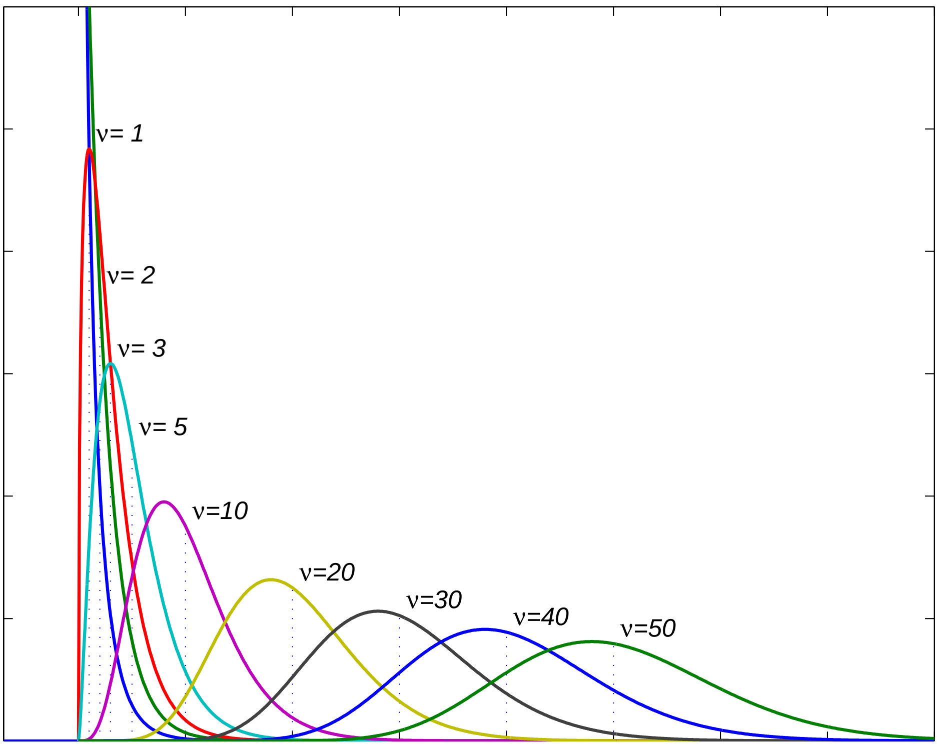
Pravděpodobnost a statistika I

Marie Forbelská

Jan Koláček



Obsah

Úvod

1. Anotace

Tento text je určen zejména pro studenty předmětu „M3121 Pravděpodobnost a statistika I“. Jde o základní kurz pravděpodobnosti a matematické statistiky, který je výchozím pro další teoretické i aplikačně zaměřené stochastické předměty.

Kurz obsahuje axiomatický přístup k teorii pravděpodobnosti, dále popisuje náhodné veličiny a náhodné vektory a rozdělení pravděpodobností. Poté se zabývá charakteristikami rozdělení pravděpodobností, zejména charakteristikami polohy a variability, zmínka je též o charakteristické funkci. Závěr kurzu je věnován zákonům velkých čísel a centrální limitní větě. Většina tvrzení je přímo dokázána, některé složitější pasáže se odkazují na literaturu. Zkoumaná problematika je demonstrována na příkladech se snahou o lepší srozumitelnost textu. Pro více příkladů odkazujeme studenty na cvičení k tomuto kurzu.

2. Literatura

DUPAČ, V., HUŠKOVÁ, M. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Karolinum. Praha 1999.

MICHÁLEK, J. *Úvod do teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky*. Státní pedagogické nakladatelství. Praha 1984.

RÉNYI, A. *Teorie pravděpodobnosti*, ACADEMIA, Praha 1972.

ZVÁRA, K., ŠTĚPÁN, J. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Matfyzpress. Praha 2001.

KAPITOLA 1

Kolmogorova axiomatická definice pravděpodobnosti

1. Náhodný pokus

Teorie pravděpodobnosti se zabývá matematickými modely náhodných dějů, jejichž výsledek není jednoznačně určen. Takovému náhodnému jevu budeme říkat **náhodný pokus**.

Výsledkem takového pokusu může být

- *číslo*, například počet bodů na horní straně hrací kostky při jednom vrhu, nebo počet vrhů hrací kostkou než padne šestka,
- naměřená *veličina*, například krevní tlak pacienta,
- *číselné vektory* a *posloupnosti*, časový průběh nějaké *funkce* na daném intervalu
- libovolný *kvalitativní ukazatel*, například vytažení koule dané barvy z osudí obsahující různorodé barvy, odpověď ano či ne respondenta při průzkumu mínění.

O **náhodném pokusu** hovoříme tedy tehdy, když

- konáme pokus, jehož výsledek **není jednoznačně určen** podmínkami, za nichž je prováděn;
- přitom nás zajímají je takové pokusy, u kterých sledovaný jev, označme jej A, vykazuje v opakovaných pokusech jakousi **stabilitu** (tzv. **statistickou stabilitu**), tj. relativní četnost $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ výskytu jevu A v posloupnosti n „nezávislých“ pokusů má tendenci při velkých hodnotách n se příliš neměnit, tedy má tendenci držet se nějaké $f_n(A) \approx p(A)$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(A) = p(A)$.

Dále již budeme předpokládat, že **náhodný** (nebo též **stochastický**) pokus je statisticky stabilní.

2. Značení

V dalším budeme používat následující značení:

Ω — **prostor elementárních jevů**, který chápeme jako *množinu* všech možných „nejjemnějších“ (tj. těch, které lze ještě rozlišovat) výsledků daného pokusu. Předpokládá se, že
- $\Omega \neq \emptyset$ je neprázdná abstraktní množina,
- počet jejich prvků může být konečný, spočetný i nespočetný,
- je vyčerpávající, tj. obsahuje absolutně všechny možné výsledky,
- výsledky jsou neslučitelné.

ω — **elementární jev**, který chápeme jako jednobodovou množinu. Například při jednom hodu kostkou jsou elementárními jevy jednotlivé možné výsledky, tj. padnutí 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$A, B, \ldots$ / $A_1, \ldots, A_n$ — **jevy** (značené velkými písmeny ze začátku abecedy) získáme množinovými operacemi nad elementárními jevy. Speciálními jevy jsou:

$\emptyset$ **nemožný jev**

Ω **jistý jev**

Například při jednom hodu kostkou kromě elementárních jevů (padnutí 1, 2, 3, 4, 5, 6) můžeme uvažovat i další jevy jako je padnutí sudého či lichého čísla, padnutí čísla menšího než šest, apod.

$\exp\Omega = 2^\Omega$ — systém všech podmnožin množiny Ω.

Mezi jednotlivými jevy mohou platit různé vztahy a můžeme pomocí nich vytvářet nové jevy, například

$C = A \cup B$	jev C nastane, pokud nastane jev A nebo jev B
$C = A \cap B$	jev C nastane, pokud společně nastane jev A i jev B. Pokud $A \cap B = \emptyset$, jevy A a B se nazývají **neslučitelné**.
$C = A - B$	jev C nastane, pokud nastane jev A při vyloučení (nenastoupení) jevu B
$\overline{A} = A^c = \Omega - A$	jev $\overline{A}$ je jev opačný k jevu A
$C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$	jev C nastane, pokud nastane alespoň jeden z jevů $A_1, \dots, A_n, \dots$
$C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$	jev C nastane, pokud nastanou všechny jevy $A_1, \dots, A_n, \dots$

3. Definice jevového pole

Abychom mohli zavést exaktní matematický model náhodného pokusu, je vhodné uvažovat vhodný systém náhodných jevů.

Definice 3.1. Mějme neprázdnou množinu $\Omega \neq \emptyset$ a neprázdný systém podmnožin $\mathcal{A} \subseteq \exp \Omega$, pro který platí

$$\begin{array}{rlcll} (i) & \Omega \in \mathcal{A} & & & \\ (ii) & A \in \mathcal{A} & \Rightarrow & \overline{A} \in \mathcal{A} & \\ (iii) & A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} & \Rightarrow & \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} & (\sigma \text{ aditivita}), \end{array}$$

pak $\mathcal{A}$ nazýváme **jevovou $\sigma-$algebrou na Ω**, dvojici $(\Omega, \mathcal{A})$ nazýváme **jevové pole** a libovolný prvek $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodný jev** (vzhledem k $(\Omega, \mathcal{A})$).

Poznámka 3.2. Dvojice $(\Omega, \mathcal{A})$ se v teorii míry nazývá **měřitelným prostorem**.

Poznámka 3.3. Podmínka (i) v předchozí definici je vlastně zbytečná a uvádí se spíše z historických důvodů. Předpokládáme totiž, že $\mathcal{A}$ je **neprázdný** systém podmnožin, tj. existuje $A \in \mathcal{A}$. Dle podmínky (ii) je také $\overline{A} \in \mathcal{A}$. Položíme-li $A_1 = \overline{A},\ A_n = A$ pro $n \geq 2$, pak podle (iii) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Poznámka 3.4. S náhodnými jevy pracujeme jako s množinami, takže pro ně platí **de Morganovy vzorce**

$$\overline{\bigcup_{n=1,2,..} A_n} = \bigcap_{n=1,2,..} \overline{A}_n \quad \text{a} \quad \overline{\bigcap_{n=1,2,..} A_n} = \bigcup_{n=1,2,..} \overline{A}_n.$$

Uvedeme zde důkaz prvního z nich, druhý by se dokázal analogicky a doporučujeme ho čtenáři jako domácí cvičení.

Důkaz. $\omega \in \overline{\bigcup\limits_{n=1,2,..} A_n} \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup\limits_{n=1,2,..} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \omega \notin A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \omega \in \overline{A_n} \Leftrightarrow \omega \in \bigcap\limits_{n=1,2,..} \overline{A}_n.$

$\square$

Věta 3.5. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole. Pak platí*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \emptyset \in \mathcal{A} & \\
(2) & A_1, A_2 \in \mathcal{A} & \Rightarrow \; A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} \\
 & & \; A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A} \\
 & & \; A_1 - A_2 \in \mathcal{A} \\
(3) & A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} & \Rightarrow \; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}
\end{array}
$$

Důkaz.

(1) V definici jevového pole z vlastností (i) a (ii) dostáváme: $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{A}$.

(2) Nechť $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Sjednocení: pro $n \geq 3$ položíme $A_n = \emptyset$, takže pro $n = 1, 2, \dots$ platí $A_n \in \mathcal{A}$. Z definice jevového pole z vlastnosti (iii) dostáváme: $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Průnik: $A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1 \cap A_2}} = \overline{\underbrace{\overline{A_1}}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\overline{A_2}}_{\in \mathcal{A}}} \in \mathcal{A}$.

Rozdíl: $A_1 - A_2 = \underbrace{A_1}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\overline{A_2}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$.

(3) Nechť $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$, pak s využitím de Morg. pravidel dostaneme:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\overline{A_n}}_{\in \mathcal{A}}} \in \mathcal{A}$$

□

4. Posloupnosti jevů a jejich limity

Definice 4.1. **Horní limitou** posloupnosti jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme množinu všech $\omega \in \Omega$, které patří do nekonečně mnoha množin A_n. Označujeme $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n$.

Dolní limitu posloupnosti jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujeme jako množinu všech $\omega \in \Omega$, které patří do všech množin A_n s výjimkou konečného počtu těchto množin. Označujeme $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n$.

Poznámka 4.2. Z definice je zřejmě vidět, že platí $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$.

Věta 4.3. *Platí*

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \liminf\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\
(2) & \limsup\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\
(3) & \overline{\limsup\limits_{n \to \infty} A_n} = \liminf\limits_{n \to \infty} \overline{A_n}
\end{array}
$$

Důkaz.

(1) Jestliže $\omega \in \liminf\limits_{n \to \infty} A_n$, pak patří do každé A_n s vyjímkou konečného počtu $A_n \Leftrightarrow \exists\, n$ takové, že $\omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

(2) Jestliže $\omega \in \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$, pak patří do nekonečně mnoha $A_n \Leftrightarrow$ pro $\forall\, n\ \exists\, k \geq n$ takové, že $\omega \in A_k \Leftrightarrow$ pro $\forall\, n$ platí $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

(3) $\omega \in \overline{\limsup_{n\to\infty} A_n} \Leftrightarrow$ neplatí, že ω patří do nekonečně mnoha $A_n \Leftrightarrow$ neplatí, že pro $\forall\, n\ \exists\, k \geq n$ takové, že $\omega \in A_k \Leftrightarrow \exists\, n\ \forall k \geq n\ \omega \notin A_k \Leftrightarrow \exists\, n\ \forall k \geq n\ \omega \in \overline{A_k} \Leftrightarrow \exists\, n\ \omega \in \bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} \Leftrightarrow$ $\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \overline{A_k} = \liminf_{n\to\infty} \overline{A_n}$.

□

Poznámka 4.4. (Motivace)
Uveďme ještě trochu jiný pohled na vztahy v předchozí větě, který by mohl mít spíše motivační charakter. Konkrétně sledujme vztah (1). Označme $I_n = \inf\{A_k; k \in \{n, n+1, n+2, \dots\}\} = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Zřejmě platí $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ a můžeme psát $\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} I_n = \sup_{n\in\{1,2,\dots\}} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

Definice 4.5. Limita posloupnosti jevů. Řekneme, že posloupnost náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** A, právě když

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

Věta 4.6. *Pokud existuje limita posloupnosti náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, pak $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že limita existuje, pak $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$. □

Věta 4.7. *(1) Je-li $A_n \subseteq A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $\Rightarrow$ $\exists\, A = \lim_{n\to\infty} A_n$ a platí $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

(2) Je-li $A_n \supseteq A_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ $\Rightarrow$ $\exists\, A = \lim_{n\to\infty} A_n$ a platí $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Důkaz. Chceme–li dokázat, že existuje příslušná limita, musíme prokázat, že horní i dolní limita se rovná.

(1) Nechť $A_n \subseteq A_{n+1}$.

(a) **Horní limita**: $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Označme $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. S využitím vztahu $B_1 = B_2 = \dots = B_n = B_{n+1} = \cdots$ upravujme

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n = B_1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_1 = B_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

(b) **Dolní limita**: $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Označme $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. S využitím vztahu $C_n = A_n$ upravujme

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{C_n = A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Protože horní i dolní limity jsou shodné, platí první tvrzení věty.

(2) Nechť $A_n \supseteq A_{n+1}$.

(a) **Horní limita**: $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Označme $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. S využitím vztahů $B_1 = A_1, B_2 = A_2, \dots, B_n = A_n, B_{n+1} = A_{n+1}, \dots$ upravujme

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{B_n = A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

(b) **Dolní limita**: $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Označme $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. S využitím vztahu $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = C_{n+1} = \cdots$ upravujme

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{C_n = C_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_1 = C_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Protože i v tomto případě horní i dolní limity jsou shodné, platí i druhé tvrzení věty.

□

5. Borelovské množiny

Věta 5.1. *Nechť $\mathcal{S}$ je systém podmnožin Ω. Pak existuje množinová σ–algebra $\sigma(\mathcal{S})$ taková, že platí*

(1) $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$

(2) Je-li $\mathcal{A}^*$ množinová σ–algebra taková, že $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^*$, pak $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}^*$.

Důkaz. Položme $\sigma(\mathcal{S})$ jako průnik množinových σ–algeber obsahujících $\mathcal{S}$. Pak samozřejmě $\mathcal{S} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ a $\sigma(\mathcal{S})$ je σ–algebra, neboť axiomy platí pro každý prvek průniku, tedy i pro průnik. □

Definice 5.2. Množinová σ–algebra $\sigma(\mathcal{S})$ z předchozí věty se nazývá **minimální množinová σ–algebra generovaná (systémem) $\mathcal{S}$**.

Poznámka 5.3. Borelovské množiny.

Položme $\Omega = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
$\mathcal{S}_x = \{(-\infty, x\rangle; \quad x \in \mathbb{R}\}, \mathcal{S}_x \subseteq 2^{\Omega} = 2^{\mathbb{R}}$.

Podle předchozí věty existuje minimální množinová σ–algebra

$$\sigma(\mathcal{S}_x) = \mathcal{B}$$

generovaná systémem intervalů $(-\infty, x\rangle;\ x \in \mathbb{R}$. Nazveme ji **borelovskou množinovou σ–algebrou v $\mathbb{R}$**. Její prvky se nazývají **borelovské množiny**.

Analogicky lze definovat **borelovskou množinovou σ–algebru v $\mathbb{R}^n$** $\mathcal{B}^n = \sigma(\mathcal{S}_x)$:
$\Omega = \mathbb{R}^n$
$\mathcal{S}_{\mathbf{x}} = \{(-\infty, x_1\rangle \times (-\infty, x_2\rangle; \times \cdots \times (-\infty, x_n\rangle; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}, \mathcal{S}_{\mathbf{x}} \subseteq 2^{\Omega} = 2^{\mathbb{R}^n}$.

6. Definice pravděpodobnostního prostoru

Definice 6.1. Axiomatická definice pravděpodobnosti. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole a P je množinová funkce definovaná na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi

(1) $P(\Omega) = 1$ (tj. P je ***normovaná***)

(2) pro $\forall\, A \in \mathcal{A}$ je $P(A) \geq 0$ (tj. P je ***nezáporná***)

(3) je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$posloupnost náhodných jevů, které jsou po dvou neslučitelné, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, pak $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ (tj. P je $\sigma-$***aditivní***)

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** a trojici $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **pravděpodobnostním prostorem**.

Příklad 6.2. (Příklady různých definicí pravděpodobnosti)

(1) Konečná množina Ω:

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ konečná množina elementárních jevů

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ $\mathcal{A}$ je systém všech podmnožin množiny Ω

P pravděpodobnost libovolného jevu $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \in \mathcal{A}$ je rovna $P(A) = \sum\limits_{j=1}^{k} P(\omega_{i_j})$, přitom platí $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$.

Jestliže platí $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ mluvíme o klasickém pravděpodobnostním pokusu, ve kterém platí

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde $|A|$ značí počet elementárních jevů v A.

(2) Váhová definice pravděpodobnosti:

$\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ spočetná množina elementárních jevů

$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ $\mathcal{A}$ je systém všech podmnožin množiny Ω

P pravděpodobnost libovolného jevu $A = \{\omega_{i_j}\}_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ je rovna $P(A) = \sum\limits_{\omega_{i_j} \in A} P(\omega_{i_j}) = \sum\limits_{\omega_{i_j} \in A} p_{i_j}$, přitom platí $\sum\limits_{\omega_{i_j} \in \Omega} p_{i_j} = 1$.

(3) Geometrická definice pravděpodobnosti:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ borelovská podmnožina

$\mathcal{A} = \mathcal{B}^n(\Omega)$ $\mathcal{A}$ je nejmenší borelovská $\sigma-$algebra nad Ω

P pravděpodobnost jevu A je rovna $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, kde Lebesgueova míra μ je konečná a kladná.

7. Vlastnosti pravděpodobnosti

Věta 7.1. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Pak pravděpodobnost P má následující vlastnosti:*

(1) $P(\emptyset) = 0$

(2) $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(B - A) = P(B) - P(A)$

(4) $\quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$

(5) $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

(6) $\quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(7) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(8) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j)$
$$+ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots$$
$$\cdots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

(9) $\quad \Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$

Důkaz.

(1) Protože jevy jistý Ω a nemožný $\emptyset$ jsou neslučitelné, můžeme upravovat

$$\underbrace{1 = P(\Omega)}_{axiom\ (1)\ def.psti} = \underbrace{P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots) = \overbrace{P(\Omega)}^{=1} + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots}_{axiom\ (3)\ definice\ pravděpodobnosti} \quad \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0.$$

(2) Předpokládejme, že $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset$. Uvažujme posloupnost po dvou neslučitelných jevů: $A, B, \emptyset, \emptyset, \ldots$. Pak s využitím axiomů (3) definice pravděpodobnosti můžeme upravovat

$$P(A \cup B) = P(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots) = P(A) + P(B) + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \underbrace{P(\emptyset)}_{=0} + \cdots = P(A) + P(B).$$

(3) Předpokládejme, že $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B$. Pak můžeme psát:

$B = \underbrace{A \cup (B - A)}_{neslučitelné\ jevy}$, takže s využitím předchozí vlastnosti (2) dostaneme

$$P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \quad \Rightarrow \quad P(B - A) = P(B) - P(A).$$

(4) Analogicky jako v předchozím případě dostaneme

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \quad \Rightarrow \quad P(A) = P(B) - \underbrace{P(B - A)}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B).$$

(5) Předpokládejme, že $A \in \mathcal{A}$. Pokud $A = \emptyset$ nebo $A = \Omega$, tvrzení zřejmě platí.
Proto uvažujme
$$\emptyset \subset A \subset \Omega.$$
S využitím předchozí vlastnosti (4) dostaneme
$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1.$

(6) Jestliže $A \in \mathcal{A}$, pak také $\overline{A} = \Omega - A \in \mathcal{A}$. Pokud $A = \emptyset$ nebo $A = \Omega$, tvrzení zřejmě platí.
Proto uvažujme
$$\emptyset \subset A \subset \Omega.$$
Díky tomu, že $A \subset \Omega$ a vlastnosti (3), dostaneme
$P(\overline{A}) = P(\Omega - A) \overset{vl.(3)}{=} P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A).$

(7) Jestliže $A, B \in \mathcal{A}$, pak jejich sjednocení lze vyjádřit jako sjednocení tří neslučitelných jevů, tj.
$$A \cup B = \underbrace{(A - (A \cap B))}_{1.jev} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{2.jev} \cup \underbrace{(B - (A \cap B))}_{3.jev},$$
takže pravděpodobnost
$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P\left((A - (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B - (A \cap B))\right) \\
&= P\left(A - (A \cap B)\right) + P\left(A \cap B\right) + P\left(B - (A \cap B)\right) \\
&= \underbrace{P(A) - P(A \cap B)}_{1.\ \check{c}len} + \underbrace{P(A \cap B)}_{2.\ \check{c}len} + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{3.\ \check{c}len} \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

(8) Dokážeme matematickou indukcí z předchozí vlastnosti.

(9) Jestliže $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, pak díky vlastnosti (7) postupně dostaneme
$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + P(A_n) - \underbrace{P\left(A_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)}_{\geq 0} \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{n-2} A_i\right) + P(A_{n-1}) - \underbrace{P\left(A_{n-1} \cap \bigcup_{i=1}^{n-2} A_i\right)}_{\geq 0} + P(A_n) - \underbrace{P\left(A_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)}_{\geq 0} \\
&\vdots \\
&= P(A_1) + \cdots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \cdots - P\left(A_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)
\end{aligned}$$
a odtud již dostáváme tvrzení věty, že $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

$\square$

Věta 7.2. Spojitost pravděpodobnosti. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je jevové pole, P reálná množinová funkce definovaná na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi:*

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) *pro* $\forall\, A \in \mathcal{A} : P(A) \geq 0$

(iii) $A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *(aditivita, ne σ-aditivita)*

*pak následující vlastnosti jsou **ekvivalentní***

(1) P je pravděpodobnost na $(\Omega, \mathcal{A})$.

