricky symetrické pole v trojrozměrném případě jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \quad , \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial r} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial t^2} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.1)$$

Obecné řešení těchto rovnic je

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad , \\ \psi(r,t) &= \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Na toto řešení se můžeme dívat jako na rovinnou vlnu jdoucí ve směru nebo proti směru osy  $x$  respektive na rozbíhavou nebo sbíhavou kulovou vlnu.

### 6.2 Obecné řešení nehomogenní rovnice pro potenciály

První řešení z řešení (6.2) se sférickou symetrií je velmi důležitá, neboť nám umožní zapsat obecné potenciály, způsobené zadaným rozložením náboje a proudu. Předpokládáme, že platí



$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \quad (6.3)$$

Obecné řešení nehomogenních rovnic pro potenciály

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned} \quad (6.4)$$

můžeme tedy získat jako

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}} d^3\vec{r}_2 \quad (6.5)$$

a

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}} d^3\vec{r}_2 \quad , \quad (6.6)$$

kde  $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Po derivování a integraci dáme integrandu pravou stranu nehomogenní rovnice, jmenovatel je funkce, která je řešením homogenní vlnové rovnice.

### 6.3 Pole nábojů a proudů mnoho dipólů

Uvažujme všechny náboje soustředěny kolem počátku souřadnic. Pak můžeme pro vektorový potenciál psát

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{r}{c}\right) d^3\vec{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_a e_a \vec{v}_a\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (6.7)$$

neboli

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad , \quad \vec{p}(t) = \sum_a e_a \vec{r}_a(t) \quad . \quad (6.8)$$

Skalární potenciál spočteme integrací kalibračního vztahu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad . \quad (6.9)$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{r} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] , \quad (6.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{r} \times \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] .$$

Skalární potenciál je tedy

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot \left[ \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] . \quad (6.11)$$

Pro intenzity dostaneme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} \left[ \frac{3}{r^2} \left( \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \cdot \vec{r} \right) \vec{r} - \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2} \times \vec{r} \right) \times \vec{r} \right] , \quad (6.12)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \frac{\partial \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t} \times \vec{r} , \quad \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{r}{c} \frac{\partial \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t} .$$

Dostate n daleko od dipólu máme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \frac{1}{r} \vec{D} \left( t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{n} , \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{1}{r} \vec{D} \left( t - \frac{r}{c} \right) , \quad (6.13)$$

kde jsme ozna ili

$$\vec{D} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \frac{\partial^2 \vec{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)}{\partial t^2} \times \vec{n} , \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} . \quad (6.14)$$

Pro hustotu energie máme

$$W = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{1}{16\pi^2 c^4 \epsilon_0 r^2} D^2 \quad (6.15)$$

a Poynting v vektor je

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} D^2 \vec{n} . \quad (6.16)$$

Platí p irozen

$$\frac{\vec{S}}{W} = c \vec{n} . \quad (6.17)$$

*P íklad:* Vezm me rozlofení proudu ve tvaru

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = J \delta(x) \delta(y) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t) \vec{e}_z , \quad 0 \leq z \leq L . \quad (6.18)$$

Podle (6.7) a (6.8) spočteme snadno

$$\vec{p}(t) = \frac{2LJ}{\pi\omega} \sin(\omega t) \vec{e}_z \quad (6.19)$$

a podle (6.14)

$$\vec{D}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{2LJ\omega}{\pi} \sin\theta \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_\varphi \quad (6.20)$$

*Příklad:* V kvantové teorii vezmeme místo integrálu z proudové hustoty maticový element operátoru proudu mezi počátečním a koncovým stavem elektronu v atomu. Ze Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi_i \quad , \quad -i\hbar \frac{\partial \psi_f^*}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi_f^* \quad (6.21)$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_i \psi_f^*) + \frac{\hbar}{2mi} \vec{\nabla} \cdot (\psi_f^* \vec{\nabla} \psi_i - \psi_i \vec{\nabla} \psi_f^*) = 0 \quad (6.22)$$

Vztah (6.22) umocníme a zapsat šrovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho_{fi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{fi} = 0 \quad (6.23)$$

kde hustota náboje a hustota proudu odpovídající přechodu  $i \rightarrow f$  jsou

$$\rho_{fi} = e \psi_i \psi_f^* \quad , \quad \vec{j}_{fi} = \frac{e\hbar}{2mi} \psi_f^* \vec{\nabla} \psi_i - \psi_i \vec{\nabla} \psi_f^* \quad (6.24)$$