*(2) spojitost pravděpodobnosti **zdola**:*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1} \qquad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

*(3) spojitost pravděpodobnosti **shora**:*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1} \qquad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$$

*(4) spojitost pravděpodobnosti **shora v nule**:*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1},\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \qquad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Důkaz.

(1)⇒(2) Nejprve dokážeme, že pravděpodobnost P je spojitá zdola.

Předpokládejme, že P je pravděpodobnost a mějme posloupnost náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $A_n \subseteq A_{n+1}$.

Položme $B_1 = A_1,\ B_n = A_n - A_{n-1}$ pro $n \geq 2$, takže $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ a přitom $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$. S využitím vztahu $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ postupně upravujme:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{ax(3)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{[P(A_1) + P(A_2 - A_1) + \cdots + P(A_n - A_{n-1})]}_{=P(A_n)}. \end{aligned}$$

(2)⇒(3) Předpokládejme, že P je spojitá zdola. Dokážeme, že je spojitá i shora.

Nechť pro posloupnost náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $A_n \supseteq A_{n+1}$.

Protože $\overline{A}_n \in \mathcal{A}$, pak pro posloupnost opačných náhodných jevů $\{\overline{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $\overline{A}_n \subseteq \overline{A}_{n+1}$. Díky předpokladu a de Morg. pravidlům

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right) = P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

takže

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - P(\overline{A}_n)\right] = 1 - \left[1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right] = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(3)⇒(4) Předpokládejme, že P je spojitá shora. Dokážeme pak, že je spojitá shora i v nule.

Nechť pro posloupnost náhodných jevů $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $A_n \supseteq A_{n+1}$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, pak podle předchozí implikace $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$, neboť $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

(4)⇒(1) Předpokládejme, že P je spojitá shora v nule. Ukážeme, že P splňující vlastnosti (i), (ii) a (iii) je pravděpodobnost.

Jediná vlastnost, která v tomto výčtu vlastností chybí, je σ–aditivita:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i), \quad \text{kde} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j.$$

Mějme n lib., pevně. Ozn. $Z_{n+1} = \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} B_i$. Pak $Z_n \supseteq Z_{n+1}$ a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z_n = \emptyset$, neboť $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Z_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} B_i = \limsup\limits_{n\to\infty} B_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ patří do nekonečně mnoha } B_i\} = \emptyset$, protože B_i jsou po dvou disjunktní.

Protože podle předpokladu je P spojitá shora v nule, tak platí $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n) = 0$.

Nyní využijeme aditivitu množinové funkce P a pro $n \geq 2$ počítejme

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= \lim_{n\to\infty} P(B_1 \cup \cdots \cup B_n \cup Z_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} P(B_i) + P(Z_{n+1})\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(B_i) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} P(Z_{n+1})}_{=0} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i). \end{aligned}$$

□

Věta 7.3. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $A_n \in \mathcal{A}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a existuje limita A_n. Pak platí $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.*

Důkaz. Připomeňe, že limita existuje, pokud existuje horní i dolní limita a rovnají se, tj.

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k}_{ozn. B_n} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{ozn. C_n}.$$

Díky vztahům $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k = B_n \subseteq B_{n+1} = \bigcap\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k$ a $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = C_n \supseteq C_{n+1} = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} A_k$ dostaneme

$$\begin{aligned} &P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{V7.2,(2)}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \liminf_{n\to\infty} P(B_n) \stackrel{B_n\subseteq A_n}{\leq} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \stackrel{A_n\subseteq C_n}{\leq} \limsup_{n\to\infty} P(C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) \stackrel{V7.2,(3)}{=} \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

Protože první a poslední člen se rovnají, všude platí rovnost, takže i

$$\liminf_{n\to\infty} P(A_n) = \limsup_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

a díky tomu i tvrzení věty. □

Věta 7.4. Cantelliho lemma. *(též Borelovo-Cantelliho lemma). Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náhodných jevů na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ taková, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, pak $P(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) = 0$.*

Důkaz. Nejprve vyjádřeme

$$P(\limsup_{n=\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

S využitím faktu, že

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = C_n \supseteq C_{n+1} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$$

je klesající posloupnost náhodných jevů, můžeme upravovat

$$\begin{aligned}0 \quad &\leq \quad P(\limsup_{n=\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} P(C_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)}_{\overset{V.7.1,vl(9)}{\leq} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)} \\ &\leq \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\end{aligned}$$

Protože

$$Z_n = \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$$

je zbytek konvergentní řady, neboť předpokládáme, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

pak musí platit

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

□

Příklad 7.5. I když ještě neznáme pojem „náhodná veličina“, uvedeme motivační příklad pro lepší pochopení předchozí věty.
Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost náhodných veličin, pro které platí $P(X_n = 0) = \frac{1}{n^2}$ a označme A_n jev $X_n = 0$ (přesněji $A_n = \{\omega \in \Omega;\ X_n(\omega) = 0\}$). Zkoumáme pravděpodobnost, že jev A_n nastane pro nekonečně mnoho n. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ je konvergentní, neboť $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6} < \infty$. Je tedy splněn předpoklad pro Cantelliho lemma, které říká, že pro nekonečně mnoho n nastane jev A_n s pravděpodobností 0. Naopak, téměř jistě (s pravděpodobností 1) je $X_n \neq 0$ pro všechny konečné n-tice.

KAPITOLA 2

Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost

1. Motivační příklad

Mějme urnu s a **černými** a b **bílými** koulemi. Dvakrát táhneme bez vracení po jedné kouli.

Zajímá nás pravděpodobnost, s jakou ve **druhém tahu** vytáhneme **bílou** kouli, za předpokladu, že také v **prvním** tahu jsme vytáhli **bílou** kouli.

Nejprve označme *náhodné jevy* $B_1 \dots$ v 1. tahu jsme vytáhli **bílou** kouli
$B_2 \dots$ v 2. tahu jsme vytáhli **bílou** kouli

Z **klasické definice** pravděpodobnosti plyne, že $P(B_1) = \frac{b}{a+b}$. Obdobně, v situaci, kdy jsme už vytáhli v 1. tahu bílou kouli, další bílou kouli vytáhneme s pravděpodobností

$$P(B_2|B_1) = \frac{b-1}{a+b-1},$$

protože pro 2. tah je k dispozici pouze $b-1$ **bílých** a a **černých** koulí.

Označení $P(B_2|B_1)$ jsme použili pro PODMÍNĚNOU PRAVDĚPODOBNOST náhodného jevu B_2 za podmínky výskytu náhodného jevu B_1.

Kromě toho je pravděpodobnost průniku náhodných jevů $B_1 \cap B_2$ rovna

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1},$$

neboť příznivých jevů je $b(b-1)$ a všech možných výsledků dvou tahů je:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 2 & \cdots & b-1 & 1 & \cdots & a & \\
1 & (b_{i_1}, b_{i_2}) & (b_{i_1}, b_{i_3}) & \cdots & (b_{i_1}, b_{i_b}) & (b_{i_2}, c_{j_1}) & \cdots & (b_{i_1}, c_{j_a}) & \\
2 & (b_{i_2}, b_{i_1}) & (b_{i_2}, b_{i_3}) & \cdots & (b_{i_2}, b_{i_b}) & (b_{i_2}, c_{j_1}) & \cdots & (b_{i_2}, c_{j_a}) & \text{jev } B_1 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
b & (b_{i_b}, b_{i_1}) & (b_{i_b}, b_{i_2}) & \cdots & (b_{i_b}, b_{i_{b-1}}) & (b_{i_b}, c_{j_1}) & \cdots & (b_{i_b}, c_{j_a}) & \\
1 & (c_{j_1}, b_{i_1}) & (c_{j_1}, b_{i_2}) & \cdots & (c_{j_1}, b_{i_b}) & (c_{j_1}, c_{j_2}) & \cdots & (c_{j_1}, c_{j_a}) & \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a & (c_{j_a}, b_{i_1}) & (c_{j_a}, b_{i_2}) & \cdots & (c_{j_a}, b_{i_b}) & (c_{j_a}, c_{j_1}) & \cdots & (c_{j_a}, c_{j_{a-1}}) & \\
 & 1 & 2 & \cdots & b & 1 & \cdots & a-1 & \\
 & & \text{jev } B_2 & & & & & &
\end{array}$$

takže všech možných jevů je

$$b(b-1+a) + a(b+a-1) = b^2 - b + ba + ab + a^2 - a = (a+b)(a+b-1).$$

Podmíněnou pravděpodobnost lze zapsat i takto

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1}}{\frac{b}{a+b}} = \frac{b-1}{a+b-1}$$

Tedy z Ω jsme přešli na B_1 a z náhodného jevu B_2 bereme jen ty, které jsou také v B_1.

2. Definice a vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

Definice 2.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $B \in \mathcal{A}$, $P(B) > 0$. Pak číslo

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

nazýváme **podmíněnou pravděpodobností jevu** A **za podmínky** (že nastal jev) B.

Poznámka 2.2. Z předchozí definice ihned vyplývá, že pravděpodobnost průniku náhodných jevů lze vyjádřit $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ a přitom se předpokládá, že $P(B) > 0$. Ukážeme, že tento vztah platí i v případě, že $P(B) = 0$.
Nejprve je třeba si uvědomit, že $A \cap B \subseteq B$. Je-li tedy $P(B) = 0$, pak $P(A \cap B) = 0$.
Zcela symetricky platí také $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$.

Značení: Mějme pevně daný náhodný jev $B \in \mathcal{A}$, pro který platí $P(B) > 0$. Označme

$$P_B : \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle : P_B(A) = P(A|B)$$

Věta 2.3. *P_B je pravděpodobnost na $(\Omega, \mathcal{A})$ pro každé $B \in \mathcal{A}$, pro které $P(B) > 0$.*

Důkaz. Je-li P_B je pravděpodobnost na $(\Omega, \mathcal{A})$, musí být normovaná, nezáporná a σ-aditivní.

(1) **Normovanost** $P_B(\Omega) = \frac{P(B\cap\Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$

(2) **Nezápornost** $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \geq 0$ pro $\forall\, A \in \mathcal{A}$.

(3) **σ-aditivita** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost po dvou neslučitelných náhodných jevů

$$P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n\cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$$

□

Věta 2.4. *Platí*

(1) $P(A|\Omega) = P(A)$ *pro* $\forall\, A \in \mathcal{A}$.

(2) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

pro $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$ *(Věta o násobení pravděpodobností)*

Důkaz.

(1) $P(A|\Omega) = \frac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{P(\Omega)} = P(A)$ pro $\forall\, A \in \mathcal{A}$.

(2)
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_n \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) \overset{pozn. 2.2}{=} P\left(A_n \Big| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}_{pozn. 2.2}$$

$$= P\left(A_n \Big| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_{n-1} \Big| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right)}_{pozn. 2.2} = \cdots$$

$$= P\left(A_n \Big| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) P\left(A_{n-1} \Big| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \cdot \cdots \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$$

□

DEFINICE 2.5. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Náhodné jevy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$ tvoří **úplný systém jevů** na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jestliže platí

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ pro } i \neq j, \text{ a } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega.$$

VĚTA 2.6. (VZOREC PRO ÚPLNOU PRAVDĚPODOBNOST). *Nechť posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří úplný systém jevů na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ takový, že $P(A_i) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Pak platí*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B|A_i).$$

Důkaz.

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) \overset{pozn.2.2}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B|A_i)$$

□

VĚTA 2.7. (BAYESŮV VZOREC). *Nechť posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří úplný systém jevů na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ takový, že $P(A_i) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots$ a $B \in \mathcal{A}$, kde $P(B) > 0$. Pak*

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j) P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Důkaz. S využitím poznámky 2.2 a vzorce pro úplnou pravděpodobnost můžeme upravovat

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{\overbrace{P(A_j) P(B|A_j)}^{pozn.2.2}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(B|A_i)}_{\text{úpl.pst}(V2.6)}}.$$

□

VĚTA 2.8. (BAYESŮV VZOREC – MODIFIKACE). *Nechť posloupnost $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří úplný systém jevů na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ takový, že $P(A_i) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots$, $A \in \mathcal{A}$, kde $P(A) > 0$ a $B \in \mathcal{A}$. Pak*

$$P(B|A) = \frac{\sum_{\{i: P(A \cap A_i) > 0\}} P(A_i) P(A|A_i) P(B|A \cap A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) P(A|A_i)}.$$

Důkaz. Využitím předchozích vztahů lze lehce dospět k tvrzení (zkuste jako domácí cvičení).

□

<u>TERMINOLOGIE:</u> A_j $\cdots$ *hypotézy*, $j = 1, 2, \ldots$
$P(A_j)$ $\cdots$ *apriorní pravděpodobnost*
$P(A_j|B)$ $\cdots$ *aposteriorní pravděpodobnost*

Poznámka 2.9. Bayesův vzorec se používá v případě, jestliže:

- Máme úplný systém hypotéz $A_1, \ldots, A_n$, které se navzájem vylučují a vyčerpávají všechny možnosti.
- Přitom známe jejich apriorní pravděpodobnosti $P(A_i)$.
- Nastal jev B a navíc známe podmíněné pravděpodobnosti $P(B|A_i)$.
- Co nás především zajímá, jsou nové aposteriorní pravděpodobnosti $P(A_i|B)$, které berou v úvahu, že nastal jev B.

Příklad 2.10. (Lékařská diagnostika).

Je známo, že nějakou konkrétní nemocí, označme ji $\mathcal{D}$ (*disease*), trpí 1% populace. Nemoc je diagnostikována na základě vyšetření, jehož spolehlivost je 95%, jestliže vyšetřovaná osoba trpí nemocí $\mathcal{D}$, a je 70%, pokud nemocí $\mathcal{D}$ netrpí. Vyšetřujeme náhodně zvolenou osobu. Určete pravděpodobnost správné diagnózy, pokud byl výsledek (a) pozitivní, (b) negativní.

Řešení: Označme jev A $\cdots$ vyšetřované osoba **trpí** chorobou $\mathcal{D}$
jev B $\cdots$ výsledek vyšetření je **pozitivní**

Ze zadání známe: *apriorní pravděpodobnost* $P(A) = 0.01$, což je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba má danou nemoc $\mathcal{D}$, říká se jí *prevalence* nemoci.

Spolehlivost vyšetření se popisuje pomocí dvou charakteristik:

- pro **pozitivní** výsledek $P(B|A) = 0.95 \ldots$ tzv. *senzitivita* testu
- pro **negativní** výsledek $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.7 \ldots$ tzv. *specificita* testu

(a) Určíme *aposteriorní* pravděpodobnost správné diagnózy, pokud byl výsledek **pozitivní**, tj. spočítáme podmíněnou pravděpodobnost $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Nejprve vypočítáme

$$P(B)=P(B\cap\Omega) = P(B\cap(A\cup\bar{A})) = P(\underbrace{(B\cap A)\cup(B\cap\bar{A})}_{\text{neslučitelné jevy}}) = P(\underbrace{B\cap A}_{pozn.2.2}) + P(\underbrace{B\cap\bar{A}}_{pozn.2.2})$$

$$=P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=0.01\cdot 0.95 + (1-0.01)\cdot(1-0.7) = \underbrace{0.0095}_{=P(A\cap B)} + \underbrace{0.297}_{=P(\bar{A}\cap B)} = 0.3065$$

Nakonec dosadíme $P(A|B) = \frac{P(A\cap B}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.0095}{0.3065} = 0.030995$ tj. 3.1%, což je překvapivý výsledek, čekali jsme o mnoho lepší. Většina lidí bez zaváhání odpoví, že by mělo být 95%, neboť taková je přece spolehlivost vyšetření pro pozitivního jedince.

Vysvětleme si podrobně, co značí aposteriorní pravděpodobnost správného určení diagnózy, když výsledek testu byl pozitivní.

Je třeba si uvědomit, že uvažujeme náhodně vybraného jedince. Pravděpodobnost, že má danou chorobu, je dána prevalencí, a ta činí 1%. Naproti tomu 99% nemocí netrpí. Mezi těmi, kteří nemocí trpí, dává test s 95% správný (tj. pozitivní) výsledek, (senzitivita testu). Mezi těmi, kteří nemocí netrpí, dává test s 70% správný (tj. negativní) výsledek (specificita testu), takže pozitivní (nesprávný) výsledek s 30%.

(b) Naprosto analogicky dostaneme

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})+P(A)P(\bar{B}|A)} = \frac{(1-0.01)\cdot 0.7}{(1-0.01)\cdot 0.7+0.01\cdot(1-0.95)} = \frac{0.693}{0.693+0.0005}$$

$$=\frac{0.693}{0.6935} = 0.99928.$$

Na konkrétním příkladu s 100 000 jedinci si ukážeme, proč vyšla pravděpodobnost správného výsledku při pozitivním testu tak malá a pravděpodobnost správného výsledku při negativním testu tak vysoká.

	A ... nemoc má *prevalence*= 0.01	$\bar{A}$ ... nemoc nemá	celkem	
	1 000	99 000	100 000	
B ... test je pozitivní	*senzitivita*= 0.95 950	29 700	30 650	$P(A\|B)=\frac{950}{30\ 650}$ =0.030995
$\bar{B}$ ... test je negativní	50	*specificita*= 0.7 69 300	69 350	$P(\bar{A}\|\bar{B})=\frac{69\ 300}{69\ 350}$ =0.99928

3. Nezávislost náhodných jevů

Velmi důležitým pojmem je nezávislost. Intuitivně cítíme, že jevy A a B jsou nezávislé, pokud hodnota pravděpodobnosti podmíněného jevu bude rovna nepodmíněné pravděpodobnosti, tj.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \text{ a } P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B).$$

Odtud pak vychází následující definice nezávislosti.

Definice 3.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Pak řekneme, že jev $A \in \mathcal{A}$ a jev $B \in \mathcal{A}$ jsou **nezávislé** (vzhledem k pravděpodobnosti P), jestliže

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Věta 3.2.

(a) Libovolný náhodný jev $A \in \mathcal{A}$ a jev ***jistý*** *jsou* ***nezávislé****.*

(b) Libovolný náhodný jev $A \in \mathcal{A}$ a jev ***nemožný*** *jsou* ***nezávislé****.*

(c) Nechť $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{A}$ jsou ***nezávislé*** *jevy. Pak také A a $\bar{B}$, $\bar{A}$ a B, $\bar{A}$ a $\bar{B}$ jsou* ***nezávislé****.*

Důkaz.

(a) $P(\Omega) = 1 \ \wedge \ P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A) \cdot P(\Omega)$

(b) $P(\emptyset) = 0 \ \wedge \ P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot P(\emptyset)$

(c) Nechť $A, B \in \mathcal{A} \ \wedge \ P(A \cap B) = P(A)P(B)$, počítejme

$$\begin{aligned}
P(A \cap \bar{B}) &= P(A \cap (\Omega - B)) = P((A \cap \Omega) - (A \cap B)) = P(A - \underbrace{(A \cap B)}_{\subseteq A}) \\
&= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\
&= P(A)P(\bar{B})
\end{aligned}$$

Analogicky dokážeme i ostatní tvrzení.

□

Definice 3.3. (Skupinová (sdružená) nezávislost). Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor a $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Řekneme, že náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou **skupinově (sdruženě) nezávislé**, jestliže pro libovolné $k \in \{1, \dots, n\}$ a libovolnou množinu indexů $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Nechť $M = \{A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathcal{J}\}$, kde $\mathcal{J}$ je daná indexová množina (i nekonečná). Řekneme, že náhodné jevy systému M jsou **nezávislé**, jestliže pro každou konečnou množinu indexů $\{i_1, \dots, i_n\}$, kde $i_j \in \mathcal{J}, j = 1, \dots, n$ platí

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j})$$

Příklad 3.4. Dvakrát házíme kostkou.
Uvažujme následující jevy $A \dots$ v 1. hodu padne sudé číslo
$B \dots$ v 2. hodu padne liché číslo
$C \dots$ v obou hodech padne číslo stejné parity
Protože platí

$$\begin{aligned} P(A) &= \tfrac{3\cdot 6}{36} = \tfrac{1}{2} & P(A\cap B) &= \tfrac{3\cdot 3}{36} = \tfrac{1}{4} = P(A)P(B) \\ P(B) &= \tfrac{6\cdot 3}{36} = \tfrac{1}{2} & P(A\cap C) &= \tfrac{3\cdot 3}{36} = \tfrac{1}{4} = P(A)P(C) \\ P(C) &= \tfrac{3\cdot 3+3\cdot 3}{36} = \tfrac{1}{2} & P(A\cap B\cap C) &= \tfrac{0}{36} = 0 \neq P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

jsou jevy A, B a C **po dvou nezávislé**, ale **ne skupinově nezávislé**.

Poznámka 3.5. Zřejmě platí: jsou-li jevy $A_1, \dots, A_n$ nezávislé, jsou i skupinově nezávislé.

Věta 3.6.

(a) Libovolná podmnožina skupinově nezávislých náhodných jevů je množinou nezávislých náhodných jevů.

(b) Jestliže v dané množině nezávislých náhodných jevů nahradíme libovolný počet jevů jevy opačnými, opět dostaneme množinu nezávislých náhodných jevů.

(c) Jestliže $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé náhodné jevy, pak

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)).$$

Důkaz. (a) i (b) zřejmé.

(c) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)).$ □

Věta 3.7. (Borelovo lemma). *Nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou nezávislé jevy. Pak $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) =$ $0 \vee 1$ podle toho, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ **konverguje** nebo **diverguje**.*

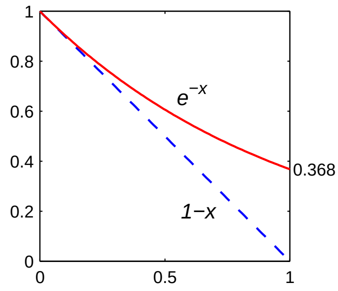
Důkaz.

(a) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ **konverguje**, pak podle Cantelliho lemmatu (V.7.4), které dokonce nepožaduje ani nezávislost náhodných jevů, platí $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ **diverguje**. Protože $P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$, označme nejprve $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supseteq B_{n+1} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$ a upravujme

$$
\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{V7.2,(3)}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left(\overline{\bigcap_{k=n}^{N} \bar{A}_k}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \bar{A}_k\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N} P(\bar{A}_k) = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k)) \\
&\geq 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)} = 1 - 0 = 1.
\end{aligned}
$$

Pro $x \in (0,1)$ platí
$|\ln(1-x)| \geq x$, tj.
$\ln(1-x) \leq -x$
$1 - x \leq e^{-x}$



$\square$

KAPITOLA 3

Náhodné veličiny a náhodné vektory

1. Náhodná veličina

Pro popis náhodného pokusu bylo zavedeno jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$. Velmi často je výsledek pokusu $\omega \in \Omega$ značně komplexní entita, zatímco nás mohou zajímat jen některé jeho numerické vlastnosti, běžně označované $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$.