Vynásobením (6.23) vektorem  $\vec{r}$  a malou úpravou získáme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \psi_i \psi_f^*) + \frac{\partial}{\partial x}[\vec{r}(j_{fi})_x] + \frac{\partial}{\partial y}[\vec{r}(j_{fi})_y] + \frac{\partial}{\partial z}[\vec{r}(j_{fi})_z] = \vec{j}_{fi} \quad (6.25)$$

Dosadíme  $\vec{j}_{fi}$  dané tímto vztahem do (6.7). Integrály s derivacemi podle prostorových souřadnic dávají nulu, takže zůstane jen první člen s derivací podle času. Porovnání s (6.8) vede k výrazu pro dipólový moment. Vezmeme přitom v úvahu, že pro stacionární stavy

$$\psi_i(\vec{r}, t) = u_i(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_i t\right) \quad , \quad \psi_f^*(\vec{r}, t) = u_f^*(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_f t\right) \quad (6.26)$$

S označením  $\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$  můžeme psát pro dipólový moment vyvolaný elektronovým přechodem  $i \rightarrow f$

$$\vec{p}_{fi}(t) = \exp(i\omega_{fi} t) e \int \vec{r} u_f^*(\vec{r}) u_i(\vec{r}) d^3 \vec{r} \quad (6.27)$$

## 6.4 Lienard v - Wiechert v potenciál

A se nabitá částice pohybuje po zadané trajektorii  $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ . Hustota náboje je pak

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0(t)) \quad . \quad (6.28)$$

Vzorec pro skalární potenciál p epí-eme jako

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dt' d^3 \vec{r}' = \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{1}{R(t')} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dt' \quad , \end{aligned} \quad (6.29)$$

kde jsme označili  $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$ ,  $R(t') = |\vec{R}(t')|$ . S pomocí vztahu

$$\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{cR(t_r)}} \quad , \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad (6.30)$$

napišeme výraz pro skalární potenciál jako

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R(t_r) - \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{c}} \quad , \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad . \quad (6.31)$$

Výraz pro vektorový potenciál je pak obdobn

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e \mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}(t_r)}{R(t_r) - \frac{\vec{R}(t_r) \cdot \vec{v}(t_r)}{c}} \quad , \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad . \quad (6.32)$$

Vezme te jednoduchý p ípad pohybu s konstantní rychlostí podél osy  $x$ . Podmínku pro nalezení asového zpofdní p epí-eme na

$$c^2 (t - t_r)^2 = (x - vt_r)^2 + y^2 + z^2 \quad , \quad (6.33)$$

odkud

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t_r = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \left[ (x - vt_r)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2) \right]^{1/2} \quad . \quad (6.34)$$

Jmenovatel výraz (6.31) a (6.32) pro potenciály m fleme psát jako

$$c(t - t_r) - \frac{v(x - vt_r)}{c} = c \left[ t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t_r \right] \quad . \quad (6.35)$$

Po malé úprav pak dostáváme

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{1}{r^*} \quad (6.36)$$

pro skalární potenciál a

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = (A_x(\vec{r}, t), 0, 0) \quad , \quad A_x(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{v}{r^*} \quad (6.37)$$

pro vektorový potenciál, kde jsme označili

$$r^* = \left[ \frac{(x-vt)^2}{1-\beta^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2} . \quad (6.38)$$

Vektor intenzity elektrického pole je

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{1}{r^{*3}} (x-vt, y, z) \quad (6.39)$$

a vektor indukce magnetického pole je

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \frac{v}{r^{*3}} (0, -z, y) . \quad (6.40)$$

Pro vektor hustoty impulsu pole  $\vec{G} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$  dostáváme

$$\vec{G}(\vec{r}, t) = \frac{e^2\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{1-\beta^2} \frac{v}{r^{*6}} (y^2 + z^2, -y(x-vt), -z(x-vt)) \quad (6.41)$$

a pro hustotu energie  $W = (\epsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0)/2$  výraz

$$W(\vec{r}, t) = \frac{e^2}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{1-\beta^2} \frac{(x-vt)^2 + (1+\beta^2)(y^2 + z^2)}{r^{*6}} . \quad (6.42)$$

## 6.5 Ztráta energie zářením

Pro Poyntingův vektor dipólového elektromagnetického pole jsme měli výrazy (6.14) a (6.16). Pro jednu nerelativistickou částici s nábojem  $e$ , která se pohybuje se zrychlením  $\vec{w}$  je pak

$$\vec{D} = e \vec{w} \times \vec{n} \quad (6.43)$$

a intenzita záření vychází jako

$$dI = \vec{S} \cdot \vec{n} r^2 d\Omega = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} w^2 \sin^2 \theta d\Omega . \quad (6.44)$$

Po integraci přes celý prostorový úhel dostaneme pro vyzařovanou intenzitu ( $\mathcal{E}$  je energie částice)

$$I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{w}^2 \quad (6.45)$$

## 7. Rozptyl záření volnými náboji.

### 7.1 Thomson v vzorec

Budeme popisovat rozptyl záření, které dopadá na soustavu nabitých částic. Zavedeme proto pojem úinného proudu. A  $dI$  značí intenzitu záření, tj. střední hodnotu energie vyzařované soustavou za jednotku času do elementu prostorového úhlu  $d\Omega$  a  $\bar{S}$  je střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru (střední hodnota toku energie) dopadajícího záření. Potom je definován diferenciální úinný proud (úinný proud rozptylu do elementu prostorového úhlu  $d\Omega$ ) jako veličina rozměru elementu plochy

$$d\sigma = \frac{dI}{\bar{S}} \quad (7.1)$$

Uvažujme tedy rozptyl elektromagnetické vlny jedním volným nábojem. Budeme předpokládat, že rychlost získaná nábojem bude malá a že vlnová délka dopadající vlny je mnohem větší než amplituda vyvolaných kmitů náboje okolo rovnovážné polohy (do této polohy umístíme počátek souřadnic), tedy můžeme psát

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \alpha) \approx e \vec{E}_0 \cos(\omega t - \alpha) \quad (7.2)$$

Pro intenzitu dipólového záření kmitajícího náboje máme podle (6.45)

$$dI = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} |\vec{E}_0 \times \vec{n}|^2 \overline{\cos^2(\omega t - \alpha)} d\Omega = \frac{e^4}{32\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} E_0^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (7.3)$$

a pro střední hodnotu Poyntingova vektoru dopadající vlny

$$\bar{S} = c \epsilon_0 E_0^2 \overline{\cos^2(\omega t - \alpha)} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (7.4)$$

takže diferenciální úinný proud je

$$d\sigma = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega \quad (7.5)$$

Celkový úinný proud je pak dán Thomsonovým vzorcem

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \quad (7.6)$$

Veli ina  $r_e$  ozna uje tzv. klasický polom r elektronu. Vztah pro polom r získáme tak, fle poloffíme elektrostatickou energii elektronu špolom ruř  $r_e$  rovnu klidové energii

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} = mc^2 \quad . \quad (7.7)$$

## 7.2 Modifikace Thomsonova vzorce

Uvaflujme nyní nikoliv volný náboj, ale tlumený oscilátor, tedy

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0\cos\omega t \quad . \quad (7.8)$$

Pro dipólový moment  $\vec{p} = e\vec{r}$  odsud dostáváme

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \vec{E}_0 \quad . \quad (7.9)$$

Celkový ú ínný pr ez je v tomto p ípad

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad . \quad (7.10)$$

## 7.3 Index lomu

Definujeme polarizovatelnost  $\alpha(\omega)$  jako konstantu ú m rnosti ve vztahu mezi (lokálním) elektrickým polem  $\vec{E}_{loc}$  a dipólovým momentem  $\vec{p}$ . Vyjdeme z komplexního zápisu (7.8)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \gamma\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_{loc}\exp(-i\omega t) \quad . \quad (7.11)$$

Potom

$$\vec{p} = \epsilon_0\alpha(\omega)\vec{E}_{loc} \quad , \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \quad . \quad (7.12)$$

Polarizace je pak  $\vec{P} = N\vec{p}$ . Musíme ov–em uváflit, jaké pole p sobí na náboj. P ípome me z elektrostatiky, fle je-li v dielektriku s homogenním polem dutina, je lokální pole rovno

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0}\vec{P} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0}\vec{P} \quad , \quad (7.13)$$

podle toho, jde-li o t rbinu podél nebo nap í pole nebo o kulovou dutinu. Pro úplnost poznamenejme, fle pro magnetické pole máme v podobné situaci

$$\vec{B}_{loc} = \vec{B} - \vec{M} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} - \frac{2}{3}\vec{M} \quad . \quad (7.14)$$

Pro dielektrika uvažujeme o vázaných nábojích uvnitř kulové dutiny, můžeme tedy psát

$$\vec{P} = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \epsilon_0 \vec{E} \quad (7.15)$$

a pro index lomu (za velmi slabého předpokladu  $\mu(\omega) = \mu_0$ )

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \quad (7.16)$$

Obvyklá forma tohoto vztahu je (Clausius - Mossotti)