DEFINICE 1.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je takové zobrazení, že pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$ platí

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x\rangle) \in \mathcal{A}$$

Pak X nazýváme **náhodnou veličinou** (vzhledem k jevovému poli $(\Omega, \mathcal{A})$).

Poznámka 1.2. X je náhodná veličina $\Leftrightarrow$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pro $\forall$ borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$.

Poznámka 1.3. Jestliže pro každou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ platí $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, říkáme, že X je **borelovsky měřitelná** vzhledem k $\mathcal{A}$. Tento fakt se značí $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Příklad 1.4. Uvažujme experiment, při kterém házíme homogenní hrací kostkou. Experiment má 6 různých stejně pravděpodobných výsledků, takže $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Uvažujme jevové pole $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}\}$.

Pro dále definované funkce $X(\omega)$ a $Y(\omega)$ zjistíme, zda jde o náhodné veličiny na daném jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{padne číslo } > 3, \\ 0 & \text{padne číslo } \leq 3 \end{cases}$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & x < 0, \\ \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{A} & 0 \leq x < 1 \\ \Omega \in \mathcal{A} & x \geq 1 \end{cases}$$

X **je** náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A})$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{padne sudé číslo,} \\ 0 & \text{padne liché číslo.} \end{cases}$$

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{A} & x < 0, \\ \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \notin \mathcal{A} & 0 \leq x < 1 \\ \Omega \in \mathcal{A} & x \geq 1 \end{cases}$$

Y **není** náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A})$

ZNAČENÍ:

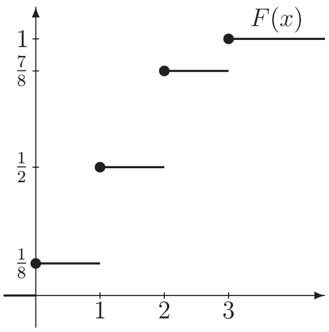
$$\begin{aligned} \{X \leq x\} &= \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \\ P(X \leq x) &= P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) \\ P(X \in B) &= P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}\right) \\ P(X \in B_1 \cap B_2) &= P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_1\} \cap \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B_2\}\right) \end{aligned}$$

2. Distribuční funkce

Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny lze popsat pomocí distribuční funkce.

Definice 2.1. Nechť X je náhodná veličina definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak funkci $F(x) = F_X(x) = P(X \leq x)$, kde $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **distribuční funkcí** náhodné veličiny X.

Příklad 2.2. 3 nezávislé hody mincí.
Množina elementárních jevů má $2^3 = 8$ prvků:
$\Omega = \{\omega_1 = (L, L, L), \omega_2 = (L, L, R), \omega_3 = (L, R, L), \omega_4 = (R, L, L), \omega_5 = (R, R, L), \omega_6 = (R, L, R), \omega_7 = (L, R, R), \omega_8 = (R, R, R)\}$. Jako σ-algebru zvolme nejpodrobnější $\mathcal{A} = 2^\Omega$.
Definujme náhodnou veličinu X je počet líců ve třech hodech. Pak $X \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Distribuční funkce pak má tvar



$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(\emptyset) = 0 && x < 0\\
&= P(X = 0) = \tfrac{1}{8} && 0 \leq x < 1\\
&= P(X = 0 \vee 1) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} = \tfrac{1}{2} && 1 \leq x < 2\\
&= P(X = 0 \vee 1 \vee 2) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} = +\tfrac{7}{8} && 2 \leq x < 3\\
&= P(X = 0 \vee 1 \vee 2 \vee 3) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} = 1 && x > 3
\end{aligned}
$$

Věta 2.3. *Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak*

(1) F je neklesající.

(2) F je zprava spojitá.

(3) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ a $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

(4) $0 \leq F(x) \leq 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(5) $P(X = x) = F(x) - \lim_{y\to x^-} F(y)$.

(6) F má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

(7) $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ pro $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$.

Důkaz.

(7) Mějme $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. S využitím vztahu $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\}$ upravujme

$$
\begin{aligned}
P(x_1 < X \leq x_2) &= P(\{X \leq x_2\} - \{X \leq x_1\}) \overset{V.7.1,(3)}{=} P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)\\
&= F(x_2) - F(x_1)
\end{aligned}
$$

(1) Je-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, pak $F(x_2) - F(x_1) \overset{(7)}{=} P(x_1 < X \leq x_2) \geq 0 \Rightarrow F$ je neklesající.

(2) F je zprava spojitá $\Leftrightarrow$ pro $\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots \geq x_0$, (tj. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$) je $\{X \leq x_1\}, \ldots, \{X \leq x_n\}, \ldots, \{X \leq x_0\}$ je klesající posloupnost jevů a

$\{X \leq x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}$, takže s využitím spojitosti pravděpodobnosti shora

$$
\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) \overset{V.7.2,(3)}{=} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq x_n\}\right) = P(\{X \leq x_0\}) = F(x_0).
$$

(3) Mějme **rostoucí** posl. reálných čísel $x_1 < x_2 \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$, tj.

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \infty,
$$

takže existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=1}^{n}\{X\le x_k\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\le x_n\}=\Omega$$

a platí

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}P(X\le x_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X\le x_n\}\right)=P(\Omega)=1\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}F(x)=1.$$

Analogicky mějme **klesající** posl. reálných čísel

$$x_1>x_2\cdots>x_n>x_{n+1}>\cdots$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty,$$

takže existuje limita $\lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{k=1}^{n}\{X\le x_k\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{X\le x_n\}=\emptyset$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=\lim_{n\to\infty}P(X\le x_n)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X\le x_n\}\right)=P(\emptyset)=0\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to-\infty}F(x)=0.$$

(4) Důkaz nerovnosti

$$0\le F(x)\le 1\quad\text{pro}\quad x\in\mathbb{R}$$

je zřejmý, neboť distribuční funkce je definována pomocí pravděpodobnosti.

(5) Pro libovolné, ale pevné $x\in\mathbb{R}$ mějme **rostoucí** posl. reálných čísel

$$x_1<x_2\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots\ \text{takovou, že}\ \lim_{n\to\infty}x_n=x,$$

pak posloupnost náhodných jevů $\{x_n<X\le x\}$ je klesající posloupností a existuje limita

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n<X\le x\}=\{X=x\}$$

a platí

$$\begin{aligned}P(X=x)&=\lim_{n\to\infty}P(x_n<X\le x)=\lim_{n\to\infty}[F(x)-F(x_n)]\\&=F(x)-\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x)-\lim_{y\to x^-}F(y).\end{aligned}$$

(6) Na závěr dokážeme, že F má nanejvýš spočetně mnoho bodů nespojitosti. Víme, že pro $\forall\, x\in\mathbb{R}$ platí

$$0\le F(x)\le 1.$$

Označme symbolem C_n množinu bodů, ve kterých má F skok $\ge\frac{1}{n}$, tj.

$$C_n=\{x\in\mathbb{R}:F(x)-\lim_{y\to x^-}F(y)=P(X=x)\ge\tfrac{1}{n}\}.$$

Protože pravděpodobnost jakéhokoliv jevu leží v intervalu $\langle 0,1\rangle$, může mít množina C_n nanejvýš n prvků.

Označme S množinu všech bodů, kde má funkce F skok, tj.

$$S=\{x\in\mathbb{R}:F\text{ má v bodě }x\text{ nějaký skok}\}.$$

Pak $S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ a jde o spočetné sjednocení konečných množin, takže S je nejvýše spočetná.

□

Poznámka 2.4. Lebesgueova – Stieltjesova míra

Mějme funkci $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je (a) neklesající,
(b) zprava spojitá.

Označme $\mathcal{R}$ množinu všech konečných sjednocení po dvou disjunktních polouzavřených intervalů typu $(a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Jde o množinový okruh.

Na tomto množinovém okruhu se definuje **aditivní míra** $\mu_F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ pro každé $A \in \mathcal{R}$, kde

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i\rangle,\ a_i < b_i \text{ a } (a_i, b_i\rangle \cap (a_j, b_j\rangle = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$

předpisem

$$\mu_F(A) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} [F(b_i) - F(a_i)].$$

Dále můžeme aditivní míru μ_F definovanou na okruhu $\mathcal{R}$ konečných sjednocení disjunktních polouzavřených intervalů rozšířit na minimální množinový σ-okruh $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{R})$ generovaný okruhem $\mathcal{R}$, kdy pro každý prvek $A \in \mathcal{B}$ takový, že

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i\rangle,\ a_i < b_i \text{ a } (a_i, b_i\rangle \cap (a_j, b_j\rangle = \emptyset \text{ pro } i \neq j$$

definujeme σ-aditivní míru $\mu_F : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\mu_F(A) = \mu_F\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)].$$

Takto získaná σ-aditivní míra μ_F na borelovském σ-okruhu $\mathcal{B}$ se nazývá **Lebesgueova – Stieltjesova míra** indukovaná funkcí F. Jestliže $F(x) = x$, jde o **Lebesgueovu míru**. Dá se ukázat, že pokud navíc platí $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ a $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, pak μ_F je pravděpodobnost na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Definice 2.5. Rozdělení pravděpodobností. *Nechť X je náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a F je její distribuční funkce. Pak množinová funkce P_X definovaná vztahem $P_X(A) = P(X \in A)$, kde $A \in \mathcal{A}$, nazýváme* ***rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny** X.*

Poznámka 2.6.

(1) Mějme polouzavřený interval $B = (a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak

$$P_X(B) = P(X \in B) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \mu_F((a, b\rangle).$$

(2) Dále uvažujme borelovskou množinu $A \in \mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i\rangle$, tvořenou disjunktními polouzavřenými intervaly, pak

$$P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} [F(b_i) - F(a_i)] = \mu_F(A).$$

Tedy $P_X \leftrightarrow \mu_F \leftrightarrow F$, takže pomocí distribuční funkce lze jednoznačně popsat rozdělení pravděpodobností $P_X(B) = P(X \in B)$ pro každou $B \in \mathcal{B}$. Z teorie integrálu pak pro každou $B \in \mathcal{B}$ lze psát

$$\begin{aligned} P_X(B) = \mu_F(B) &= \int_B d\mu_F && \cdots \text{ Lebesgueův – Stieltjesův integrál} \\ &= \int_B dF(x) && \cdots \text{ jiné značení} \end{aligned}$$

Věta 2.7. *Nechť* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesající, zprava spojitá funkce, pro kterou platí* $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1$ *a* $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$. *Pak existuje pravděpodobnostní prostor a na něm náhodná veličina* X *taková, že* $G(x)$ *je její distribuční funkce.*

Důkaz. Uvažujeme-li $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, pak $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ je jevové pole.

Položme $X(\omega) = \omega$ pro každé $\omega \in \Omega$. V tom případě pro každé $x \in \mathbb{R}$ dostaneme, že množina $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = (-\infty, x\rangle \in \mathcal{B}$ je jevem, takže X je náhodná veličina.

Dále pro každé $B \in \mathcal{B}$ položme $P(B) = \mu_G(B)$. Pak z vlastností Lebesgueovy – Stieltjesovy míry plyne, že jde o pravděpodobnost.

Počítejme distribuční funkci nově vytvořené náhodné veličiny X:

$$F(x) = P(X \leq x) = P((-\infty, x\rangle) = \mu_G(B) = \mu_G((-\infty, x\rangle) = G(x)$$

a tím jsme větu dokázali. $\square$

3. Náhodné veličiny diskrétního typu

V praxi se často setkáváme s náhodnými veličinami, které nabývají například pouze celočíselných hodnot, nebo mohou nabýt pouze hodnot z nějaké nejvýše spočetné množiny.

Definice 3.1. Řekneme, že náhodná veličina X je **diskrétního typu**, pokud existuje nejvýše spočetná množina $M \subset \mathbb{R}$ taková, že platí $P_X(M) = 1$.

Poznámka 3.2. Mějme nejvýše spočetnou množinu $M \subset \mathbb{R}$ takovou, že $P_X(M) = 1$. Počítejme

$$P_X(M) = P(X \in M) = P\left(\bigcup_{x\in M} \{X = x\}\right) = \sum_{x\in M} P(X = x) = 1$$

Definice 3.3. Nechť X je diskrétní náhodná veličina. Pak funkci $p(x) = P(X = x)$, $x \in M$, nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** diskrétní náhodné veličiny X a množinu M **oborem hodnot** X.

Značení: Fakt, že jde o diskrétní náhodnou veličinu budeme značit $X \sim (M, p)$.

Poznámka 3.4. Pravděpodobnostní funkci lze definovat pro všechna reálná čísla, když položíme $p(x) = 0$ pro $x \notin M$.

Věta 3.5. (Vlastnosti pravděpodobnostní funkce). *Nechť* $X \sim (M, p)$. *Pak*

(1) $p(x) \geq 0$ *pro* $\forall\, x \in \mathbb{R}$ *a* $\sum_{x\in M} p(x) = 1$.

(2) $P(X \in B) = \sum_{x\in M\cap B} p(x)$ *pro libovolné* $B \in \mathcal{B}$.

(3) $F(x) = \sum_{t\leq x} p(t)$ *pro* $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

(4) $p(x) = F(x) - \lim_{y\to x^-} F(y)$ *pro* $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

(1) $p(x) = P(X = x) \geq 0$; $\sum_{x\in M} p(x) = \sum_{x\in M} P(X = x) = P\left(\bigcup_{x\in M} \{X = x\}\right) = P_X(M) = 1$

(2) Pro libovolné $B \in \mathcal{B}$ počítejme

$$\begin{aligned} P(X \in B) &= P\underbrace{\left(\{X \in M \cap B\} \cup \{X \in \bar{M} \cap B\}\right)}_{\text{neslučitelné jevy}} = P\left(\{X \in M \cap B\}\right) + \underbrace{P\left(\{X \in \bar{M} \cap B\}\right)}_{=0} \\ &= P\left(\bigcup_{x\in M\cap B} \{X = x\}\right) = \sum_{x\in M\cap B} P(X = x) = \sum_{x\in M\cap B} p(x) \end{aligned}$$

(3) Je-li $B = (-\infty, x\rangle$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, pak

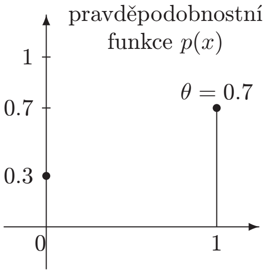
$$F(x) = P(X \leq x) = P(X \in B) = \sum_{t\in B\cap M} p(t) = \sum_{t\in(-\infty,x\rangle\cap M} p(t) = \sum_{t\leq x} p(t).$$

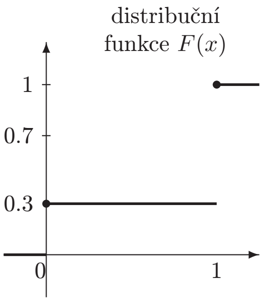
(4) $p(x) = P(X = x) \overset{V.2.3,(5)}{=} F(x) - \lim_{y\to x^-} F(y)$ pro $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

□

4. Příklady diskrétních rozdělení

Příklad 4.1. ALTERNATIVNÍ ROZDĚLENÍ.





Uvažujme náhodný pokus, který může skončit s pravděpodobností $\theta \in (0,1)$ „úspěchem" a s pravděpodobností $1-\theta$ „neúspěchem". Prostor elementárních jevů má proto dva prvky $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, σ-algebra náhodných jevů má tvar $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$ a pravděpodobnost $P(\emptyset) = 0$, $P(\omega_1) = 1-\theta$, $P(\omega_2) = \theta$ a $P(\Omega) = 1$.
Náhodná veličina je definována takto: $X(\omega_1) = 0$ (neúspěch),
$X(\omega_2) = 1$ (úspěch).
Jde o diskrétní náhodnou veličinu s definičním oborem $M = \{0,1\}$ a pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} \theta & x = 1 \\ 1-\theta & x = 0 \\ 0 & jinak \end{cases} = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & x = 0,1 \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Náhodnou veličinu značíme $X \sim A(\theta)$.

Vidíme, že popis náhodného pokusu prostřednictvím náhodného prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je nepraktický, mnohem názornější je popis pomocí náhodné veličiny a pravděpodobnostní funkce.

Poznámka 4.2. Konečná, popř. nekonečná posloupnost nezávislých alternativních pokusů typu úspěch/neúspěch s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0,1)$ pro všechny pokusy se nazývá (konečná, resp. nekonečná) **bernoulliovská posloupnost** pokusů.

Příklad 4.3. BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ.

Uvažujme konečnou bernoulliovskou posloupnost délky n s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0,1)$. Nechť X je náhodná veličina udávající **počet úspěchů v n pokusech**.

Abychom mohli odvodit pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny, označme A_i jev, že v i-tém pokusu nastal úspěch.
Pak počítejme pro $x \in M$

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P(\underbrace{(A_1 \cap \cdots \cap A_x \cap \bar{A}_{x+1} \cap \cdots \cap \bar{A}_n) \cup \cdots \cup (\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-x} \cap A_{n-x+1} \cap \cdots \cap A_n)}_{\text{neslučitelné jevy}}) \\ &= P(\underbrace{A_1 \cap \cdots \cap A_x \cap \bar{A}_{x+1} \cap \cdots \cap \bar{A}_n}_{\text{nezávislé jevy}}) + \cdots + P(\underbrace{\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{n-x} \cap A_{n-x+1} \cap \cdots \cap A_n}_{\text{nezávislé jevy}}) \\ &= \underbrace{\underbrace{P(A_1) \cdots P(A_x)}_{=\theta^x} \underbrace{P(\bar{A}_{x+1}) \cdots P(\bar{A}_n)}_{=(1-\theta)^{n-x}} + \cdots + \underbrace{P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_{n-x})}_{=(1-\theta)^{n-x}} \underbrace{P(A_{n-x+1}) \cdots P(A_n)}_{=\theta^x}}_{\binom{n}{x} \text{ členů}} \\ &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \end{aligned}$$

Takže obor hodnot náhodné veličiny X má tvar

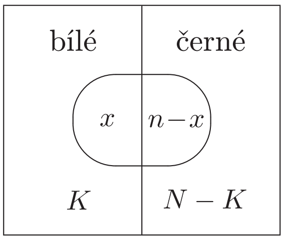
$$M = \{0, 1, \ldots, n\}$$

a pravděpodobnostní funkce

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} & x = 0, 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N}, \ \theta \in (0,1) \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Náhodnou veličinu značíme $X \sim Bi(n, \theta)$.

Příklad 4.4. Hypergeometrické rozdělení.



vybráno bez vracení n koulí

Mějme	celkem	N	koulí, $(N \geq 2)$
	z toho	K	**bílých**, $(K < N)$
		$N-K$	**černých**.

Náhodně vybereme **bez vracení** n koulí.

Nechť náhodná veličina X značí **počet bílých koulí mezi** n **vybranými**.

Označíme-li symbolem x konkrétní počet bílých koulí mezi n vybranými, pak musí platit

$$\begin{array}{llll} \text{pro } \textbf{bílé} & \text{koule} & 0 \leq x \leq K & \Rightarrow\ x \geq 0 \\ \text{pro } \textbf{černé} & \text{koule} & 0 \leq n-x \leq N-K & \Rightarrow\ x \geq n-N+K \end{array} \Rightarrow\ x \geq \max(0, n-N+K),$$

tím jsme získali **dolní** hranici oboru hodnot.

$$\text{Přitom mohou nastat dva případy:}\quad \begin{array}{l} n \leq K\ \Rightarrow\ x \leq n \\ n > K\ \Rightarrow\ x \leq K \end{array}\ \Rightarrow\ x \leq \min(n, K)$$

což je **horní** hranice oboru hodnot. Takže $M = \{\max(0, n-N+K), \ldots, \min(n, K)\}$.

S využitím faktů, že

- počet všech množných n-tic z celkového počtu N koulí ... $\binom{N}{n}$
- počet všech možných x-tic bílých koulí mezi K bílými koulemi ... $\binom{K}{x}$
- počet všech možných $(n-x)$-tic černých koulí mezi $N-K$ černými koulemi ... $\binom{N-K}{n-x}$

pravděpodobnostní funkce má tvar

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} & x \in \{\max(0, n-N+K), \ldots, \min(n, K)\} \\ 0 & jinak \end{cases} \quad \text{a značíme } \boxed{X \sim Hg(N, K, n)}.$$

Poznámka 4.5. Fakt, že při výběru n koulí tyto koule nevracíme, hraje podstatnou roli. Pokud bychom koule **vraceli**, lze snadno ukázat, že jde o náhodnou veličinu s binomickým rozdělením $Bi\left(n, \frac{K}{N}\right)$, neboť jde o bernoulliovskou posloupnost n nezávislých pokusů, ve kterých s pravděpodobností $\theta = \frac{K}{N}$ vytáhneme bílou kouli.

Poznámka 4.6. Dále jestliže $N, K \to \infty$ tak, že $\lim\limits_{N,K\to\infty} \frac{K}{N} = \theta \in (0,1)$, pak

$$X \sim Hg(N, K, n)\ \to\ Bi(n, \theta),$$

tj. hypergeometrické rozdělení konverguje k binomickému rozdělení, což dokážeme díky tomu, že

$$\binom{K}{x} = \frac{\overbrace{K(K-1)\cdots(K-x+1)}^{x \text{ členů}}}{x\,(x-1)\cdots\quad 1}, \quad \binom{N-K}{n-x} = \frac{\overbrace{(N-K)(N-K-1)\cdots(N-K-n+x+1)}^{n-x \text{ členů}}}{(n-x)\ \ (n-x-1)\cdots\quad 1} \text{ a}$$

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \underbrace{\frac{N(N-1)\cdots(N-x+1)}{n\,(n-1)\cdots(n-x+1)}}_{x \text{ členů}} \cdot \underbrace{\frac{(N-x)(N-x-1)\cdots(N-n+1)}{(n-x)\,(n-x-1)\cdots\quad 1}}_{n-x \text{ členů}}, \text{ takže limita}$$

$$\lim_{N,K\to\infty} \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \lim_{N,K\to\infty} \underbrace{\frac{n!}{x!(n-x)!}}_{=\binom{n}{x}} \overbrace{\underbrace{\frac{K}{N}}_{\to\theta}\ \underbrace{\frac{K-1}{N-1}}_{\to\theta} \cdots \underbrace{\frac{K-x+1}{N-x+1}}_{\to\theta}}^{x \text{ členů, tj. konverguje k } \theta^x} \cdot \overbrace{\underbrace{\frac{N-K}{N-x}}_{\to(1-\theta)}\ \underbrace{\frac{N-K-1}{N-x-1}}_{\to(1-\theta)} \cdots \underbrace{\frac{N-K-n+x+1}{N-n+1}}_{\to(1-\theta)}}^{(n-x) \text{ členů, tj. konverguje k } (1-\theta)^{n-x}}$$

$= \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$, což je pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení.