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha \quad (7.17)$$

Ve vodiči uvažujeme o těm volných elektronech (nevázaných k atomu, tedy  $\omega_0 = 0$ ) a dále máme pro konstantu  $\gamma$  (ze dvou známých vyjádření proudu a zápisu změny hybnosti za dobu mezi srážkami)

$$j = \sigma E, \quad j = N e v_d, \quad m v_d \gamma = e E \Rightarrow \gamma = \frac{N e^2}{m \sigma} \quad (7.18)$$

Také lokální pole je rovno vnějšímu, opět díky neustálému pohybu těm volných elektronů. Odtud máme pro index lomu v kovu

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i \omega \frac{\omega_p^2 \epsilon_0}{\sigma}}, \quad \omega_p^2 = \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \quad (7.19)$$

## 8. Elektromagnetické pole v dispersním prostředí.

### 8.1 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice pro Fourierovy složky (píjeme obecně bez vyznačení prostorové proměnné) po úctě jako

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (8.1)$$

jsou

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\omega) &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{H}(\omega) &= -i\omega \vec{D}(\omega), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\omega) &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) &= i\omega \vec{B}(\omega). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Předpoklad lineárního a píinného vztahu mezi intenzitou a indukcí elektrického pole připouští následující vztah



$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \left( \vec{E}(t) + \int_0^\infty \chi_e(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \right) . \quad (8.3)$$

Podobn pro magnetické veli iny

$$\vec{B}(t) = \mu_0 \left( \vec{H}(t) + \int_0^\infty \chi_m(\tau) \vec{H}(t-\tau) d\tau \right) . \quad (8.4)$$

Fourierova transformace (8.3) a (8.4) vede k výraz m

$$\vec{D}(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega) = \mu_0 \mu(\omega) \vec{H}(\omega) \quad , \quad (8.5)$$

kde

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty \chi_e(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad , \quad \mu(\omega) = 1 + \int_0^\infty \chi_m(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau \quad . \quad (8.6)$$

Z tohoto vyjád ení máme hned

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega) \quad , \quad \mu(-\omega) = \mu^*(\omega) \quad (8.7)$$

a

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = 1 \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \mu(\omega) = 1 \quad . \quad (8.8)$$

Komplexní veli iny  $\varepsilon(\omega)$  a  $\mu(\omega)$  je zvykem zna it pomocí reálných a imaginárních ástí jako

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad , \quad \mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega) \quad . \quad (8.9)$$

Pro dielektrika nabývá  $\varepsilon(\omega)$  p i  $\omega \rightarrow 0$  kone nou hodnotu statické relativní permitivity. Pro

kovy je chování zajímav j-í. Z porovnání dvou tvar  $(\vec{\nabla} \times \vec{H})(\omega \rightarrow 0)$  dostáváme

$$-i\omega \varepsilon(\omega \rightarrow 0) \vec{E}(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \sigma \vec{E}(\omega \rightarrow 0) \Rightarrow \varepsilon(\omega \rightarrow 0) \rightarrow \frac{i\sigma}{\omega} \quad . \quad (8.10)$$

S využitím vztah (8.5) m fleme Maxwellovy rovnice (8.2) p epsat na

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\omega) &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}(\omega) = -i\omega \frac{n^2(\omega)}{c^2} \vec{E}(\omega) \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\omega) &= 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}(\omega) = i\omega \vec{B}(\omega) \quad , \end{aligned} \quad (8.11)$$

kde

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad , \quad \varepsilon(\omega) \mu(\omega) = n^2(\omega) \quad . \quad (8.12)$$

Vhodnou volbou kalibrace potenciál je  $\phi(\omega) = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\omega) = 0$ , takže

$$\vec{E}(\omega) = i\omega \vec{A}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\omega) \quad (8.13)$$

a pro vektorový potenciál máme Helmholtzovu rovnici

$$\Delta \vec{A}(\omega) + \frac{\omega^2 n^2(\omega)}{c^2} \vec{A}(\omega) = 0 \quad . \quad (8.14)$$

## 8.2 Disipace energie

Vezm me nyní výraz (1.7)

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \quad (8.15)$$

Uvaflujme monochromatickou elektromagnetickou vlnu. Pon vadfl pravá strana (8.15) obsahuje kvadratické výrazy, musíme pracovat s reálnými reprezentacemi pole, tj. dosazovat

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{2} \left[ \vec{E}(\omega) \exp(-i\omega t) + \vec{E}^*(\omega) \exp(i\omega t) \right] \quad , \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \frac{i\omega \varepsilon_0}{2} \left[ -\varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \exp(-i\omega t) + \varepsilon^*(\omega) \vec{E}^*(\omega) \exp(i\omega t) \right] \end{aligned} \quad (8.16)$$

a

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2} \left[ \vec{H}(\omega) \exp(-i\omega t) + \vec{H}^*(\omega) \exp(i\omega t) \right] \quad , \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \frac{i\omega \mu_0}{2} \left[ -\mu(\omega) \vec{H}(\omega) \exp(-i\omega t) + \mu^*(\omega) \vec{H}^*(\omega) \exp(i\omega t) \right] \quad . \end{aligned} \quad (8.17)$$

Pro časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru

$$\overline{\vec{S}(\omega)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\omega, t) dt \quad (8.18)$$

dostáváme ze vztahu (8.15) dosazením z (8.16) a (8.17)

$$-\vec{\nabla} \cdot \overline{\vec{S}(\omega)} = \frac{\omega}{2} \left[ \varepsilon_0 \varepsilon''(\omega) |\vec{E}(\omega)|^2 + \mu_0 \mu''(\omega) |\vec{H}(\omega)|^2 \right] \quad . \quad (8.19)$$

Energie p idávaná do jednotky objemu prost edí p icházející elektromagnetickou vlnou je prom ována na teplo. Podle druhé v ty termodynamické musí být toto teplo p i disipaci energie vytvá eno, musí tedy být

$$\omega \varepsilon''(\omega) > 0 \quad , \quad \omega \mu''(\omega) > 0 \quad . \quad (8.20)$$

## 8.3 Fázová a grupová rychlost

Uvaflujme í ení vlny ve sm ru osy z. P edpokládejme, flé prost edí má jen slabou dispersi, tedy kvadrát indexu lomu bude sou ínem reálných ástí permitivity a permeability ( árky vynecháváme) a vlnu napí-eme jako

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega - \omega_0) \exp \left[ i \left( \frac{\omega n(\omega)}{c} z - \omega t \right) \right] d\omega \quad . \quad (8.21)$$

Amplitudová funkce je soustředěná kolem centrální frekvence  $\omega_0$ , takže podstatnou roli bude hrát jen malá šgrupa vln s blízkými frekvencemi. Provedeme rozvoj fáze kolem centrální frekvence

$$\frac{\omega n(\omega)}{c} z - \omega t = \frac{\omega_0 n(\omega_0)}{c} z - \omega_0 t + \left\{ \frac{z}{c} \frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} - t \right\} (\omega - \omega_0) + \dots$$

Vlnu (8.21) aproximujeme výrazem

$$A = \exp \left[ i \omega_0 \left( \frac{z}{v_f} - t \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp \left[ i \xi \left( \frac{z}{v_g} - t \right) \right] d\xi \quad , \quad (8.22)$$

kde jsme označili fázovou rychlost (index 0 u frekvencí ufl vynecháváme)

$$v_f = \frac{c}{n(\omega_0)} \quad (8.23)$$

a grupovou rychlost

$$v_g = \frac{c}{\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega}} \quad . \quad (8.24)$$

Pokud je index lomu menší než jedna, může nabývat fázová rychlost hodnot větší jak rychlost světla ve vakuu. Fázová rychlost je však jen abstraktní veličina. Zato grupová rychlost vystupuje například jako rychlost přenosu energie, měla by tedy podle Einsteinovy teorie být vždy menší než  $c$ . Proto musí být splněna podmínka

$$\frac{d[\omega n(\omega)]}{d\omega} > 1 \quad . \quad (8.25)$$

Není triviální to ukázat, ale podmínka skutečně splněna je.

## 9. Rovnice elektromagnetického pole ve čtyřrozměrném zápisu

### 9.1 Čtyřrozměrný vektor proudu, rovnice kontinuity

Hustotu náboje píšeme jako

$$dQ = \rho dV \quad , \quad \rho = \sum_a e_a \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_a) \quad . \quad (9.1)$$

Ze vztahu

$$dQ dx^i = \rho dV dx^i = \rho \frac{dx^i}{dt} dV dt \quad (9.2)$$

porovnáním geometrických vlastností (dva skaláry  $dQ$  ó element náboje a  $dV dt = d\Omega$  ó element ty objemu a jeden ty vektor  $dx^i$ ) vyplývá, že musíme definovat další ty vektor (proudu)

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} = (c\rho, \rho\vec{v}) = (c\rho, \vec{j}) \quad (9.3)$$

Ve výrazu pro ú inek m fíme pak psát p i p echodu ke spojitému rozd lení náboje

$$e \int A_i dx^i = \int \rho A_i dx^i dV = \frac{1}{c} \int A_i j^i d\Omega \quad (9.4)$$