Tento výsledek lze komentovat tak, že pokud taháme z obrovských souborů, příliš nezáleží na tom, zda po tahu vybranou věc vracíme či nevracíme.

Příklad 4.7. POISSONOVO ROZDĚLENÍ.

Jestliže $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a pravděpodobnostní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0 \\ 0 & jinak \end{cases}, \text{ pak značíme } \boxed{X \sim Po(\lambda)}.$$

Poissonovo rozdělení popisuje výskyt řídkých jevů za určitou jednotku času, prostoru apod. Jako příklad můžeme uvést

- počet organismů v jednotce půdy
- počet listí na stromech
- počet havárií za časovou jednotku (den, týden, měsíc, rok, ...)
- počet hovorů v telefonní síti za časovou jednotku

Poznámka 4.8. Poissonovo rozdělení je limitním rozdělením pro binomické rozdělení. Jestliže $X_n \sim Bi(n, \theta_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_n = \lambda > 0$, pak nejprve označme $n\theta_n = \lambda_n$, tedy $\theta_n = \frac{\lambda_n}{n}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Nyní počítejme limitu

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(X_n = x) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-x} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n^x}{x!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdots \underbrace{\frac{n-x+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-x}}_{\to 1} \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \qquad \ldots \qquad \text{pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení} \end{aligned}$$

Příklad 4.9. GEOMETRICKÉ ROZDĚLENÍ.

Uvažujme nekonečnou bernoulliovskou posloupnost s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0, 1)$. Nechť X je náhodná veličina udávající **počet neúspěchů před prvním úspěchem**. Definiční obor náhodné veličiny je roven $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Nejprve označme A_i jev, že v i-tém pokusu nastal úspěch a počítejme pro $x \in M$

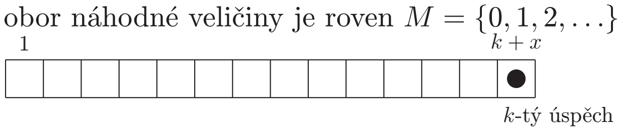
$$P(X = x) = P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_x \cap A_{x+1}) = (1-\theta)^x \theta.$$

Pravděpodobnostní funkce je pak tvaru

$$p(x) = \begin{cases} (1-\theta)^x \theta & x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \theta \in (0, 1) \\ 0 & jinak \end{cases} \text{ a značíme } \boxed{X \sim Ge(\theta)}$$

Příklad 4.10. NEGATIVNĚ BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ.

Uvažujme opět nekonečnou bernoulliovskou posloupnost s pravděpodobností úspěchu $\theta \in (0, 1)$. Nechť X je náhodná veličina udávající **počet neúspěchů před k-tým úspěchem**. Definiční obor náhodné veličiny je roven $M = \{0, 1, 2, \ldots\}$.



rozmístit $(k-1)$ **úspěchů** do $(k-1+x)$ pozic lze $\binom{k-1+x}{k-1}$ způsoby, stejně jako rozmístit do daných pozic x **neúspěchů**, tj. $\binom{k-1+x}{k-1} = \binom{k-1+x}{x}$

$$p(x) = \begin{cases} \binom{k-1+x}{k-1} \theta^k (1-\theta)^x & x = 0, 1, 2, \ldots, \\ = \binom{k-1+x}{x} \theta^k (1-\theta)^x & \theta \in (0, 1) \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Značíme $\boxed{X \sim NeBi(k, \theta)}$

Vidíme, že pro $k = 1$ je geometrické rozdělení speciálním případem negativně binomického.

V některých publikacích se negativně binomické rozdělení také označuje jako **Pascalovo**.

5. Náhodné veličiny absolutně spojitého typu

Než zavedeme pojem absolutně spojité náhodné veličiny, připomeneme některé pojmy a bez důkazů i vlastnosti z matematické analýzy, které se týkají absolutně spojitých funkcí.

5.1. Absolutní spojitost a její vlastnosti.

Definice 5.1. Funkce $F(x)$ je **absolutně spojitá (na $\mathbb{R}$)**, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$ takové, že pro každou posloupnost reálných čísel $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$ takovou, že $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$ platí $\sum\limits_{i=1}^{n}|F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$.

Věta 5.2. Vlastnosti absolutně spojité funkce.

(1) Jestliže F je absolutně spojitá, tak je i spojitá.

(2) Jestliže F je absolutně spojitá, tak má skoro všude (s.v.) vzhledem k Lebesgueově míře ***vlastní derivaci****. Tato derivace je* ***integrovatelná*** *v Lebesguově smyslu a platí*

$$F(x) = \int\limits_a^x F'(t)dt + F(a) \qquad \text{pro každé } a \in \mathbb{R}.$$

(3) Jestliže F je absolutně spojitá a platí $F'(x) = 0$ skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře), potom je F ***konstantní*** *skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře).*

(4) Je-li F ***neurčitým integrálem funkce*** *f v Lebesgueově smyslu, tj. $F(x) = \int f(x)dx$, pak je F* ***absolutně spojitá*** *a platí $F'(x) = f(x)$ skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře).*

(5) Jestliže F je absolutně spojitá, pak má na každém konečném intervalu $\langle a, b\rangle$ ***konečnou variaci****, tj. $\bigvee\limits_a^b(F) = \sup\limits_{D_n} \sum\limits_{i=1}^{n}|F(x_i) - F(x_{i-1})|$, přičemž suprémum se bere přes všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna možná dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ $D_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.*

5.2. Definice absolutně spojité náhodné veličiny.

Definice 5.3. Řekneme, že náhodná veličina X definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je **absolutně spojitého typu**, jestliže existuje **nezáporná integrovatelná funkce** f taková, že rozdělení pravděpodobností

$$P_X(B) = \int\limits_B f(x)dx \qquad \text{pro každé} \qquad B \in \mathcal{B}.$$

Funkci f nazýváme **hustotou rozdělení pravděpodobností** náhodné veličiny X absolutně spojitého typu, stručněji f je hustotou X.

Věta 5.4. Vlastnosti hustoty. *Nechť X je náhodná veličina absolutně spojitého typu, f její hustota a F její distribuční funkce. Pak*

(1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

(3) F je absolutně spojitá funkce.

(4) Hustota f je určena skoro všude jednoznačně vzhledem k Lebesgueově míře, tj. jsou-li f a g hustoty náhodné veličiny X, pak $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, kde μ je Lebesgueova míra.

(5) Existuje F' skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře a funkce $g(x) = F'(x)$ je hustotou náhodné veličiny X.

(6) Pro každé $a < b$ platí $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$

a také $P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(\le X \le b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$

(7) Existuje-li v bodě x derivace $F'(x)$, pak $P\left(x - \frac{h}{2} < X \le x + \frac{h}{2}\right) = hf(x) + o(h)$, *kde funkce „malé o" je taková, že* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

Důkaz.

(1) Je-li f hustota náhodné veličiny X, pak podle definice $P_X(B) = \int\limits_B f(x)dx$ pro $\forall B \in \mathcal{B}$. Položme

$B = \mathbb{R}$ a počítejme $P_X(B) = P_X(\mathbb{R}) = 1 = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$

(2) Víme, že $F(x) \stackrel{def}{=} P(X \le x) = P_X((-\infty, x\rangle) \stackrel{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

(3) Protože platí $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, kde f je integrovatelná funkce, pak protože F je integrálem integrovatelné funkce, je F absolutně spojitá (viz V.5.2 (4)).

(4) Předpokládejme, že f a g jsou hustoty náhodné veličiny X, tj. pro $\forall\, B \in \mathcal{B}$ platí

$P_X(B) = \int\limits_B f(x)dx = \int\limits_B g(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int\limits_B [f(x) - g(x)]dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\{x : f(x) \ne g(x)\}\right) = 0,$

kde μ je Lebesgueova míra.

(5) viz vlastnost (2) absolutně spojité funkce – V.5.2.

(6) $P(a < X \le b) \stackrel{V.2.3,(7)}{=} F(b) - F(a) \stackrel{(2)}{=} \int\limits_a^b f(x)dx.$

Dále víme, že platí (viz V.2.3,vl.(5)) $P(X = x) = F(x) - \lim\limits_{y\to x^-} F(y).$

Protože distribuční funkce je absolutně spojitá, tak je také spojitá v každém bodě, takže platí

$$\lim_{y\to x^-} F(y) = F(x) \quad \Rightarrow \quad P(X = x) = 0$$

a odtud již plyne, že

$$P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(\le X \le b) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

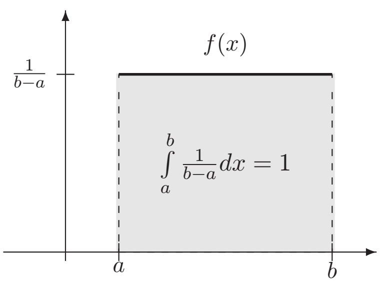
(7) Existuje-li v bodě x derivace $F'(x)$, pak můžeme psát

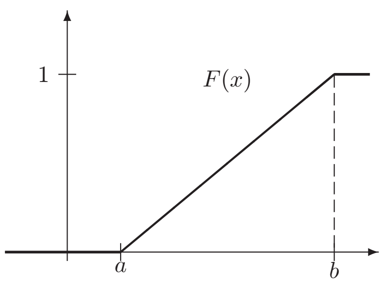
$$f(x) = F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F\left(x+\frac{h}{2}\right) - F\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P\left(x-\frac{h}{2} < X \le x+\frac{h}{2}\right)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h}.$$

□

6. Příklady spojitých rozdělení

Příklad 6.1. Rovnoměrné rozdělení.





$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b),\ a < b, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a,b),\ a < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Značíme $X \sim Ro(a,b)$.

Vidíme, že rovnoměrné rozdělení má ve všech bodech daného intervalu (a, b) konstantní hustotu. Přitom podle věty 5.4, vlastnost (6), z pravděpodobnostního hlediska nezáleží na tom, zda přidáme či odebereme krajní body, tyto hustoty se liší v bodech míry nula.

Interpretace tohoto rozdělení je jednoduchá, jistota (jednotková pravděpodobnost) je na intervalu (a, b) rovnoměrně „rozprostřena".

Náhodnou veličinou s rovnoměrným rozdělením je např. chyba při zaokrouhlování. Například zaokrouhlujeme-li na k desetinných míst, pak chyba $X \sim Ro\left(-5 \cdot 10^{-k-1}, 5 \cdot 10^{-k-1}\right)$.

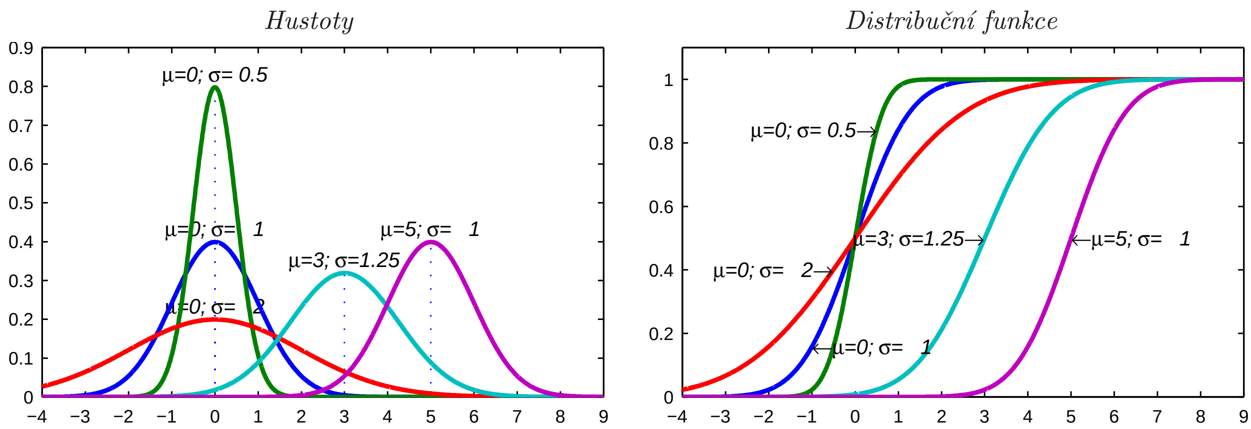
Příklad 6.2. Normální (Gaussovo) rozdělení.

Toto spojité rozdělení hraje centrální roli, neboť, jako uvidíme později, za určitých okolností dobře aproximuje celou řadu spojitých i diskrétních rozdělení.

$$\begin{array}{rclll} f(x) & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} & x \in \mathbb{R}, ; \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0 & \text{značíme} \quad \boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}. \\ \varphi(u) & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} & u \in \mathbb{R} & \text{značíme} \quad \boxed{U \sim N(0, 1)}. \end{array}$$

Hustota $\varphi(u)$ je hustotou tzv. **standardizovaného normálního rozdělení**. Bývá zvykem značit její distribuční funkci jako $\Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \varphi(t)dt$.

Distribuční funkci normálního rozdělení $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, lze ji však zapsat pomocí mocninných řad.



Nejběžnějším typem normálních (gaussovských) veličin jsou náhodné chyby (chyby měření, způsobené velkým počtem neznámých a vzájemně nezávislých příčin). Proto se normálnímu rozdělení někdy říká rozdělení chyb.

Rovněž mnohé náhodné veličiny jako jsou například hmotnost balíčku s moukou plněného automatem, tělesná výška či délka končetin (homogenní populace) a celá řada dalších fyzikálních a technických veličin.

Příklad 6.3. Exponenciální rozdělení.
Nechť náhodný jev A se vyskytuje v náhodných okamžicích (např. přerušení výroby, vyhoření žárovky, porucha přístroje, atd.) a předpokládáme, že výskyty tohoto jevu v nepřekrývajících se intervalech jsou nezávislé. Označme

$Q(t)$ ... pravděpodobnost, že jev A **nenastane** v průběhu časového intervalu délky t.

Jestliže t_1, t_2 jsou délky dvou na sebe navazujících intervalů, pak tedy platí

$$Q(t_1 + t_2) = Q(t_1)Q(t_2). \tag{3.6.1}$$

Nechť Q je diferencovatelná funkce času a pro $t = 0$ nabývá svého maxima, tj. $Q(0) = 1$.
Pro $t > 0$, $\triangle t > 0$ platí dle (3.6.1)

$$\ln Q(t + \Delta t) = \ln Q(t) + \ln Q(\Delta t),$$

tj. pro $t > 0$ je

$$
\begin{aligned}
(\ln Q(t))' &= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\ln Q(t+\Delta t) - \ln Q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\ln Q(\Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{\ln Q(0+\Delta t) - \ln Q(0)}{\Delta t} = [\ln Q(t)]'_{t=0} = -\lambda.
\end{aligned}
$$

Jde o derivaci zprava, kterou označíme λ, přičemž $\lambda > 0$. Řešíme tedy diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\frac{d \ln Q(t)}{dt} = -\lambda, \quad Q(0) = 1.$$

Jejím řešením je $Q(t) = e^{-\lambda t}$. Označme

X ... náhodná veličina udávající čas, kdy poprvé nastane sledovaný jev A.

Zřejmě

$$F(t) = P(X \le t) = P(\text{jev } A \text{ nastane v čase } (0, t\rangle) = 1 - Q(t),$$

tedy

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Hustotu $f(x)$ získáme derivováním distribuční funkce

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Řekneme, že X má exponenciální rozdělení s parametrem λ a značíme $X \sim Ex(\lambda)$. Toto rozdělení je speciálním případem Gamma rozdělení, viz Příklad 6.4.

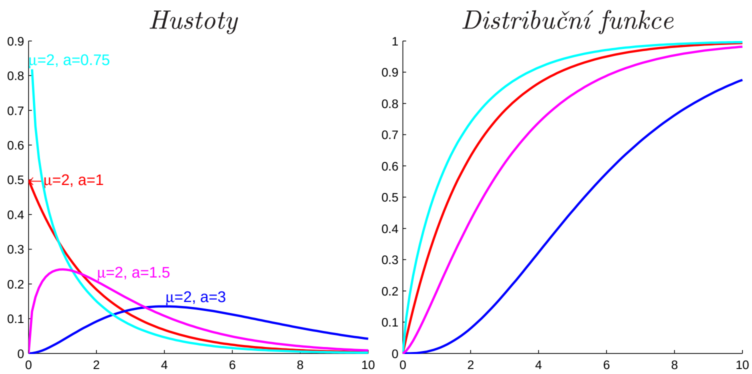
<u>Příklad</u> 6.4. Gamma rozdělení.

Jestliže náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\mu}} & a > 0, x \ge 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases} \qquad \text{značíme} \qquad X \sim Gamma(\mu, a)$$

Speciální případy: $a = 1$ exponenciální rozdělení

$a = n \in N$ Erlangovo rozdělení



Funkce Γ je pro $a > 0$ definována předpisem $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$.

Její nejčastěji používané vlastnosti jsou

$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$,
$\Gamma(1/2) = \pi$
$\Gamma(n) = (n-1)!$ pro $n \in \mathbb{N}$

Gamma rozdělení se používá především v teorii spolehlivosti, kdy například exponenciální rozdělení modeluje dobu do poruchy u komponent, které nejsou trvale namáhány, Erlangovo rozdělení se využívá pro popis doby života do n-té poruchy apod.

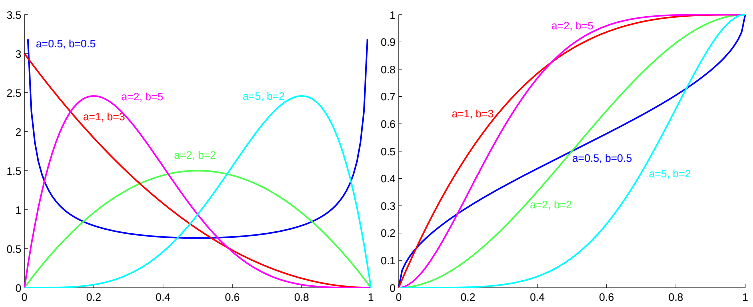
<u>Příklad</u> 6.5. Beta rozdělení.

Jestliže náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} & a, b > 0, x \in \langle 0, 1\rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad \text{značíme} \qquad X \sim Beta(a, b)$$

Speciální případy: $a = 1, \ b = 1$ rovnoměrné rozdělení $Ro(0, 1)$

Hustoty *Distribuční funkce*



Funkce $B(a,b)$ je pro $a,b>0$ definována předpisem

$$B(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\,.$$

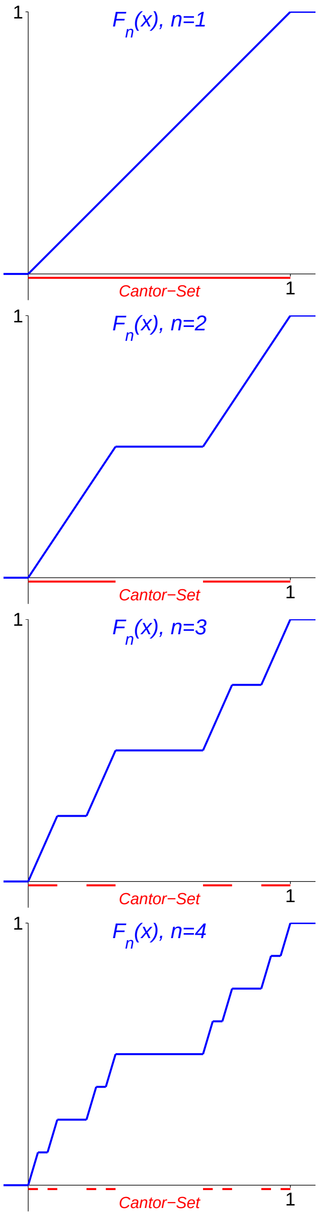
Platí vztah mezi beta a gamma funkcí

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

V souvislosti s předchozími rozděleními se dají ukázat také následující vztahy

$$\lim_{n\to\infty} nBeta(1,n)=Exp(1),$$
$$\lim_{n\to\infty} nBeta(k,n)=Gamma(k,1).$$

7. Singulární rozdělení

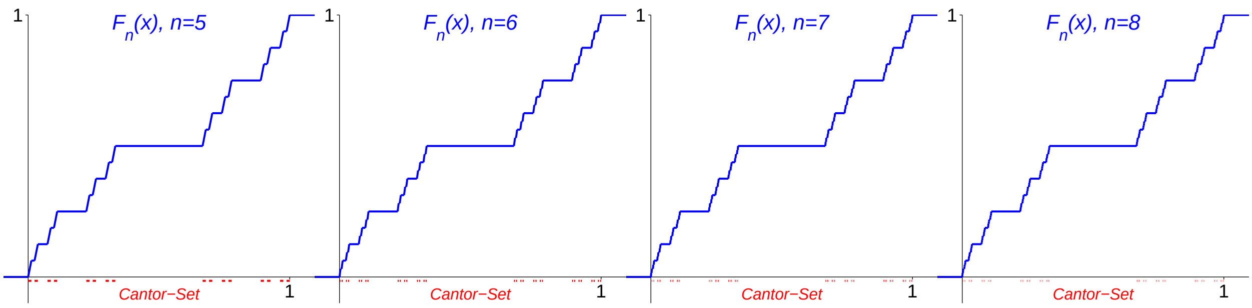


Definice 7.1. Distribuční funkci F, která má skoro všude derivaci rovnu 0 vzhledem k Lebesgueově míře, nazýváme **singulární**, když F je spojitá v $\mathbb{R}$. Odpovídající náhodnou veličinu pak také nazveme **singulární náhodnou veličinou**.

Poznámka 7.2. Je zřejmé, že singulární funkce nemůže být absolutně spojitá. Jestliže absolutně spojitá funkce má (na nějakém intervalu) nulovou derivaci, pak je také (na nějakém intervalu) konstantní.

Příklad 7.3. Cantorova funkce.
Jde o kanonický příklad singulární funkce, která je založena na Cantorově množině. Cantorovu množinu dostaneme tak, že například interval $\langle 0, 1\rangle$ rozdělíme na 3 shodné části a prostřední část vypustíme. Obě okrajové části opět rozdělíme na 3 části a pravidlo o vypouštění středního intervalu aplikujeme do nekonečna, takže místo úvodních několika úseček dostaneme v limitě nekonečně mnoho bodů.

Definujme
$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$
$$\vdots$$
$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x) & 0 \le x < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F_n(3x-2) & \frac{2}{3} \le x < 1 \end{cases}$$
a položíme
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$
tj.
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{1}{2} & x \in \langle \frac{1}{3} \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{4} & x \in \langle \frac{1}{9} \frac{2}{9}) \\ \frac{3}{4} & x \in \langle \frac{7}{9} \frac{8}{9}) \\ \frac{1}{8} & x \in \langle \frac{1}{27} \frac{2}{27}) \\ \vdots & \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



Následující větu uvedeme bez důkazu.