Náboj, který ubude v n jakém objemu, m fíme zapsat dvojm zp sobem

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad (9.5)$$

S pomocí Gaussovy v ty pak z (9.5) plyne

$$\int \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (9.6)$$

tedy (objem je libovolný) rovnice kontinuity

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (9.7)$$

Zákon zachování náboje (rovnice kontinuity) zaru uje, že p i kalibra ní transformací se ú inek zm ní pouze o divergenci

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow \int A_i j^i d\Omega \rightarrow \int \left( A_i + \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right) j^i d\Omega = \int A_i j^i d\Omega + \int \frac{\partial (\chi j^i)}{\partial x^i} d\Omega \quad (9.8)$$

## 9.2 Náboj v elektromagnetickém poli

Ú inek pro nabitou ástici v elektromagnetickém poli, který je invariantní a má šminimální interakci, m fíme zvolit jako

$$S = -mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_i dx^i \quad , \quad A^i = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (9.9)$$

Lagrangeova funkce a zobecn náhybnost jsou

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \phi \quad , \quad \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e \vec{A} = \vec{p} + e \vec{A} \quad (9.10)$$

Je pak<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} &= e \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{v}) - e \vec{\nabla} \phi = e (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + e \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e \vec{\nabla} \phi \quad , \\ \frac{d}{dt} (\vec{p} + e \vec{A}) &= \frac{d \vec{p}}{dt} + e \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad . \end{aligned} \quad (9.11)$$

Lagrangeova rovnice je tedy

$$\frac{d \vec{p}}{dt} = e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad , \quad (9.12)$$

kde jsme označili

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \quad (9.13)$$

Ve čtyřrozměrné notaci

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \left( -mc \int_a^b ds - e \int_a^b A_i dx^i \right) = \\ &= \int_a^b \left( mc \delta x^i du_i + e \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - e \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i \right) - (mc u_i + e A_i) \delta x^i \Big|_a^b \quad . \end{aligned} \quad (9.14)$$

Použili jsme při odvození integraci per partes a vztahy

$$\delta ds = u_i \delta x^i \quad , \quad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k \quad . \quad (9.15)$$

Obvyklým postupem dostáváme výraz pro zobecněnou hybnost

$$P^i = mc u^i + e A^i \quad (9.16)$$

a pohybovou rovnici

$$mc \frac{du_i}{ds} = e F_{ik} u^k \quad , \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad . \quad (9.17)$$

### 9.3 Tenzor elektromagnetického pole

Ve vztahu (9.17) jsme zavedli tenzor elektromagnetického pole

<sup>10</sup> Při úpravě použijeme identitu známou z vektorové analýzy

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad .$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.18)$$

P i Lorentzov transformaci se tenzor elektromagnetického pole transformuje podle vztahu

$$F^{ik} = \Lambda_m^i \Lambda_n^k F'^{mn}. \quad (9.19)$$

Ozna íme-li  $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ , dostáváme p i transformaci

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0), \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \quad (9.20)$$

neboli v maticovém zápisu

$$x^i = \Lambda_k^i x'^k, \quad \Lambda_k^i = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

transforma ní vztah pro tenzor pole

$$F'^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & F'^{01} & \gamma(F'^{02} + \beta F'^{12}) & \gamma(F'^{03} + \beta F'^{13}) \\ F'^{10} & 0 & \gamma(F'^{12} + \beta F'^{02}) & \gamma(F'^{13} + \beta F'^{03}) \\ \gamma(F'^{20} + \beta F'^{21}) & \gamma(F'^{21} + \beta F'^{20}) & 0 & F'^{23} \\ \gamma(F'^{30} + \beta F'^{31}) & \gamma(F'^{31} + \beta F'^{30}) & F'^{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.22)$$

P evedeno do vektor intenzity a indukce

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + V B'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - V B'_y), \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right), & B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right). \end{aligned} \quad (9.23)$$

V nerelativistickém p íblížení ( $V/c \rightarrow 0$ ) p echází (9.23) na

$$\vec{E} \doteq \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}', \quad \vec{B} \doteq \vec{B}'. \quad (9.24)$$

Invarianty pole m fleme zkonstruovat z tenzoru pole. Pon vadfl je antisymetrický, zúflení nedává nic a máme afl kvadratické výrazy

$$g^{im} g^{kn} F_{ik} F_{mn} = F_{ik} F^{ik} = \text{inv}, \quad \varepsilon^{ikmn} F_{ik} F_{mn} = F_{ik} {}^* F^{ik} = \text{inv}. \quad (9.25)$$

Duální tenzor vyjád ený pomocí intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole má tvar

$${}^*F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} . \quad (9.26)$$

Invarianty mají pak vyjádění

$$F_{ik} F^{ik} = -2 \left( \frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right) , \quad F_{ik} {}^*F^{ik} = 4 \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{c} . \quad (9.27)$$

#### 9.4 První pár Maxwellových rovnic

Z vyjádění tensoru elektromagnetického pole pomocí potenciálu snadno odvodíme platnost vztahu

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 . \quad (9.28)$$

Na levé straně je úplně antisymetrický tensor třetího řádu, představuje pouze tři různé rovnice. Zřejmě ji je to vidět, uflijeme-li zápis pomocí duálního (pseudo)vektoru

$$\varepsilon^{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = \frac{\partial {}^*F^{ik}}{\partial x^k} = 0 . \quad (9.29)$$

Nultá komponenta dává tvrzení o nezáporném charakteru magnetického pole, další tři komponenty Faraday v indukční zákon

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (9.30)$$

#### 9.5 Druhý pár Maxwellových rovnic

Druhý pár Maxwellových rovnic odvodíme z variačního principu. Za Lagrangeovu funkci elektromagnetického pole zvolíme přirozeně známý invariant s vhodnou konstantou

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{c} \int \left( A_i j^i + \frac{1}{4\mu_0} F_{ik} F^{ik} \right) d\Omega \\ &= \int \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \rho \phi - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \vec{j} \cdot \vec{A} \right) dV dt . \end{aligned} \quad (9.31)$$

S uvážením  $F^{ik} \delta F_{ik} = F_{ik} \delta F^{ik}$  dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int \left( j^i \delta A_i + \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \delta F_{ik} \right) d\Omega = \\ &= -\frac{1}{c} \int \left( j^i \delta A_i + \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{1}{2\mu_0} F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega . \end{aligned} \quad (9.32)$$

Po integraci per partes ve (9.32)

$$\delta S = -\frac{1}{c\mu_0} \int \left( \mu_0 j^i + \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega - \frac{1}{c\mu_0} \int F^{ik} \delta A_i dS_k \quad . \quad (9.33)$$

Druhý pár Maxwellových rovnic je tedy

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 j^i \quad . \quad (9.34)$$

Nultá komponenta je rovnice pro divergenci indukce elektrického pole (zobecní Gaussovy v ty elektrostati ky), zbývající tři pro rotaci intenzity magnetického pole (Ampér v zákon doplněný Maxwellovým posuvným proudem)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad . \quad (9.35)$$

## 9.6 Tensor energie a hybnosti

Tensor energie a hybnosti dostaneme z teoremu Noetherové při transformaci, odpovídající translaci souřadnic

$$X_j^i = \delta_j^i \quad , \quad Q_j^A = 0 \quad , \quad \bar{T}_j^i(x) = q^A_{,j} \frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} - L \delta_j^i \quad . \quad (9.36)$$

Tady je index  $j$  vlastně indexem náhodně tensorovým. Takto získaný tensor energie a hybnosti  $T^{ik}$  není obecně symetrický. Pro Lagrangeovu funkci elektromagnetického pole je

$$\frac{\partial L}{\partial q^A_{,i}} = \frac{\partial L}{\partial A_{j,i}} = -\frac{1}{\mu_0} F^{ij} \quad (9.37)$$

a tensor energie a hybnosti vychází nesymetrický

$$\bar{T}^{ik} = -\frac{1}{\mu_0} \left( g^{ij} g_{lm} \frac{\partial A^l}{\partial x^j} F^{km} - \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) \quad . \quad (9.38)$$

K výrazu pro  $\bar{T}^{ik}$  můžeme ovšem přidat člen, zaručující symetrii, který přitom neovlivní celkovou hybnost

$$\bar{T}^{ik} \rightarrow T^{ik} = \bar{T}^{ik} + \frac{\partial \tau^{ikl}}{\partial x^l} \quad , \quad \tau^{ikl} = -\tau^{ilk} \quad . \quad (9.39)$$

Požadavek symetrie se objevuje proto, aby byl splněn i zákon zachování momentu hybnosti, definovaného vztahem  $M^{ikl} = x^i T^{kl} - x^k T^{il}$ , tedy

$$\frac{\partial M^{ikl}}{\partial x^l} = 0 \Leftrightarrow T^{ik} = T^{ki} \quad . \quad (9.40)$$

Pro elektromagnetické pole tensor  $\tau^{ikl}$  snadno najdeme jako

$$\tau^{ikl} = \frac{1}{\mu_0} A^i F^{kl} \quad , \quad (9.41)$$



takže výsledný tensor energie a hybnosti bude

$$T^{ik} = \frac{1}{\mu_0} \left( -g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} \right) . \quad (9.42)$$

Zapsáno pomocí tří rozměrných veličin

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & \frac{1}{c} S_\beta \\ \frac{1}{c} S_\alpha & -\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} , \quad (9.43)$$

kde

$$W = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) , \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (9.44)$$

jsou hustota energie a Poyntingův vektor a

$$\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon_0 E_\alpha E_\beta + \frac{1}{\mu_0} B_\alpha B_\beta - W \delta_{\alpha\beta} \quad (9.45)$$

je Maxwellův tenzor napětí.