Věta 7.4. *Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$. Pak F lze napsat ve tvaru*
$$F(x) = a_1F_\alpha(x) + a_2F_a(x) + a_3F_s(x)$$
kde
$$a_1, a_2, a_3 \ge 0 \qquad \text{přitom} \qquad a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
a F_α *je distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny*
F_a *absolutně spojité*
F_s *singulární*

8. Náhodné vektory

Definice 8.1. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je takové zobrazení, že pro $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \leq \mathbf{x}\} \in \mathcal{A}.$$

Pak $\mathbf{X}$ nazýváme **n-rozměrným náhodným vektorem**.

Poznámka 8.2. Uvědomme si nejprve, že díky definici n-rozměrného náhodného vektoru platí

$$\begin{array}{ll}
X_1, \ldots, X_n \text{ jsou náhodné veličiny na } (\Omega, \mathcal{A}, P) & \Leftrightarrow \\
\text{pro } \forall\, i = 1, \ldots, n: \quad X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) & \Leftrightarrow \\
\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' : \ (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) & \Leftrightarrow \\
\mathbf{X} \text{ je borelovsky měřitelné zobrazení vzhledem k } \mathcal{A} & \Leftrightarrow \\
\text{pro } \forall\, B \in \mathcal{B}^n \text{ je vzor } \mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A} & \Leftrightarrow \\
\text{pro } \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n \text{ je } \bigcap\limits_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x_i\} \in \mathcal{A}. &
\end{array}$$

Značení: Analogicky jako v jednorozměrném případě zavedeme zjednodušené značení pro **jevy**

$$[X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n] = [X_1 \in B_1 \wedge \ldots \wedge X_n \in B_n] = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in B_i\},$$

podobně zkráceně budeme označovat **pravděpodobnosti** těchto jevů

$$\begin{aligned}
P(\mathbf{X} \in B) = P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \in B_i\}\right) \\
P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x_i\}\right)
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbf{R}^n$ a $B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}^n$.

Poznámka 8.3. Všechny vlastnosti náhodných veličin, které jsou vlastně jednorozměrnými náhodnými vektory, lze velmi jednoduše modifikovat pro n-rozměrný náhodný vektor. Zvlášť si však všimneme vícerozměrné distribuční funkce.

Definice 8.4. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je n-rozměrný náhodný vektor definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom reálnou funkci

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$$

definovanou pro každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ nazveme **distribuční funkcí náhodného vektoru X**.

Značení: zavedeme pro diference funkce F v proměnné x_i s krokem $h \geq 0$ následující značení

$$\Delta_h^{(i)} F(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n),$$

a pokračujme rekurentně

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_j}^{(j)} \Delta_{h_i}^{(i)} F(x_1, \ldots, x_n) &= \Delta_{h_j}^{(j)} \left[\Delta_{h_i}^{(i)} F(x_1, \ldots, x_n)\right] \\
&= \Delta_{h_j}^{(j)} \left[F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_n)\right] \\
&= F(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_j + h_j, \ldots, x_n) - F(x_1, \ldots, x_i + h_i, \ldots, x_n) \\
&\quad - F(x_1, \ldots, x_j + h_j, \ldots, x_n) + F(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \Delta_{h_i}^{(i)} \Delta_{h_j}^{(j)} F(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Věta 8.5. Vlastnosti vícerozměrné distribuční funkce. *Pro distribuční funkci náhodného vektoru* $\mathbf{X}$ *platí*

(1) $F(x_1,\dots,x_n)$ *je* ***neklesající*** *v každé z proměnných* $x_1,\dots,x_n$*, při pevně daných hodnotách ostatních proměnných.*

(2) $F(x_1,\dots,x_n)$ *je* ***zprava spojitá*** *v každé z proměnných* $x_1,\dots,x_n$*, při pevně daných hodnotách ostatních proměnných.*

(3) Pro $\forall\, i=1,\dots,n$ *je* $\lim\limits_{x_i\to-\infty} F(x_1,\dots,x_n)=0$*, tj. vícerozměrná distribuční funkce je nulová, jestliže alespoň jedna z proměnných jde k* $-\infty$*.*

(4) $\lim\limits_{\substack{x_1\to\infty\\ \vdots \\ x_n\to\infty}} F(x_1,\dots,x_n)=1$*, tj. vícerozměrná distribuční funkce je rovna jedné, jestliže všechny proměnné jdou k* ∞*.*

(5) Pro $\forall\,\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$ *a pro* $\forall\, h_i>0,\ i=1,\dots,n$ *je* $\Delta^{(1)}_{h_1}\Delta^{(2)}_{h_2}\dots\Delta^{(n)}_{h_n}F(x_1,\dots,x_n)\ge 0$.

(6) Pro $1\le k\le n$ *a pro* $\forall\, h_i>0$*, kde* $i\in\{i_1,\dots,i_k\}$ *a* $\{j_1,\dots,j_{n-k}\}=\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$*, platí*

$$
\begin{aligned}
&P(x_{i_1}<X_{i_1}\le x_{i_1}+h_{i_1},\dots,x_{i_k}<X_{i_k}\le x_{i_k}+h_{i_k},X_{j_1}\le x_{j_1},\dots,X_{j_{n-k}}\le x_{j_{n-k}})\\
&=P\left(\left[\bigcap_{s=i_1}^{i_k}\{x_s<X_s\le x_s+h_s\}\right]\cap\left[\bigcap_{t=j_1}^{j_{n-k}}\{X_t\le x_t\}\right]\right)=\Delta^{(i_1)}_{h_{i_1}}\dots\Delta^{(i_k)}_{h_{i_k}}F(x_1,\dots,x_n)\ge 0
\end{aligned}
$$

Důkaz. Vlastnosti (1) až (4) lze snadno dokázat jako analogii jednorozměrného případu. Vlastnost (5) plyne z (6), když položíme $k=n$.

(6) Zbývá tedy dokázat poslední vlastnost, a to matematickou indukcí.

(a) Položme $k=1$ a bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $i=1$. Pak pro $h_1>0$ a každé $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)'\in\mathbb{R}^n$ je

$$
\begin{aligned}
\Delta^{(1)}_{h_1}F(x_1,\dots,x_n) &= F(x_1+h_1,x_2,\dots,x_n)-F(x_1,\dots,x_n)\\
&= P(X_1\le x_1+h_1,X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n)-P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n)\\
&\overset{V7.1(3)}{=} P\left([\{X_1\le x_1+h_1\}-\{X_1\le x_1\}]\cap\{X_2\le x_2\}\cap\dots\cap\{X_n\le x_n\}\right)\\
&= P(x_1<X_1\le x_1+h_1,X_2\le x_2,\dots,X_n\le x_n)
\end{aligned}
$$

(b) Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolných $(k-1)$ vybraných indexů $\{i_1,\dots,i_{k-1}\}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\{i_1,\dots,i_{k-1}\}=\{1,\dots,k-1\}$. Pak snadno nahlédneme, že platí následující identity

$$
\begin{aligned}
&\Delta^{(1)}_{h_1}\Delta^{(2)}_{h_2}\dots\Delta^{(k-1)}_{h_{k-1}}\Delta^{(k)}_{h_k}F(x_1,\dots,x_n)=\Delta^{(k)}_{h_k}\left[\Delta^{(1)}_{h_1}\Delta^{(2)}_{h_2}\dots\Delta^{(k-1)}_{h_{k-1}}F(x_1,\dots,x_n)\right]\\
&=\Delta^{(k)}_{h_k}P(x_1<X_1\le x_1+h_1,\dots,x_{k-1}<X_{k-1}\le x_{k-1}+h_{k-1},X_k\le x_k,\dots,X_n\le x_n)\\
&=P(x_1<X_1\le x_1+h_1,\dots,x_{k-1}<X_{k-1}\le x_{k-1}+h_{k-1},X_k\le x_k+h_k,X_{k+1}\le x_{k+1},\dots,X_n\le x_n)\\
&-P(x_1<X_1\le x_1+h_1,\dots,x_{k-1}<X_{k-1}\le x_{k-1}+h_{k-1},X_k\le x_k,X_{k+1}\le x_{k+1},\dots,X_n\le x_n)\\
&\overset{V7.1(3)}{=} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\{x_i<X_i\le x_i+h_i\}\cap[\{X_k\le x_k+h_k\}-\{X_k\le x_k\}]\cap\bigcap_{j=k+1}^{n}\{X_j\le x_j\}\right)\\
&=P(x_1<X_1\le x_1+h_1,\dots,x_k<X_k\le x_k+h_k,X_{k+1}\le x_{k+1},\dots,X_n\le x_n)
\end{aligned}
$$

čímž je tvrzení dokázané.

$\square$

Poznámka 8.6. Lze snadno ukázat, že pokud platí podmínky (2) až (5), pak $F(x_1,\dots,x_n)$ **je neklesající**, tj. platí podmínka (1).

Poznámka 8.7. Naopak však to, že $F(x_1,\dots,x_n)$ **je neklesající** v každé z proměnných při pevně daných hodnotách ostatních proměnných, **nestačí** k tomu, aby $\Delta_{h_1}^{(1)}\Delta_{h_2}^{(2)}\dots\Delta_{h_n}^{(n)}F(x_1,\dots,x_n)\ge 0$. I když tato podmínka (tj., že F je neklesající) se zdá přirozených zobecněním jednorozměrného případu, přesto to nestačí.

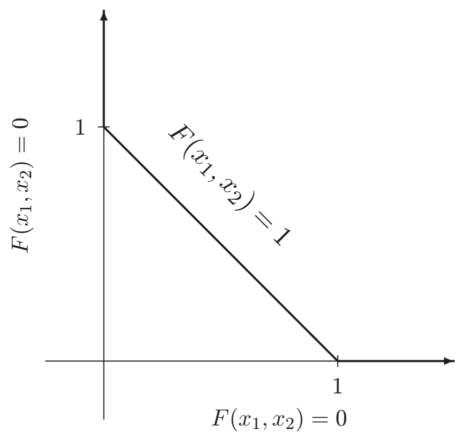
Příklad 8.8.

Mějme $F(x_1,x_2)=\begin{cases}1 & x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_1+x_2\ge 1,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$

I když je tato funkce neklesající v obou proměnných, přesto nejsou zaručeny nezáporné diference, neboť

$$\begin{aligned}\Delta_1^{(1)}\Delta_1^{(2)}F(1,1)&=\Delta_1^{(1)}\left[F(1,2)-F(1,1)\right]\\&=F(2,2)-F(1,2)-F(2,1)+F(1,1)\\&=1-1-1+1=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1^{(1)}\Delta_1^{(2)}F(0,0)&=\Delta_1^{(1)}\left[F(0,1)-F(0,0)\right]\\&=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)\\&=1-1-1+0=-1\end{aligned}$$



$\Rightarrow$ **nejde o distribuční funkci**.

Věta 8.9. *Nechť $F(x_1,\dots,x_n)$ splňuje podmínky (2) až (5) věty 8.5. Pak existuje pravděpodobnostní prostor $(\Omega,\mathcal{A},P)$ a na něm náhodný vektor $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)'$ takový, že $F(x_1,\dots,x_n)$ je jeho distribuční funkce.*

Důkaz. Položme $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}^n$, $P(B)=\mu_F(B)$, kde μ_F je Lebesgueova-Stieltjelsova míra indukovaná funkcí F. Analogicky jako v jednorozměrném případě pro každé $\boldsymbol{\omega}\in\Omega$ položme $\mathbf{X}(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\omega}$ a označme

$$\begin{aligned}F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X}\le\mathbf{x})=P_{\mathbf{X}}((-\infty,x_1\rangle\times\dots\times(-\infty,x_n\rangle)\\&=\mu_F((-\infty,x_1\rangle\times\dots\times(-\infty,x_n\rangle)=F(x_1,\dots,x_n)\end{aligned}$$

□

Poznámka 8.10. Snadno lze ověřit, že **rozdělení pravděpodobností** $P_{\mathbf{X}}(B)=P(\mathbf{X}\in B)$ je pravděpodobnost na jevového poli $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$ a že distribuční funkce $F(x_1,\dots,x_n)$ náhodného vektoru $\mathbf{X}$ jednoznačně určuje rozdělení pravděpodobností $P_{\mathbf{X}}$. K tomu si stačí uvědomit, že $P_{\mathbf{X}}(B)=\mu_F(B)$ pro $B\in\mathcal{B}^n$, kde μ_F je n-rozměrná Lebesgueova-Stieltjelsova míra indukovaná distribuční funkcí $F(x_1,\dots,x_n)$ náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

8.1. Diskrétní náhodné vektory.

Definice 8.11. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)'$ je **diskrétního typu**, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $M\subset\mathbb{R}^n$ taková, že $P_{\mathbf{X}}(M)=1$. Funkci $p(x_1,\dots,x_n)=P(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)$ nazýváme **pravděpodobnostní funkcí** náhodného vektoru $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)'$ a M nazýváme **oborem hodnot** náhodného vektoru $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)'$ a značíme $\mathbf{X}\sim(M,p)$.

Poznámka 8.12. Zřejmě platí $p(\mathbf{x})=p(x_1,\dots,x_n)\ge 0$ pro každé $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\sum\limits_{\mathbf{x}\in M}p(\mathbf{x})=P(\mathbf{X}\in M)=P_{\mathbf{X}}(M)=1$ a $P(\mathbf{X}\in B)=P_{\mathbf{X}}(B)=\sum\limits_{\mathbf{x}\in B\cap M}p(x_1,\dots,x_n)$.

<u>Příklad</u> 8.13. MULTINOMICKÉ ROZDĚLENÍ.
Uvažujme pokus, který může mít n disjunktních výsledků $A_1, \ldots, A_n$. Nechť $\theta_i = P(A_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$, přičemž $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$. Tento pokus budeme k**-krát** **<u>nezávisle</u> opakovat**.
Nechť X_i značí **počet nastoupení jevu** A_i **v provedených** k **pokusech**. Nalezněme rozdělení pravděpodobností náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.
Zřejmě $X_i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ pro $i = 1, \ldots, n$ a pravděpodobnostní funkce je rovna

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} \binom{k}{x_1}\binom{k-x_1}{x_2}\cdots\binom{k-x_1-\cdots-x_{n-1}}{x_n}\,\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_n^{x_n} \\ = \frac{k!}{x_1!(k-x_1)!}\,\frac{(k-x_1)!}{x_2!(k-x_1-x_2)!}\,\frac{(k-x_1-x_2)!}{x_3!(k-x_1-x_2-x_3)!}\cdots\frac{(k-x_1-\cdots-x_{n-1})!}{x_n!\underbrace{(k-x_1-\cdots-x_n)!}_{=0!=1}}\,\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_n^{x_n} \\ = \frac{k!}{x_1!\cdots x_n!}\,\theta_1^{x_1}\theta_2^{x_2}\cdots\theta_n^{x_n} & \text{pro } x_i \in \{0,1,\ldots,k\},\ \text{přičemž } \sum_{i=1}^{n} x_i = k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Náhodný vektor budeme značit $\mathbf{X} \sim Mn(k, \theta_1, \ldots, \theta_n)$.

8.2. Absolutně spojité náhodné vektory.

DEFINICE 8.14. Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je **absolutně spojitého typu**, jestliže existuje **nezáporná integrovatelná funkce** f taková, že rozdělení pravděpodobností

$$P_{\mathbf{X}}(B) = \int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{B_1} \cdots \int_{B_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

pro každé

$$B = B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{B}^n.$$

Funkci f nazýváme **hustotou rozdělení pravděpodobností** náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ absolutně spojitého typu, stručněji f je hustotou $\mathbf{X}$.

<u>Poznámka</u> 8.15. Pro hustotu náhodného vektoru platí:
(1) $f(\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
(2) $\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$
(3) Protože $P_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) = \int_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, pak položíme-li

$$B = (-\infty, x_1\rangle \times \cdots \times (-\infty, x_n\rangle,$$

dostaneme

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots t_n\ .$$

(4) Hustotu lze pomocí distribuční funkce vyjádřit takto

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

přičemž uvedená derivace existuje skoro všude vzhledem k Lebesgueově míře.

Příklad 8.16. Vícerozměrné rovnoměrné rozdělení

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má **vícerozměrné rovnoměrné rozdělení** (*multidimensional uniform distribution*) s parametry $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ($a_i < b_i,\ i = 1, \dots, n$), pokud její hustota má tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i - a_i} & \text{pro } x_i \in (a_i, b_i),\ a_i < b_i,\ i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Náhodný vektor budeme značit $\boxed{\mathbf{X} \sim Rs_n(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)}$.

Příklad 8.17. Vícerozměrné normální rozdělení.

Řekneme, že náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má n-**rozměrné normální (Gaussovo) rozdělení** s parametry $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)' \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, pokud její hustota má tvar

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \, |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})}.$$

a budeme psát

$$\boxed{\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})}$$

Jestliže píšeme $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, znamená to, že matice je pozitivně definitní a tedy i regulární. Symbolem $|\boldsymbol{\Sigma}|$ rozumíme determinant matice.

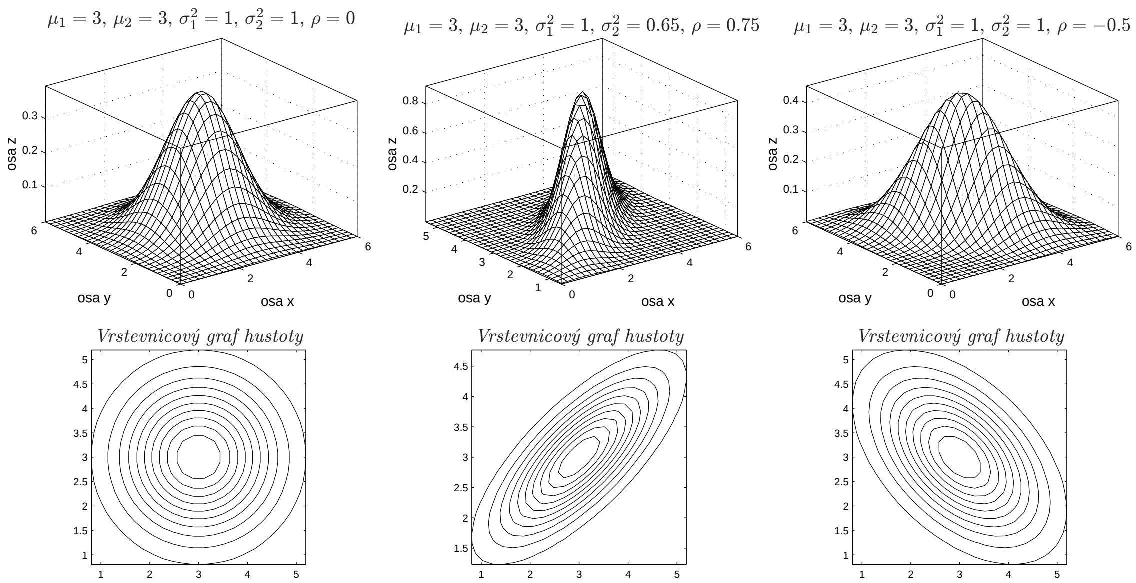
Pro $n = 2$ má hustota tvar

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

Budeme psát

$$\boxed{\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)}$$

Ukázky hustot $f(x_1, x_2) \sim N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$



Jak vidíme z vrstevnicových grafů dvourozměrných normálních hustot, tak množina všech hodnot $(x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$, pro které je hustota $f(x_1, x_2)$ konstantní, tvoří elipsu, popřípadě kružnici (pro $\rho = 0$).

9. Marginální náhodné vektory

Připomeňme, že $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je náhodným vektorem $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zvolme přirozené $k < n$ a libovolnou k-tici indexů $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, pak $\mathbf{X}^* = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})'$ nazveme **marginálním náhodným vektorem**.

Věta 9.1. *Všechna marginální rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ jsou jednoznačně určena rozdělením náhodného vektoru $\mathbf{X}$, přitom pro marginální distribuční funkci $F^*(\mathbf{x}^*)$ marginálního náhodného vektoru $\mathbf{X}^* = (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})'$ platí*

$$F^*(\mathbf{x}^*) = F^*(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} F(x_1, \dots, x_n),$$

kde

$$\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}.$$

Důkaz. Pro libovolný index $j \in \{1, \dots, n\}$ uvažujme posloupnost reálných čísel $\left\{x_j^N\right\}_{N=1}^{\infty} \to \infty$, jdoucí k nekonečnu a označme náhodný jev $A_N = \bigcap\limits_{i=1, i\neq j}^{n} \{X_i \le x_i\} \cap \{X_j \le x_j^N\}$. Protože jde o **neklesající** posloupnost náhodných jevů $A_N \subseteq A_{N+1}$, pak (viz věta 4.7, kap. 1) existuje limitní náhodný jev $A = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} A_N$, tj. $A = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \left[\bigcap\limits_{i=1, i\neq j}^{n} \{X_i \le x_i\} \cap \{X_j \le x_j^N\} \right] = \bigcap\limits_{i=1, i\neq j}^{n} \{X_i \le x_i\}$. Pravděpodobnost tohoto limitního jevu je rovna

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcap_{i=1, i\neq j}^{n} \{X_i \le x_i\} \right) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_{j-1} \le x_{j-1}, X_{j+1} \le x_{j+1}, \dots, X_n \le x_n) \\ &= F^*(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = F^*(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

a jde o distribuční funkci $(n-1)$-rozměrného náhodného vektoru $\mathbf{X}^* = (X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)'$. Navíc můžeme psát

$$\begin{aligned} F^*(\mathbf{x}^*) &= F^*(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= P(X_1 \le x_1, \dots, X_{j-1} \le x_{j-1}, X_{j+1} \le x_{j+1}, \dots, X_n \le x_n) \\ &= P(A) = \lim_{N \to \infty} P(A_N) \\ &= \lim_{N \to \infty} P(X_1 \le x_1, \dots, X_{j-1} \le x_{j-1}, X_j \le x_j^N, X_{j+1} \le x_{j+1}, \dots, X_n \le x_n) \\ &= \lim_{x_j \to \infty} P(X_1 \le x_1, \dots, X_{j-1} \le x_{j-1}, X_j \le x_j, X_{j+1} \le x_{j+1}, \dots, X_n \le x_n) \\ &= \lim_{x_j \to \infty} F(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Předchozí úvahy lze zobecnit i na libovolnou k-tici indexů $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$. Označíme-li $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, pak platí

$$\begin{aligned} F^*(\mathbf{x}^*) &= F^*(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = P(X_{i_1} \le x_{i_1}, \dots, X_{i_1} \le x_{i_k}) \\ &= \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} P(X_{i_1} \le x_{i_1}, \dots, X_{i_1} \le x_{i_k}, X_{j_1} \le x_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}} \le x_{j_{n-k}}) \\ &= \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} F(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

□

Poznámka 9.2. Sdružená či simultánní rozdělení.

Aby se zdůraznilo, že jde o celý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$, tak se jeho distribuční funkci říká **sdružená (simultánní) distribuční funkce**.

Obdobně mluvíme i o **sdruženém rozdělení**, **sdružené hustotě** a **sdružené pravděpodobnostní funkci** náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

VĚTA 9.3. *Pro přirozené $k < n$ mějme indexy $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ a $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$.*

(a) Nechť $\mathbf{X} \sim (M, p)$. Pak marginální náhodný vektor $\mathbf{X}^*$ má marginální pravděpodobnostní funkci rovnu

$$p^*(\mathbf{x}^*) = p^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = P(\mathbf{X}^* = \mathbf{x}^*) = \sum_{x_{j_1} \in M_{j_1}} \cdots \sum_{x_{j_{n-k}} \in M_{j_{n-k}}} p(x_1, \ldots, x_n),$$

kde $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, přičemž M_i je obor hodnot náhodné veličiny X_i, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Nechť $\mathbf{X}$ je náhodný vektor absolutně spojitého typu s hustotou $f(\mathbf{x})$. Pak marginální náhodný vektor $\mathbf{X}^*$ má marginální hustotu tvaru

$$f^*(\mathbf{x}^*) = f^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{j_1} \ldots dx_{j_{n-k}}.$$

Důkaz.

(a) Mějme $\mathbf{X} \sim (M, p)$ a označme M je kartézský součin $M = M_1 \times \cdots \times M_n$, kde M_i je obor hodnot diskrétní náhodné veličiny X_i.

Podle definice je pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{X}^* = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})'$ rovna

$$\begin{aligned}
p^*(\mathbf{x}^*) &= p^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = P(X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k}) \\
&= P(X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k}, X_{j_1} \in M_{j_1}, \ldots, X_{j_{n-k}} \in M_{j_{n-k}}) \\
&= P\left(\bigcup_{x_{j_1} \in M_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}} \in M_{j_{n-k}}} \{X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k}, X_{j_1} = x_{j_1}, \ldots, X_{j_{n-k}} = x_{j_{n-k}}\} \right) \\
&= \sum_{x_{j_1} \in M_{j_1}} \cdots \sum_{x_{j_{n-k}} \in M_{j_{n-k}}} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_{j_1} \in M_{j_1}} \cdots \sum_{x_{j_{n-k}} \in M_{j_{n-k}}} p(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

(b) Je-li $\mathbf{X}^* = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})'$ absolutně spojitého typu, pak díky předchozí větě 9.1 máme

$$\begin{aligned}
F^*(\mathbf{x}^*) &= \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} F(x_1, \ldots, x_n) \\
&= \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_n \ldots dt_1 \\
&= \int_{-\infty}^{x_{i_1}} \cdots \int_{-\infty}^{x_{i_k}} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_{j_1} \ldots dt_{j_{n-k}} \right]}_{= f^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} dt_{i_k} \ldots dt_{i_1}
\end{aligned}$$

$\square$

Příklad 9.4. Mějme dvourozměrný náhodný vektor, který tentokrát označíme $(X,Y)'$. Nechť jeho sdružená hustota má tvar

$$(X,Y)' \sim f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) & \text{pro } x \in \langle 0,2\rangle,\ y \in \langle 0,3\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Naším úkolem bude určit sdruženou distribuční funkci, marginální hustoty i distribuční funkce.

Z definice hustoty vidíme, že definičním oborem náhodného vektoru je obdélník $B = \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle$.

(1) Nejprve počítejme **sdruženou distribuční funkci**. Budeme muset rozlišit následující případy

(a) Pro $(x,y)' \in B$ je distribuční funkce rovna

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \int_0^y\int_0^x \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{3}\right)dudv = \int_0^x \frac{u}{12}\left[\int_0^y dv\right]du + \int_0^x \frac{1}{18}\left[\int_0^y v\,dv\right]du$$
$$=\frac{y}{12}\int_0^x u\,du + \frac{y^2}{36}\int_0^x du = \frac{1}{12}\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{3}\right) \qquad \text{pro } (x,y)' \in \langle 0,2\rangle \times \langle 0,3\rangle.$$

(b) Nyní uvažujme případ, kdy $y > 3$ a $x \in \langle 0,2\rangle$.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \int_0^3\int_0^x \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{3}\right)dudv = \int_0^x \frac{u}{12}\left[\int_0^3 dv\right]du + \int_0^x \frac{1}{18}\left[\int_0^3 v\,dv\right]du$$
$$=\frac{3}{12}\int_0^x u\,du + \frac{9}{36}\int_0^x du = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) \qquad \text{pro } x \in \langle 0,2\rangle, y > 3.$$

(c) Obdobně pro $x > 2$ a $y \in \langle 0,3\rangle$.

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv = \int_0^y\int_0^2 \frac{1}{6}\left(\frac{u}{2}+\frac{v}{3}\right)dudv = \int_0^2 \frac{u}{12}\left[\int_0^y dv\right]du + \int_0^2 \frac{1}{18}\left[\int_0^y v\,dv\right]du$$
$$=\frac{y}{12}\int_0^2 u\,du + \frac{y^2}{36}\int_0^2 du = \frac{1}{6}\left(\frac{y^2}{3}+y\right) \qquad \text{pro } x > 2, y \in \langle 0,3\rangle.$$

(d) Dále zřejmě $F(x,y) = 0$ pro $x < 0$ a $y < 0$ a $F(x,y) = 1$ pro $x > 2$ a $y > 3$.

(2) Nyní odvodíme **marginální distribuční funkce**.

(a) Nejprve počítejme $\boxed{F_X(x) = P(X \le x)}$.

Zřejmě $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 2$. Pro $x \in \langle 0,2\rangle$ počítejme

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \lim_{y\to 3} \frac{1}{12}\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)$$

(b) Dále počítejme $\boxed{F_Y(y) = P(Y \le y)}$.

Zřejmě $F_Y(y) = 0$ pro $y < 0$ a $F_Y(y) = 1$ pro $y > 3$. Nakonec pro $y \in \langle 0,3\rangle$ počítejme

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{12}\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{3}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{y^2}{3}+y\right)$$

(3) Nyní odvodíme **marginální hustoty**.

(a) Nejprve počítejme $\boxed{f_X(x)}$.

Zřejmě $f_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a pro $x > 2$. Pro $x \in \langle 0,2\rangle$ počítejme

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^3 \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)dy = \frac{x}{12}\int_0^3 dy + \frac{1}{18}\int_0^3 ydy = \frac{1}{4}(x+1)$$

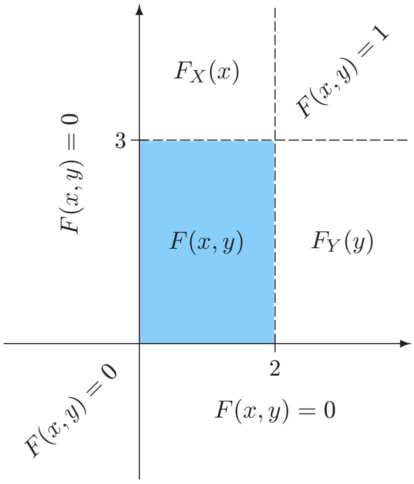
(b) Dále odvodíme $\boxed{f_Y(y)}$.

Zřejmě $f_Y(y) = 0$ pro $y < 0$ a pro $y > 3$. Pro $y \in \langle 0,3\rangle$ počítejme

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)dx = \frac{1}{12}\int_0^2 xdx + \frac{y}{18}\int_0^2 dx = \frac{1}{6}\left(\frac{2y}{3}+1\right)$$

Předchozí výpočty nyní shrneme a graficky znázorníme. Všimněme si nejdříve **sdružené distribuční funkce**

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ nebo } y<0 \\ F_X(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) & x\in\langle 0,2\rangle, y>3 \\ F_Y(y)=\frac{1}{6}\left(\frac{y^2}{3}+y\right) & x>2, y\in\langle 0,3\rangle \\ \frac{1}{12}\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{3}\right) & x\in\langle 0,2\rangle, y\in\langle 0,3\rangle \\ 1 & x>2, y>3 \end{cases}$$

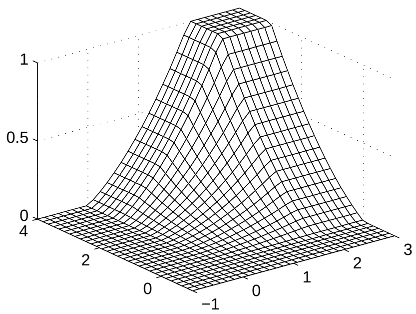


Vidíme, že

- pro $x\in\langle 0,2\rangle$ a $y>3$, kdy marginální složka Y je mimo definiční obor, je sdružená distribuční funkce rovna marginální, tj.
$$F(x,y)=F_X(x)$$
neboť hodnoty y nehrají žádnou roli;
- a analogicky pro $x>2$ a $y\in\langle 0,3\rangle$, kdy nyní je to marginální složka X, která je mimo definiční obor, je opět sdružená distribuční funkce rovna marginální, tj.
$$F(x,y)=F_Y(y)$$
a v tomto případě hodnoty x nemají vliv na hodnotu sdružené distribuční funkce.

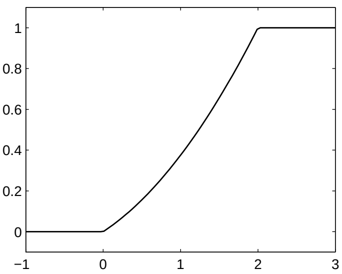
Na následujících grafech shrneme výsledky o všech sdružených i marginálních funkcionálních charakteristikách daného rozdělení.

Sdružená distribuční funkce

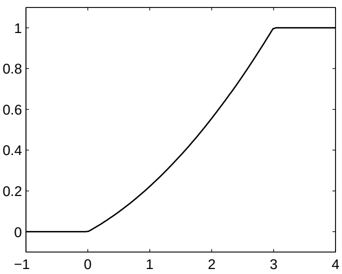


Marginální distribuční funkce

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+x\right) & x\in\langle 0,2\rangle, \\ 1 & x>2. \end{cases}$$

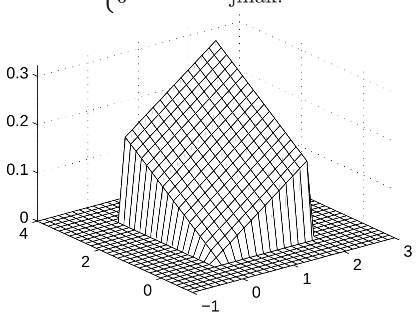


$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \frac{1}{6}\left(\frac{y^2}{3}+y\right) & y\in\langle 0,3\rangle, \\ 1 & y>3. \end{cases}$$



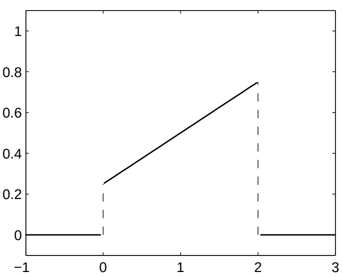
Sdružená hustota

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) & x\in\langle 0,2\rangle,\ y\in\langle 0,3\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

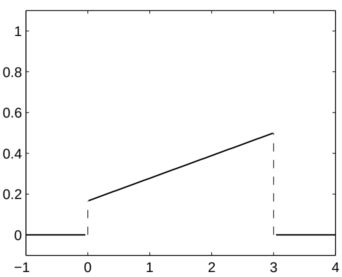


Marginální hustoty

$$f_X(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}(x+1) & x\in\langle 0,2\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{2y}{3}+1\right) & y\in\langle 0,3\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



10. Nezávislé náhodné veličiny

Pomocí nezávislých jevů můžeme definovat i nezávislé náhodné veličiny.

Definice 10.1. Řekneme, že náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou (stochasticky) **nezávislé**, jestliže jsou nezávislé náhodné jevy $\{X_1 \leq x_1\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$ pro libovolné $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$.

Nejprve vyslovíme větu, která poskytuje ekvivalentní vyjádření nezávislých náhodných veličin pomocí distribučních funkcí.

Věta 10.2. *Nechť náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *má sdruženou distribuční funkci* $F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ *a nechť pro* $i = 1, \ldots, n$ *je* $F_i(x)$ *marginální distribuční funkce náhodné veličiny* X_i*. Pak náhodné veličiny* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou (stochasticky)* ***nezávislé****, právě když*

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) \quad \text{pro} \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nejprve předpokládejme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé**. Pak podle definice 10.1 jsou náhohodné jevy $\{X_1 \leq x_1\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$ nezávislé pro $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$, takže můžeme upravovat

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i).$$

„$\Leftarrow$“ Naopak nyní předpokládejme, že platí $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$ pro $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$. Zvolme libovolně $1 \leq k \leq n$ a vyberme $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Zbývající indexy označme $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$. Pro vybranou k-tici indexů počítejme marginální distribuční funkci

$$\begin{aligned} F^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) &= \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} F(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{\substack{x_{j_1} \to \infty \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \to \infty}} \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) \\ &= \prod_{h=1}^{k} F_{i_h}(x_{i_h}) \prod_{s=1}^{n-k} \underbrace{\lim_{x_{j_s} \to \infty} F_{j_s}(x_{j_s})}_{=1} = \prod_{h=1}^{k} F_{i_h}(x_{i_h}) \end{aligned}$$

Vidíme, že pro libovolné $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ platí

$$P\left(\bigcap_{h=1}^{k} \{X_i \leq x_{i_h}\}\right) = F^*(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \prod_{h=1}^{k} F_{i_h}(x_{i_h}) = \prod_{h=1}^{k} P(X_{i_h} \leq x_{i_h}),$$

což je definice nezávislosti náhodných jevů $\{X_1 \leq x_1\}, \ldots, \{X_n \leq x_n\}$. □

Nyní vyslovíme větu, která nabízí ekvivalentní vyjádření nezávislých náhodných veličin pomocí pravděpodobnostních funkcí pro diskrétní náhodné veličiny a pomocí hustot pro náhodné veličiny absolutně spojitého typu.

Věta 10.3.

(a) Mějme ***diskrétní*** *náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim (M, p)$*. Pak* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé, právě když*

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i) \quad \text{pro} \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

kde pro $i = 1, \ldots, n$ *je* $p_i(x_i)$ *marginální pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny* X_i*.*

(b) Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *je* ***absolutně spojitý*** *náhodný vektor se sdruženou hustotou* $f(x_1, \ldots, x_n)$*. Pak* $X_1, \ldots, X_n$ *jsou nezávislé, právě když*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i) \quad \text{pro} \quad \text{s.v. } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n,$$

kde pro $i = 1, \ldots, n$ *je* $f_i(x_i)$ *marginální hustota náhodné veličiny* X_i*.*

Důkaz.

(a) Mějme diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim (M, p)$.

„$\Rightarrow$" Nejprve předpokládejme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé**. Pak podle definice jsou náhodné veličiny nezávislé, právě když jsou nezávislé náhodné jevy $\{X_1 \in B_1\}, \ldots, \{X_1 \in B_n\}$ pro $\forall\, B_i \in \mathcal{B}$. Pro libovolné $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ položme $B_i = \{x_i\}$ a upravujme

$$p(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) \overset{nez.}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i).$$

„$\Leftarrow$" Naopak nyní předpokládejme, že platí $p(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)$ a upravujme sdruženou distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(y_1, \ldots, y_n) &= \sum_{x_1 \le y_1} \cdots \sum_{x_n \le y_n} p(x_1, \ldots, x_n) \overset{nez.}{=} \sum_{x_1 \le y_1} \cdots \sum_{x_n \le y_n} p_1(x_1) \cdots p_n(x_n) \\ &= \underbrace{\sum_{x_1 \le y_1} p_1(x_1)}_{=F_1(y_1)} \cdots \underbrace{\sum_{x_n \le y_n} p_n(x_n)}_{=F_n(y_n)} = F_1(y_1) \cdots F_n(y_n), \end{aligned}$$

takže náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou podle předchozí věty 10.2 nezávislé.

(b) Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je **absolutně spojitý** náhodný vektor se sdruženou hustotou $f(x_1, \ldots, x_n)$.

„$\Rightarrow$" Nejprve předpokládejme, že $X_1, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé**. Pak podle podle předchozí věty 10.2 lze sdruženou distribuční funkci vyjádřit jako součin marginálních, tj. $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$. Vzhledem k tomu, že sdruženou hustotu lze vypočítat z distribuční funkce, dostáváme

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

„$\Leftarrow$" Naopak nyní předpokládejme, že platí $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ a upravujme sdruženou distribuční funkci

$$\begin{aligned} F(y_1, \ldots, y_n) &= \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \ldots dx_1 = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} f_1(x_1) \cdots f(x_n) dx_n \ldots dx_1 \\ &\overset{Fub.veta}{=} \int_{-\infty}^{y_1} f_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{y_n} f_1(x_1) dx_n = F_1(y_1) \cdots F_1(y_n) \end{aligned}$$

takže náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ jsou podle předchozí věty 10.2 nezávislé.

$\square$

Příklad 10.4. MAXIMUM A MINIMUM STEJNÝCH NEZÁVISLÝCH NÁHODNÝCH VELIČIN.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením se sdruženou distribuční funkcí $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$, neboť všechny mají totéž rozdělení. Hledejme rozdělení náhodných veličin $\begin{matrix} X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \\ X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \end{matrix}$. S využitím faktu, že jde o nezávislé náhodné veličiny upravujme:

$$\begin{aligned} F_{(1)}(x) &= P(X_{(1)} \le x) = P\left(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \le x\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \le x\}\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \{X_i \le x\}}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i > x\}\right) \overset{nez.}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \underbrace{P(X_i > x)}_{=1-F(x)} = 1 - (1 - F(x))^n \end{aligned}$$

$$F_{(n)}(x) = P(X_{(n)} \le x) = P\left(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le x\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \le x\}\right) \overset{nez.}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x) = F^n(x)$$

<u>Příklad</u> 10.5. Rovnoměrné rozdělení na různých oblastech G

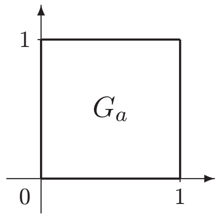
Nechť dvourozměrný náhodný vektor má rovnoměrné rozdělení na oblasti G. Zjistěte, zda náhodné veličiny X a Y jsou stochasticky nezávislé, jestliže

(a) $G = \{(x,y)' \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$,

(b) $G = \{(x,y)' \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1;\ x+y \le 1\}$.

<u>Řešení</u>:

(a) Nechť $(X,Y)' \sim Rs(G)$, kde $G = \{(x,y)' \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$



Protože jde o náhodný vektor s rovnoměrným rozdělením na oblasti G_a (jednotkový čtverec), tak hustota musí být na G_a konstantní, tj.

$$f(x,y)=\begin{cases} c & (x,y)' \in G_a \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{a } 1=\iint_{G_a} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 c\,dxdy=c\cdot 1 \ \Rightarrow\ c=1.$$

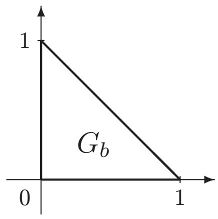
Nyní spočítáme marginální hustoty:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 dy = 1 & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^1 dx = 1 & \text{pro } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Protože pro každé $(x,y)' \in \mathbb{R}^2$ platí $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, náhodné veličiny X a Y **jsou nezávislé**.

(b) Nechť $(X,Y)' \sim Rs(G)$, kde $G = \{(x,y)' \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1;\ x+y \le 1\}$



Obdobně

$$f(x,y)=\begin{cases} c & (x,y)' \in G_b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$1=\iint_{G_b} f(x,y)dxdy=c\int_0^1\left[\int_0^{1-x} dy\right]dx=c\int_0^1 (1-x)\,dx=c\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}c \ \Rightarrow\ c=2.$$

Marginální hustoty:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} 2\int_0^{1-x} dy = 2[y]_0^{1-x} = 2(1-x) & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} 2\int_0^{1-y} dx = 2[x]_0^{1-y} = 2(1-y) & \text{pro } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Protože $f(x,y) \ne f_1(x)f_2(y)$, náhodné veličiny X a Y **nejsou nezávislé**.

11. Rozdělení transformovaných náhodných veličin

Věta 11.1. *Nechť X je náhodná veličina a h je borelovsky měřitelná funkce. Potom $Y = h(X)$ je náhodná veličina.*

Důkaz. Nechť $x \in \mathbb{R}$ je libovolné. Označme $h^{-1}(B_x) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \le x\}$. Protože h je borelovsky měřitelná funkce, pak také $h^{-1}(B_x) \in \mathcal{B}$ a tedy

$$\{\omega \in \Omega : \ Y(\omega) \le x\} = \{\omega \in \Omega : \ h(X(\omega)) \le x\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \in h^{-1}(B_x)\} \in \mathcal{A}$$

a odtud Y je náhodná veličina. □

Věta 11.2. *Nechť zobrazení $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je borelovsky měřitelné, tj. pro $\forall\ B \in \mathcal{B}^m$ je $\{(x_1, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n : h(x_1, \dots, x_n) \in B\} \in \mathcal{B}^n$. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je n-rozměrný náhodný vektor definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)' = h(\mathbf{X})$ je m-rozměrný náhodný vektor.*

Důkaz. Nechť $B \in \mathcal{B}^m$ je libovolná. Pak z měřitelnosti h plyne, že

$$h^{-1}(B) = \{(t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{R}^n : h(t_1, \dots, t_n) \in B\} \in \mathcal{B}^n$$

Proto

$$\{\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)' \in B\} = \{h(\mathbf{X}) \in B\} = \{\mathbf{X} \in h^{-1}(B)\} \in \mathcal{A}$$

je náhodným jevem, neboť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je náhodný vektor. □

Poznámka 11.3. V následujících odstavcích nás bude zajímat rozdělení takto transformovaných náhodných veličin a vektorů.

Poznámka 11.4. Při odvozování rozdělení transformovaných náhodných veličin budeme pracovat s Lebesgueovým integrálem z borelovsky měřitelné funkce φ vzhledem k Lebesgueově-Stieltjesově míře μ_F na borelovské množině A, tj. budeme pracovat s integrálem

$$I = \int_A \varphi(t) d\mu_F(t) \overset{\text{značíme}}{=} \int_A \varphi(t) dF(t).$$

Situace je obdobná, jako když pracujeme s Lebesgueovým integrálem z borelovsky měřitelné funkce φ vzhledem k Lebesgueově míře μ na borelovské množině A, tj.

$$I = \int_A \varphi(t) d\mu(t) \overset{\text{značíme}}{=} \int_A \varphi(t) dt.$$

Poznámka 11.5. Pokud distribuční funkce F je **funkcí skoků**, tj. je distribuční funkcí diskrétní náhodné veličiny s pravděpodobnostní funkcí $p(x)$ a oborem hodnot M, tak

$$I = \int_A \varphi(t) dF(t) = \sum_{t \in A \cap M} \varphi(t) p(t).$$

Poznámka 11.6. Pokud je distribuční funkce F **absolutně spojitá**, tj. je distribuční funkcí spojité náhodné veličiny s hustotou $f(x)$, tak

$$I = \int_A \varphi(t) dF(t) = \int_A \varphi(t) f(t) dt,$$

kde posledně uvedený integrál je Lebesgueovým integrálem s Lebesgueovou mírou.