## 9.7 Vlnová rovnice a rovinné vlny

Vezmeme druhý pár Maxwellových rovnic (ve vakuu) a dosadíme vyjádření pole pomocí potenciálů

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0 , \quad F^{ik} = g^{ij} g^{kl} \left( \frac{\partial A_l}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^l} \right) , \quad (9.46)$$

$$g^{ij} \frac{\partial^2 A^k}{\partial x^j \partial x^k} - g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0 .$$

Lorentzova kalibrační podmínka zjednoduší (9.46) na vlnovou rovnici

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = 0 , \quad -g^{kl} \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} = 0 . \quad (9.47)$$

Pomocí d'Alembertova operátoru

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (9.48)$$

máme pak ve tří rozměrném zápisu

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 , \quad \square \phi = 0 , \quad \square \vec{A} = 0 . \quad (9.49)$$

Hledáme-li řešení ve tvaru rovinné vlny, jde vlastně o konstantní čtyřvektor násobený komplexní jednotkou. Je pak

$$A^i = \text{Re} \left\{ a^i \exp(i k_j x^j) \right\} , \quad k_i k^i = 0 , \quad k_i a^i = 0 . \quad (9.50)$$

Poslední vztah ve (9.50) je dán Lorentzovou kalibrační podmínkou. Tyto vektory hybnosti zapisujeme jako

$$k^i = \left( \frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) , \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} , \quad \vec{n}^2 = 1 . \quad (9.51)$$

Velmi jednoduše popíšeme pomocí charakteristik rovinné monochromatické vlny Dopplerův jev. Máme zdroj světla, který je v klidu v soustavě  $K_{(0)}$ . Soustava  $K_{(0)}$  se pohybuje vzhledem k laboratorní soustavě  $K$  rychlostí  $V$ .  $\alpha$  je úhel mezi směrem pohybu zdroje a směrem šíření světla. Potom platí

$$\begin{aligned} k_{(0)}^0 &= \frac{k^0 - \beta k^1}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad k_{(0)}^0 = \frac{\omega_{(0)}}{c} , \quad k^0 = \frac{\omega}{c} , \\ k_{(0)}^1 &= \frac{k^1 - \beta k^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} , \quad k_{(0)}^1 = \frac{\omega_{(0)}}{c} \cos \alpha_{(0)} , \quad k^1 = \frac{\omega}{c} \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.52)$$

a odtud

$$\omega = \omega_{(0)} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \alpha} . \quad (9.53)$$

Pro rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla máme

$$\omega \approx \omega_{(0)} \left( 1 + \frac{V}{c} \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \cos 2\alpha \right) . \quad (9.54)$$

Tensor energie a hybnosti je

$$T^{ik} = \frac{c^2}{\omega^2} W k^i k^k , \quad W = \frac{1}{2\mu_0} \left[ a^i a_i^* + \text{Re} \left\{ a^i a_i \exp(2i k_j x^j) \right\} \right] . \quad (9.55)$$

Ve střední hodnotě podle času je druhý člen ve výrazu pro hustotu energie roven nule. Oba invarianty (9.27) jsou rovny nule. Se speciální volbou kalibrace (spojené ovšem s jednou úhlovou inerciální soustavou) máme

$$\begin{aligned} A^i &= (0, \vec{A}) , \quad \vec{A} = a_y \cos(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_y + a_z \sin(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_z , \\ \vec{E} &= \omega a_y \sin(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_y - \omega a_z \cos(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_z , \\ \vec{B} &= k a_z \cos(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_y + k a_y \sin(\omega t - kx + \alpha) \vec{e}_z . \end{aligned} \quad (9.56)$$

Eliptická polarizace takové vlny je vidět ze vztahu

$$\frac{E_y^2}{\omega^2 a_y^2} + \frac{E_z^2}{\omega^2 a_z^2} = 1 , \quad \frac{B_y^2}{k^2 a_z^2} + \frac{B_z^2}{k^2 a_y^2} = 1 . \quad (9.57)$$