Věta 11.7. *Nechť náhodná veličina X má distribuční funkci F_X a h je borelovsky měřitelná funkce. Označme F_Y distribuční funkci náhodné veličiny $Y = h(X)$. Potom distribuční funkce transformované náhodné veličiny Y je rovna*

$$F_Y(y) = \int\limits_{h^{-1}(B_y)} dF_X(x), \qquad \textit{kde} \qquad h^{-1}(B_y) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \le y\}.$$

Důkaz. Pro libovolné $y \in \mathbb{R}$ položme $h^{-1}(B_y) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) \le y\}$ a postupně dostaneme

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(h(X) \le y) = P(X \in h^{-1}(B_y)) = P_X(h^{-1}(B_y)) \\ &= \int\limits_{h^{-1}(B_y)} d\mu_F(x) = \int\limits_{h^{-1}(B_y)} dF_X(x). \end{aligned}$$

□

Poznámka 11.8. Diskrétní náhodné veličiny.
Nechť $X \sim (M, p_X)$ a h je borelovsky měřitelná funkce. Opět označme $h^{-1}(B_y) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) = y\}$, pak pravděpodobnostní funkce transformované náhodné veličiny je rovna

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= P(Y=y) = P(h(X)=y) = P(X \in h^{-1}(B_y)) = P\left(\bigcup_{x \in h^{-1}(B_y)\cap M} \{X=x\}\right) \\ &= \sum_{x \in h^{-1}(B_y)\cap M} p_X(x). \end{aligned}$$

Poznámka 11.9. Spojité náhodné veličiny.
Nechť $X \sim f_X(x)$ a h je borelovsky měřitelná funkce. Označme $h^{-1}(B_y) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \leq y\}$, pak distribuční funkce transformované náhodné veličiny je rovna

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \in h^{-1}(B_y)) \\ &= \int\limits_{h^{-1}(B_y)} f_X(x)dx, \qquad \text{pro} \qquad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jednoduše lze stanovit hustotu $f_Y(y)$ transformované náhodné veličiny $Y = h(X)$, pokud transformace $y = h(x)$ je **vzájemně jednoznačná** (prostá a na), tj. když **existuje derivace** $\frac{d}{dy}h^{-1}(y)$ a **je spojitá**. Potom z věty o substituci plyne

$$F_Y(y) = \int\limits_{h^{-1}(B_y)} f_X(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{y} \underbrace{f_X\left(h^{-1}(t)\right)\left|\frac{dh^{-1}(t)}{dt}\right|}_{=f_Y(t)} dt$$

Takže transformovanou hustotu f_Y vyjádříme pomocí původní hustoty f_X a inverzní transformace takto

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|. \tag{3.11.2}$$

Příklad 11.10. Lineární transformace.

Nechť náhodná veličina X je absolutně spojitá s hustotou $f_X(x)$. Nalezněme hustotu transformované náhodné veličiny

$$Y = a + bX, \text{ kde } a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$$

Řešení:
můžeme postupovat dvojím způsobem:

(1) Dosazením do vzorce (3.11.2)

K transformaci $y = a + bx$ existuje inverzní transformace $h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$, která má derivaci $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{b}$, takže hustota transformované náhodné veličiny je rovna

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{|b|}$$

(2) Výpočtem přes distribuční funkci

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(a + bX \leq y) = \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) = F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) & \text{pro } b > 0 \\ P\left(X \geq \frac{y-a}{b}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b}\right) & \text{pro } b < 0 \end{cases}$$

Hustotu pak dostaneme jako derivaci distribuční funkce

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} F'_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b} = f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b} & \text{pro } b > 0 \\ -F'_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b} = -f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{b} & \text{pro } b < 0 \end{cases} = \boxed{f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{|b|}}$$

Příklad 11.11. Transformace náhodné veličiny pomocí funkce, která není prostá.

Nalezněte pravděpodobnostní funkci, resp. hustotu nové náhodné veličiny $Y = X^2$, pokud náhodná veličina X je **diskrétní**, resp. **spojitá**.

Řešení:

(a) Diskrétní případ $X \sim (M_X, p_X)$

S využitím faktu, že transformovaná náhodná veličina Y nabývá nezáporných hodnot, odvozujme pravděpodobnostní funkci:

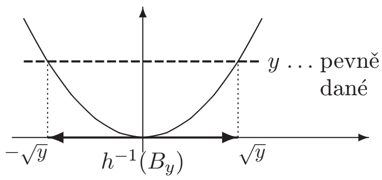
$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &= P(Y=y) = P(X^2 = y) = P\left(\{X = \sqrt{y}\} \cup \{X = -\sqrt{y}\}\right) \\
&= \begin{cases}
p_X(\sqrt{y}) & \text{pokud} \quad -\sqrt{y} \notin M_X \quad \text{a} \quad \sqrt{y} \in M_X \\
p_X(-\sqrt{y}) & \qquad\quad\;\; -\sqrt{y} \in M_X \quad \text{a} \quad \sqrt{y} \notin M_X \\
p_X(-\sqrt{y}) + p_X(\sqrt{y}) & \qquad\quad\;\; -\sqrt{y} \in M_X \quad \text{a} \quad \sqrt{y} \in M_X \\
p_X(0) & \text{pokud} \quad y = 0 \\
0 & \text{jinak}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

(b) Spojitý případ $X \sim f_X(x)$

Transformovaná náhodná veličina Y nabývá nezáporných hodnot, proto pro $y \geq 0$ označme nejprve

$$h^{-1}(B_y) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq y\}$$

a počítejme distribuční funkci transformované náhodné veličiny:



$$
F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases}
0 & \text{pro } y \leq 0 \\
P(X \in h^{-1}(B_y)) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) & \text{pro } y > 0 \\
= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) &
\end{cases}
$$

a derivací distribuční funkce dostaneme hustotu:

$$
f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases}
0 & \text{pro } y \leq 0 \\
F'_Y(\sqrt{y})\,\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - F'_Y(-\sqrt{y})\,\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(-1) & \text{pro } y > 0 \\
= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] &
\end{cases}
$$

12. Transformace náhodných vektorů

Vzorec $f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ lze pomocí věty o substituci v mnohorozměrných integrálech jednoduše rozšířit i na vícerozměrný případ. Proto nejdříve připomeneme několik základních pojmů.

Mějme zobrazení $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, kde $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_n(\mathbf{x}))$. To znamená, že $h_1, \ldots, h_n$ jsou funkce proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

Předpokládejme, že existují parciální derivace $\frac{\partial h_i(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Matice těchto parciálních derivací se nazývá **Jacobiho matice**.

Potom **Jacobiho determinant** (**jakobián**) je determinant Jacobiho matice

$$
D_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \det \frac{\partial\,\mathbf{h}}{\partial\,\mathbf{x}'} = \det \begin{pmatrix}
\frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}
\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}
\frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}
$$

Označme nyní $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, tj. $y_1 = h_1(\mathbf{x}), \ldots, y_n = h_n(\mathbf{x})$ a připomeňme definici regulárního zobrazení.

Definice 12.1. Říkáme, že zobrazení $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je **regulární** v množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$, právě když
(1) M je **otevřená** množina,
(2) funkce $h_1, \dots, h_n$ mají **spojité první parciální derivace** v M,
(3) pro $\forall\, \mathbf{x} \in M$ je **jakobián nenulový**, tj. $D_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \neq 0$.

Připomeňme, že zobrazení $\mathbf{h}$ je **prosté** na M, jestliže pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$ takové, že $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, je $\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{h}(\mathbf{x}_2)$.

Věta 12.2. Věta o substituci. *Nechť $\mathbf{h}$ je zobrazení otevřené množiny $P \subseteq \mathbb{R}^n$ na $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{h}$ je **regulární** a **prosté** s jakobiánem $D_{\mathbf{h}}$. Budiž $M \subset Q$ **borelovská množina** a budiž $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **měřitelná reálná funkce**. Potom platí*

$$\int_M H(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{h}^{-1}(M)} H(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\, |D_{\mathbf{h}}(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}. \tag{3.12.3}$$

Důkaz. Jarník, V.: *Integrální počet I,II*, NČSAV, Praha, 1955. □
Bezprostředním důsledkem této věty je následující věta.

Věta 12.3. Věta o hustotě transformovaného náhodného vektoru. *Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ má hustotu $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{h}$ je zobrazení $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je regulární a prosté na otevřené množině G, kterou zobrazuje na $\mathbf{h}(G)$ a pro niž platí*

$$\int_G f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1.$$

Nechť $\mathbf{h}^{-1}$ je inverzní zobrazení k $\mathbf{h}$. Potom náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{h}(\mathbf{X})$ má hustotu $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ tvaru

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right) |D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y})| & \text{pro } \mathbf{y} \in \mathbf{h}(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.12.4}$$

Důkaz. Zřejmě platí

$$1 = \int_G f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = P(\mathbf{X} \in G) = P(\mathbf{h}(\mathbf{X}) \in \mathbf{h}(G)) \quad \Rightarrow \quad P(\mathbf{h}(\mathbf{X}) \notin \mathbf{h}(G)) = 0.$$

Proto pro libovolnou borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}^n$ počítejme rozdělení pravděpodobností transformovaného náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{h}(\mathbf{X})$

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{Y}}(B) &= P(\mathbf{Y} \in B) = P(\{\mathbf{Y} \in B\} \cap \{\mathbf{Y} \in \mathbf{h}(G)\}) + \underbrace{P(\{\mathbf{Y} \in B\} \cap \{\mathbf{Y} \notin \mathbf{h}(G)\})}_{=0} \\ &= P(\mathbf{Y} \in B \cap \mathbf{h}(G)) = P(\mathbf{h}(\mathbf{X}) \in B \cap \mathbf{h}(G)) = P\left(\mathbf{X} \in \mathbf{h}^{-1}(B \cap \mathbf{h}(G))\right) \\ &= \int_{\mathbf{h}^{-1}(B \cap \mathbf{h}(G))} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \overset{\substack{\text{věta} \\ \text{o subst.}}}{=} \int_{B \cap \mathbf{h}(G)} f\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right) |D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} + \int_{B \cap (\mathbb{R}^n - \mathbf{h}(G))} 0 d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Pokud položíme $B = (-\infty, y_1\rangle \times \cdots \times (-\infty, y_n\rangle$, a

$$P_{\mathbf{Y}}(B) = P(\mathbf{Y} \in B) = P(\mathbf{Y} \leq \mathbf{y}) = F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$$

a protože

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{dF_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}}$$

odtud ihned dostáváme tvrzení věty, že

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right) |D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y})| & \text{pro } \mathbf{y} \in \mathbf{h}(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

□

Věta 12.4. Zobecněná věta o hustotě transformovaného náhodného vektoru. *Nechť náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ *má hustotu* $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Nechť* $\mathbf{h}$ *je zobrazení* $\mathbb{R}^n$ *do* $\mathbb{R}^n$, *které je regulární a prosté na disjunktních otevřených množinách* $G_1, G_2, \ldots$, *které zobrazuje na množiny* $h(G_1), h(G_2), \ldots$ *a nechť platí*

$$\int\limits_G f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1, \qquad \textit{kde} \qquad G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j.$$

Označme $\mathbf{h}_j^{-1}$ *inverzní zobrazení k* $\mathbf{h} : G_j \to \mathbf{h}(G_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. *Potom náhodný vektor* $\mathbf{Y} = \mathbf{h}(\mathbf{X})$ *má hustotu* $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ *tvaru*

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(\mathbf{y}) \qquad \textit{kde} \qquad f_j(\mathbf{y}) = \begin{cases} f\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right) |D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y})| & \textit{pro } \mathbf{y} \in \mathbf{h}(G_j), \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases} \tag{3.12.5}$$

Důkaz. Provede se analogicky jako v předchozí větě. □

Příklad 12.5. Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ má hustotu $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice typu $n \times n$. Nalezněte hustotu náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$.

Řešení:
Protože $\mathbf{A}$ je regulární matice, je také zobrazení $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ regulární na otevřené množině $G = \mathbb{R}^n$. Inverzní zobrazení je

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}.$$

Označme

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n \qquad \text{a} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \left(a^{ij}\right)_{i,j=1}^n,$$

tedy inverzní zobrazení $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})$ můžeme explicitně rozepsat takto

$$\begin{aligned} x_1 &= a^{11}y_1 + \cdots + a^{n1}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a^{1n}y_1 + \cdots + a^{nn}y_n \end{aligned} \qquad \text{a odtud} \quad D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^{11} & \cdots & a^{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{1n} & \cdots & a^{nn} \end{vmatrix}$$

a protože platí $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$, pak hustota náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ je rovna

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\right) \text{ pro } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Poznámka 12.6. Výpočet hustoty náhodné veličiny, která je transformací náhodného vektoru.

Často potřebujeme počítat hustotu náhodné veličiny Y, která vznikne borelovskou transformací náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$, tedy $Y = h(\mathbf{X})$.

Označme $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$ distribuční funkci náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak zřejmě pro distribuční funkci náhodné veličiny Y platí

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(\mathbf{X}) \leq y) = \int\limits_{h^{-1}(B_y)} dF_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n)$$

kde

$$h^{-1}(B_y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(x_1, \ldots, x_n) \leq y\}.$$

(1) Diskrétní případ $\mathbf{X} \sim (M_{\mathbf{X}}, p_{\mathbf{X}})$

$$\begin{aligned} p_y(y) &= P(Y = y) = P(h(\mathbf{X}) = y) = P\left(\mathbf{X} \in h^{-1}(K_y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \cap M_{\mathbf{X}} : h(\mathbf{x}) = y\}\right) \\ &= \int\limits_{h^{-1}(K_y)} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x} \in h^{-1}(K_y)} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

(2) Spojitý případ $\mathbf{X} \sim f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$: v tomto případě můžeme postupovat dvojím způsobem:

(a) <u>1. způsob</u>: přes distribuční funkci

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(\mathbf{X}) \leq y) = P\left(\mathbf{X} \in h^{-1}(B_y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : h(\mathbf{x}) \leq y\}\right)$$
$$= \int\limits_{h^{-1}(B_y)} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{h^{-1}(B_y)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Hustotu pak dopočítáme jako derivaci distribuční funkce, tj. $f_y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy}$.

(b) <u>2. způsob</u>: **rozšířením** transformace $h(\mathbf{X})$ na regulární transformaci, tj. položíme

$$\mathbf{Y} = (Y, Y_2, \dots, Y_n)' : \quad \begin{array}{l} Y = h(\mathbf{X}) \\ Y_2 = X_2 \\ \vdots \\ Y_n = X_n \end{array} .$$

Pak z této regulární transformace vypočteme inverzní transformaci, její jakobián a dosadíme do vzorce

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f\left(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{y})\right) |D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y})|,$$

čímž získáme sdruženou hustotu celého vektoru $\mathbf{Y} = (Y, Y_2, \dots, Y_n)'$.

Na závěr zbývá dopočítat **marginální hustotu** $f_Y(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{Y}}(y, y_2, \dots, y_n) dy_2 \dots dy_n$.

<u>Příklad</u> 12.7. Součet dvou náhodných veličin s Poissonovým rozdělením. Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny $X_1 \sim Po(\lambda_1)$ a $X_2 \sim Po(\lambda_2)$ s pravděpodobnostními funkcemi

$$X_i \sim p_i(x_i) = \begin{cases} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{x_i}}{x_i!} & x_i = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a s definičními obory $M_i = \{0, 1, 2, \cdots\}$ $(i = 1, 2)$.

Vypočítejme pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Nejprve určíme definiční obor transformované náhodné veličiny $Y \in \{0, 1, 2, \cdots\}$.

Dále označme $h^{-1}(G_y) = \{(x_1, x_2)' \in M_1 \times M_2 : x_1 + x_2 = y\}$.

Pak počítejme pravděpodobnostní funkci transformované náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$

$$p_y(y) = P(Y = y) = P(X_1 + X_2 = y) = P((X_1, X_2)' \in h^{-1}(G_y)) = \sum_{(x_1,x_2)' \in h^{-1}(G_y)} p_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$$

Vidíme, že potřebujeme znát sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$, kterou díky faktu, že jde o nezávislé náhodné veličiny získáme jako součin jejich marginálních pravděpodobnostních funkcí. A můžeme pokračovat ve výpočtu

$$\begin{aligned} p_y(y) &= \sum_{(x_1,x_2)' \in h^{-1}(G_y)} p_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \sum_{(x_1,x_2)' \in h^{-1}(G_y)} p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \\ &= \sum_{x_1=0}^{y} \sum_{x_2=y-x_1} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x_1=0}^{y} \frac{\lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1}}{x_1!(y-x_1)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \sum_{x_1=0}^{y} \frac{y!}{x_1!(y-x_1)!} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \underbrace{\sum_{x_1=0}^{y} \binom{y}{x_1} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1}}_{=(\lambda_1+\lambda_2)^y} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} (\lambda_1 + \lambda_2)^y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

Na základě výsledku, můžeme konstatovat, že sečteme-li dvě nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením, dostaneme náhodnou veličinu, která má opět Poissonovo rozdělení.

Věta 12.8. Součet dvou spojitých náhodných veličin. *Nechť náhodný vektor* $(X_1, X_2)'$ *je absolutně spojitého typu s hustotou* $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$. *Potom náhodná veličina* $Y = X_1 + X_2$ *je absolutně spojitého typu a má hustotu*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(y - x_2, x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(x_1, y - x_1)dx_1 \tag{3.12.6}$$

Důkaz. Postupně dokážeme obě varianty, kdy transformaci $y = h(x_1, x_2)$ rozšíříme dvojím způsobem tak, aby byla regulární.

(a)

$$\begin{aligned} y &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= y - y_2 \\ x_2 &= y_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_{\mathbf{h}^{-1}}(y, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nyní dosadíme do vzorce (3.12.5) a vypočítáme sdruženou hustotu

$$f_{(Y,Y_2)}(y, y_2) = f_{(X_1,X_2)}\left(\mathbf{h}^{-1}(y, y_2)\right)|D_{\mathbf{h}^{-1}}(y, y_2)| = f_{(X_1,X_2)}(y - y_2, y_2)$$

a z této sdružené hustoty dostaneme hustotu marginální

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(y - y_2, y_2)dy_2.$$

(b)

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y - y_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_{\mathbf{h}^{-1}}(y_1, y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Nyní dosadíme do vzorce (3.12.5) a vypočítáme sdruženou hustotu

$$f_{(Y_1,Y)}(y_1, y) = f_{(X_1,X_2)}\left(\mathbf{h}^{-1}(y_1, y)\right)|D_{\mathbf{h}^{-1}}(y_1, y)| = f_{(X_1,X_2)}(y_1, y - y_1)$$

a z této sdružené hustoty dostaneme hustotu marginální

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(y_1, y - y_1)dy_1.$$

□

Důsledek 12.9. *Jestliže jsou náhodné veličiny v předcházející větě 12.8 nezávislé, pak náhodná veličina* $Y = X_1 + X_2$ *má hustotu*

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y - x_2)f_{X_2}(x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(y - x_1)dx_1 \tag{3.12.7}$$

Hustotu $f_Y(y)$ *potom nazýváme* ***konvolucí*** *hustot* f_{X_1} *a* f_{X_2} *a značíme* $f_Y(y) = f_{X_1} * f_{X_2}$.

Podobně jako předchozí věta se dokáže i následující věta.

Věta 12.10. *Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny absolutně spojitého typu s hustotami f_{X_1}, f_{X_2}. Pak*
(1) náhodná veličina $Y = X_1X_2$ má hustotu

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}\left(\frac{y}{x_2}\right) f_{X_2}(x_2)\frac{1}{|x_2|}dx_2, \tag{3.12.8}$$

(2) jestliže platí $f_{X_2}(x_2) = 0$ pro $x_2 \leq 0$ a $c > 0$ je daná konstanta, pak náhodná veličina $Y = \dfrac{cX_1}{X_2}$ má hustotu

$$f_Y(y) = \frac{1}{c}\int_{0}^{\infty} f_{X_1}\left(\frac{yx_2}{c}\right) f_{X_2}(x_2)x_2dx_2. \tag{3.12.9}$$

Důkaz.
(1) Transformaci $y = x_1x_2$ rozšíříme tak, aby byla regulární.

$$\begin{aligned} y &= x_1x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{y}{y_2} \\ x_2 &= y_2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad D_{\mathbf{h}^{-1}}(y, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y}{y_2^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{y_2}.$$

Nyní dosadíme do vzorce (3.12.5) a vypočítáme sdruženou hustotu

$$f_{(Y,Y_2)}(y, y_2) = f_{(X_1,X_2)}\left(\mathbf{h}^{-1}(y, y_2)\right)|D_{\mathbf{h}^{-1}}(y, y_2)| = f_{X_1}\left(\frac{y}{y_2}\right) f_{X_2}(y_2)\frac{1}{|y_2|}$$

a z této sdružené hustoty dostaneme hustotu marginální

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}\left(\frac{y}{y_2}\right) f_{X_2}(y_2)\frac{1}{|y_2|}dy_2.$$

(2) Transformaci $y = \frac{cx_1}{x_2}$ opět rozšíříme tak, aby byla regulární.

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{cx_1}{x_2} \\ y_2 &= x_2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{yy_2}{c} \\ x_2 &= y_2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad D_{\mathbf{h}^{-1}}(y, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{c} & \frac{y}{c} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{y_2}{c}.$$

Nyní dosadíme do vzorce (3.12.5) a vypočítáme sdruženou hustotu

$$f_{(Y,Y_2)}(y, y_2) = f_{(X_1,X_2)}\left(\mathbf{h}^{-1}(y, y_2)\right)|D_{\mathbf{h}^{-1}}(y, y_2)| = f_{X_1}\left(\frac{yy_2}{c}\right) f_{X_2}(y_2)\frac{|y_2|}{c}$$

a z této sdružené hustoty dostaneme hustotu marginální

$$f_Y(y) = \frac{1}{c}\int_{0}^{\infty} f_{X_1}\left(\frac{yy_2}{c}\right) f_{X_2}(y_2)y_2dy_2.$$

□

13. Základní vlastnosti normálního a odvozených rozdělení

Připomeňe, že náhodná veličina X má **normální (Gaussovo) rozdělení** s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$, pokud její hustota má pro $x \in \mathbb{R}$ tvar

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \text{a píšeme} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Jestliže $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, říkáme, že náhodná veličina má **standardizované** (též normované) **normální rozdělení** a píšeme $X \sim N(0, 1)$.

VĚTA 13.1. *Mějme náhodnou veličinu s normálním rozdělením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Dále nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ jsou reálné konstanty. Potom náhodná veličina, která je lineární transformací původní, má opět normální rozdělení, a to*

$$Y = a + bX \;\sim\; N(a + b\mu, b^2\sigma^2).$$

Speciálně náhodná veličina

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

má ***standardizované normální rozdělení.***

Důkaz. K transformaci $y = a + bx$ existuje inverzní transformace $h^{-1}(y) = \frac{y-a}{b}$, která má derivaci $\frac{dh^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{b}$, takže hustota transformované náhodné veličiny je rovna

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b|\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{[y-(a+b\mu)]^2}{b^2\sigma^2}} \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Pokud položíme $a = -\frac{\mu}{\sigma}$ a $b = \frac{1}{\sigma}$, dostaneme: $U = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. □

Připomeňme definici <u>VÍCEROZMĚRNÉHO NORMÁLNÍHO ROZDĚLENÍ</u>: náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ má n **rozměrné normální (Gaussovo) rozdělení** s parametry $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{\Sigma} > 0$, pokud jeho hustota má tvar

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\,|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

a píšeme

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \;\sim\; N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Pro $n = 2$ má hustota tvar

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

a značíme

$$(X_1, X_2)' \;\sim\; N_2(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$$

VĚTA 13.2. SOUČET DVOU NORMÁLNÍCH NÁHODNÝCH VELIČIN. *Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ má dvourozměrné normální rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu} = \binom{\mu_1}{\mu_2}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$, tj. má hustotu tvaru*

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}.$$

Pak náhodná veličina

$$Y = X_1 + X_2$$

má také normální rozdělení a platí

$$Y = X_1 + X_2 \;\sim\; N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2).$$

Důkaz. Mějme náhodný vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, který je definován takto

$$\begin{array}{rclcl} Y_1 & = & X_1 + X_2 & = & h_1(X_1, X_2) \\ Y_2 & = & X_2 & = & h_2(X_1, X_2) \end{array}.$$

Vypočtěme inverzní zobrazení

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & = & y_1 - y_2 & = & h_1^{-1}(y_1, y_2) \\ x_2 & = & y_2 & = & h_2^{-1}(y_1, y_2) \end{array}$$

a jakobián

$$D_{\mathbf{h}^{-1}}(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Sdružená hustota náhodného vektoru $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ je pak tvaru

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1, y_2) = f_{(X_1,X_2)}(y_1 - y_2, y_2) \cdot 1$$

a odtud pak **marginální hustota**

$$f_{Y_1}(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(y_1 - y_2, y_2)dy_2$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y_1-y_2-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{y_1-y_2-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} dy_2$$

Mějme substituce $\begin{array}{rcl} v & = & y_2 - \mu_2 \\ u & = & y_1 - \mu_1 - \mu_2 \end{array}$. Pak $u - v = y_1 - \mu_1 - \mu_2 - y_2 + \mu_2 = y_1 - y_2 - \mu_1$ a

$$f_{Y_1}(u) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[\sigma_2^2(u-v)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(u-v)v + \sigma_1^2 v^2\right]\right\} dv.$$

Položme $\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2} = a$. Pak

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(u) &= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}(\sigma_2^2 u^2 - 2\sigma_2^2 uv + \sigma_2^2 v^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 uv + 2\rho\sigma_1\sigma_2 v^2 + \sigma_1^2 v^2)\right\} dv \\ &= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left[\left(\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)v^2 + 2\sigma_2\left(\sigma_2 + \rho\sigma_1\right)uv + \sigma_2^2 u^2\right]\right\} dv \end{aligned}$$

Dále položme $\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = b^2$ a $\sigma_2\left(\sigma_2 + \rho\sigma_1\right)u = c$. Potom

$$f_{Y_1}(u) = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left[\left(bv - \frac{c}{b}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \sigma_2^2 u^2\right]\right\} dv$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{bv - c/b}{a}\right)^2\right\} dv.$$

Uvažujme substituci $w = \frac{bv-c/b}{a}$, pak $dv = \frac{a}{b}dw$ a

$$f_{Y_1}(u) = \frac{a}{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}w^2\right\}dw}_{=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\}.$$

Protože

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2} &= \sigma_2^2 u^2 - \frac{\left[\sigma_2\left(\sigma_2 + \rho\sigma_1\right)u\right]^2}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_2^2 u^2 - \frac{\sigma_2^2 u^2(\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \rho^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{\sigma_2^2 u^2(\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 - \rho^2\sigma_1^2)}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)u^2}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \\ &= \frac{a^2}{b^2}u^2, \end{aligned}$$

pak náhodná veličina $Y = Y_1$ má hustotu

$$f_{Y_1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\exp\left\{-\frac{1}{2a^2}\left(\sigma_2^2 u^2 - \frac{c^2}{b^2}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{b}\right)^2\right\}$$

a po zpětném dosazení $\begin{array}{rcl} u & = & y_1 - \mu_1 - \mu_2 \\ b^2 & = & \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 \end{array}$ máme

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(y_1 - \mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}\right\}$$

t.j.

$$Y \quad \sim \quad N\left(\mu_Y = \mu_1 + \mu_2, \sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)$$

□

VĚTA 13.3. LINEÁRNÍ KOMBINACE NORMÁLNÍCH NÁHODNÝCH VELIČIN. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou* ***nezávislé*** *náhodné veličiny takové, že*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Nechť

$$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \quad a \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 > 0.$$

Potom náhodná veličina, která je lineární transformací normálních náhodných veličin má opět normální rozdělení, t.j.

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad \sim \quad N\left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right).$$

Důkaz. Provedeme matematickou indukcí.

(1) Nechť $n = 1$. Pak z předpokladů věty je $a_1 \neq 0$ a z věty 13.1 plyne, že

$$Y = a_0 + a_1 X \sim N(a_0 + a_1\mu_1, a_1^2\sigma_1^2).$$

(2) Nechť tvrzení věty platí pro libovolné přirozené $n \geq 1$ a $X_1, \ldots, X_{n+1}$ jsou nezávislé náhodné veličiny takové, že

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Je-li $a_{n+1} = 0$, pak zřejmě

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i X_i \sim N(a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\sigma_i^2).$$

Je-li $a_{n+1} \neq 0$, pak

$$Y = \underbrace{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i}_{Y_1} + \underbrace{a_{n+1}X_{n+1}}_{Y_2} = Y_1 + Y_2$$

je součtem dvou nezávislých náhodných veličin.

První náhodná veličina Y_1 má podle indukčního předpokladu normální rozdělení

$$Y_1 \sim N(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2)$$

je-li alespoň jedno z čísel $a_1, \ldots, a_n$ různé od nuly, v opačném případě je tvrzení zřejmé.

Druhá náhodná veličina Y_2 má podle věty 13.1 normální rozdělení

$$Y_2 \sim N(a_{n+1}\mu_{n+1}, a_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2).$$

Náhodný vektor $(Y_1, Y_2)'$ vytvořený ze dvou nezávislých normálních náhodných veličin má normální rozdělení

$$(Y_1, Y_2)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde $\boldsymbol{\mu} = \left(a_0 + \sum_{i=1}^n a_i\mu_i, a_{n+1}\mu_{n+1}\right)'$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2 & 0 \\ 0 & a_{n+1}^2\sigma_{n+1}^2 \end{pmatrix}$ tedy $\rho = 0$.

Pak podle věty 13.2 dostaneme

$$Y = Y_1 + Y_2 \sim N\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

□

Následující definice zavádí další typ rozdělení, které budeme při transformaci normálních náhodných veličin dále potřebovat.

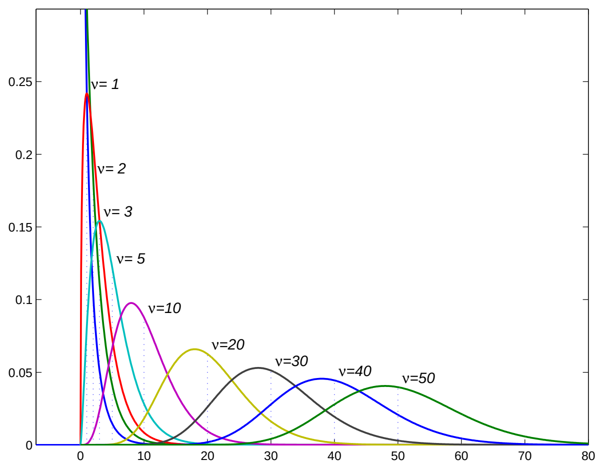
Definice 13.4. χ^2 rozdělení. Řekneme, že náhodná veličina X má χ^2 rozdělení s $\nu > 0$ stupni volnosti, pokud její hustota má tvar

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

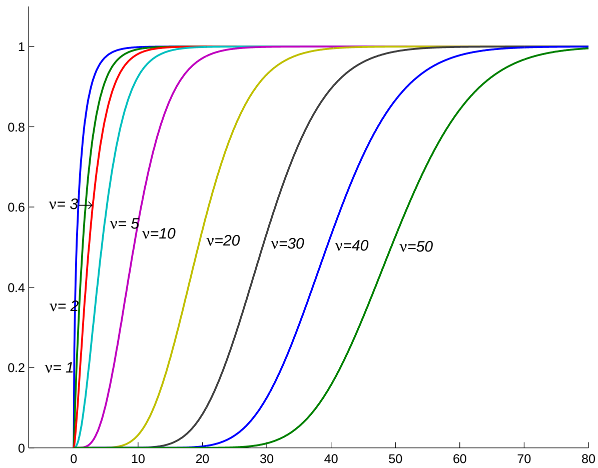
a budeme psát

$$X \sim \chi^2(\nu).$$

Grafy hustot χ^2 rozdělení



Grafy distribučních funkcí χ^2 rozdělení



Věta 13.5. Součet n nezávislých χ^2 veličin.
Nechť $U_1, \ldots, U_n$ jsou ***nezávislé*** *náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozdělením, t.j.*

$$U_i \sim N(0,1) \qquad \textit{pro} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Pak náhodná veličina

$$K = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \sim \chi^2(n)$$

má χ^2 rozdělení o n stupních volnosti.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí.

(1) Nejprve dokážeme tvrzení pro $n = 1$. Pro $u \geq 0$ počítejme distribuční funkci $F_{U_1^2}(u)$ (pro $u < 0$ je zřejmě nulová)

$$F_{U_1^2}(u) = P(U_1^2 \leq u) = P(|U_1| \leq \sqrt{u}) = F_{U_1}(\sqrt{u}) - F_{U_1}(-\sqrt{u}).$$

Odtud pak derivací získáme hustotu $f_{U_1^2}(u) = F'_{U_1^2}(u)$, tj.

$$\begin{aligned} f_{U_1^2}(u) &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \left[f_{U_1}(\sqrt{u}) + f_{U_1}(-\sqrt{u}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{u}} e^{-\frac{1}{2}u} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}u} \end{aligned}$$

(neboť $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$), a tedy $f_{U_1^2}(u)$ odpovídá hustotě rozdělení $\chi^2(1)$.

(2) Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \geq 1$ a dokážeme je pro $n+1$. Podle Důsledku 12.9 je

$$\begin{aligned} f_{U_1^2+\cdots+U_{n+1}^2}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U_1^2+\cdots+U_n^2}(u-x) f_{U_{n+1}^2}(x)dx \\ &= \int_0^u \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(u-x)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(u-x)}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}dx \\ &= \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^u (u-x)^{\frac{n}{2}-1}x^{-\frac{1}{2}}dx. \end{aligned}$$

Připomeňme si nyní beta funkci z příkladu 6.5. Ta je definovaná předpisem $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ a platí vztah mezi beta a gamma funkcí $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Substitucí $t = \frac{x}{u},\ udt = dx$ dostáváme

$$\begin{aligned} f_{U_1^2+\cdots+U_{n+1}^2}(u) &= \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^u (u-x)^{\frac{n}{2}-1}x^{-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-t)^{\frac{n}{2}-1}t^{-\frac{1}{2}}dt \\ &= \frac{e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{u}{2}}u^{\frac{n+1}{2}-1}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

což odpovídá hustotě rozdělení $\chi^2(n+1)$.

□

Nyní zavedeme další rozdělení, které souvisí s transformací normálních náhodných veličin.

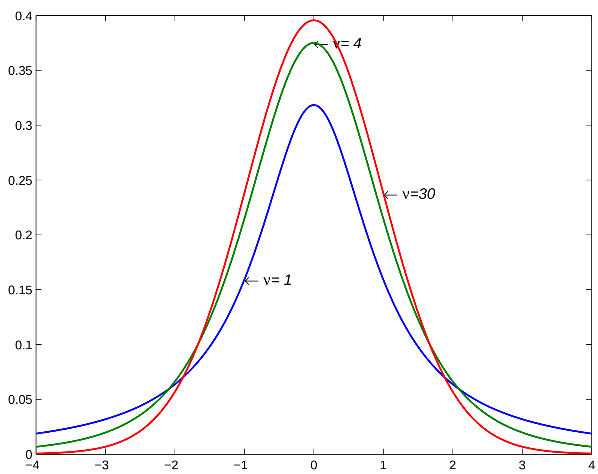
Definice 13.6. Studentovo rozdělení. Řekneme, že náhodná veličina X má **Studentovo t rozdělení o $\nu > 0$ stupních volnosti**, pokud její hustota je tvaru

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\nu^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

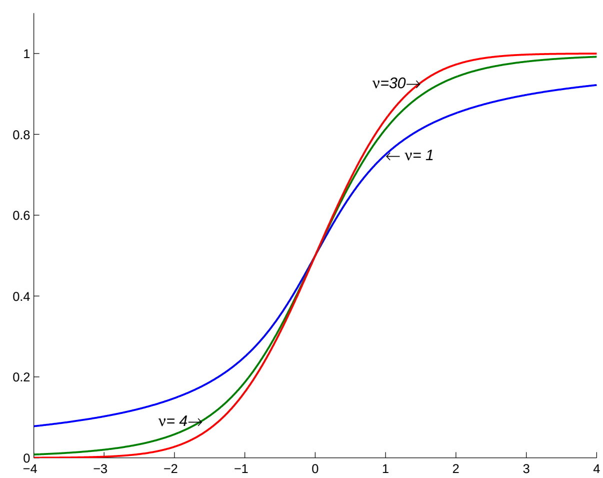
Pak píšeme

$$X \quad \sim \quad t(\nu).$$

Grafy hustot Studentova t rozdělení



Grafy distribučních funkcí Studentova t rozdělení



Věta 13.7. *Nechť náhodné veličiny* $U \sim N(0,1)$ *a* $K \sim \chi^2(\nu)$ *jsou* ***nezávislé****. Pak náhodná veličina*

$$T = \frac{U}{\sqrt{K/\nu}} \sim t(\nu)$$

má Studentovo t rozdělení o ν *stupních volnosti.*

Důkaz. Náhodnou veličinu T zapíšeme ve tvaru $T = \frac{\sqrt{\nu}U}{\sqrt{K}}$ a využijeme tvrzení (2) Věty 13.1 o hustotě podílu dvou náhodných veličin. Odtud je

$$f_T(u) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_0^\infty f_U\left(\frac{ux}{\sqrt{\nu}}\right) f_{\sqrt{K}}(x) x dx. \tag{3.13.10}$$

Nejprve vyjádříme hustotu $f_{\sqrt{K}}(x)$ z distribuční funkce $F_{\sqrt{K}}(x)$. Připomeňme, že hustota náhodné veličiny K je tvaru

$$f_K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Pro $y \geq 0$ počítejme distribuční funkci $F_{\sqrt{K}}(y)$

$$F_{\sqrt{K}}(y) = P(\sqrt{K} \leq y) = P(K \leq y^2) = \int_0^{y^2} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx.$$

Substitucí $x = t^2$ dostáváme

$$F_{\sqrt{K}}(y) = \int_0^y \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} t^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \Rightarrow f_{\sqrt{K}}(x) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Dosazením do vztahu (3.13.10) dostáváme

$$\begin{aligned} f_T(u) &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2x^2}{2\nu}} \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\nu-1} e^{-\frac{1}{2}x^2} x dx \\ &= \frac{1}{2^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{u^2}{\nu}+1\right)} x^{\nu-1} x dx. \end{aligned}$$

Provedením substituce $t = \frac{x^2}{2}\left(\frac{u^2}{\nu}+1\right)$ upravíme na tvar

$$\begin{aligned} f_T(u) &= \frac{2^{\frac{\nu-1}{2}}}{2^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\nu}\left(\frac{u^2}{\nu}+1\right)^{\frac{\nu+1}{2}}} \underbrace{\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\nu+1}{2}-1} dt}_{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \nu^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{u^2}{\nu}+1\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \end{aligned}$$

□

A nakonec zavedeme poslední rozdělení související s trasformacemi normálního rozdělení.

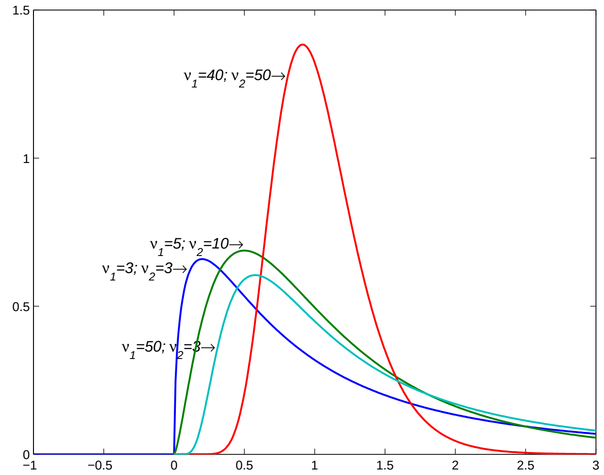
Definice 13.8. Fisherovo–Snedecorovo F rozdělení. Řekneme, že náhodná veličina X má **Fisherovo–Snedecorovo F rozdělení o $\nu_1 > 0$ a $\nu_2 > 0$ stupních volnosti**, pokud její hustota je tvaru

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} y^{\frac{\nu_1}{2}-1} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} y + 1\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} & y \geq 0, \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

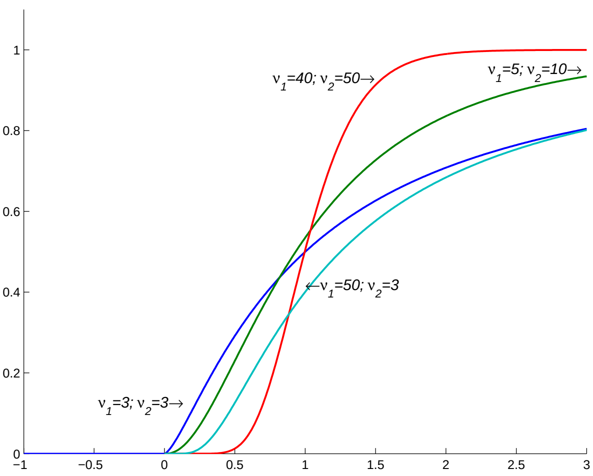
Pak píšeme

$$X \quad \sim \quad F(\nu_1, \nu_2).$$

Grafy hustot Fisherova–Snedecorova F rozdělení



Grafy distribučních funkcí Fisherova–Snedecorova F rozdělení



Věta 13.9. *Nechť K_1 a K_1 jsou* ***nezávislé*** *náhodné veličiny a*

$$K_i \sim \chi^2(\nu_i), \qquad i = 1, 2.$$

Pak náhodná veličina

$$F = \frac{K1/\nu_1}{K2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2)$$

má Fisherovo–Snedecorovo F rozdělení o ν_1 a ν_2 stupních volnosti.

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny K_i je rovna

$$f_{K_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\nu_i}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)} x_i^{\frac{\nu_i}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x_i} & x_i \geq 0 \\ 0 & x_i < 0 \end{cases}$$

Opět využijeme tvrzení (2) Věty 13.1 o hustotě podílu dvou náhodných veličin. Odtud je

$$f_F(u) = \frac{\nu_1}{\nu_2} \int_0^\infty f_{K_1}\left(\frac{ux\nu_1}{\nu_2}\right) f_{K_2}(x) x dx.$$

Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} f_F(u) &= \frac{\nu_1}{\nu_2} \int_0^\infty \frac{1}{2^{\frac{\nu_1}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)} \left(\frac{ux\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ux\nu_1}{\nu_2}\right)} \frac{1}{2^{\frac{\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} x^{\frac{\nu_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} x dx \\ &= \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \frac{u^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x\left(\frac{u\nu_1}{\nu_2}+1\right)} dx. \end{aligned}$$

Provedením substituce $t = \frac{x}{2}\left(\frac{u\nu_1}{\nu_2}+1\right)$ upravíme na tvar

$$f_F(u) = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{\nu_2}} \frac{u^{\frac{\nu_1}{2}-1} 2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \left(\frac{u\nu_1}{\nu_2}+1\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}{2^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \underbrace{\int_0^\infty t^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} e^{-t} dt}_{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} u^{\frac{\nu_1}{2}-1} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}u+1\right)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}.$$

□

Věta 13.10. Lineární transformace normálních náhodných vektorů. *Nechť náhodný vektor*

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

*má $n-$rozměrné normální rozdělení a $\mathbf{B}$ je **regulární** matice reálných čísel typu $n \times n$, dále nechť $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ je vektor reálných čísel. Potom náhodný vektor*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} \;\sim\; N_n(\mathbf{a} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}).$$

Důkaz. Hustota pravděpodobnosti náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je tvaru

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Inverzní transformace k transformaci $\mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{x}$ je rovna

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{a}),$$

přičemž jakobián této inverzní transformace je roven

$$D_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{y}) = \left|\mathbf{B}^{-1}\right| = |\mathbf{B}|^{-1}.$$

Pak hustotu transformované náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X}$ lze vyjádřit takto

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= f_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a}))|\mathbf{B}|^{-1} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}|\mathbf{B}|^{-1} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\boldsymbol{\mu}]'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a})-\boldsymbol{\mu}]\right\} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{a}-\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})'|\mathbf{B}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}|^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{a}-\mathbf{B}\boldsymbol{\mu})\right\}. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

Věta 13.11. Speciální transformace nezávislých normálních náhodných veličin. *Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé** náhodné veličiny takové, že*

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2), \quad i = 1, \ldots, n$$

*a $\mathbf{B}$ je **ortonormální** matice typu $n \times n$. Položme $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ a*

$$\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)' = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

*kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$. Potom Y_j jsou **nezávislé** náhodné veličiny a*

$$Y_j \sim N(0, \sigma^2).$$

Důkaz. Protože $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, má náhodný vektor $\mathbf{X}$ hustotu

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \left[\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x_i-\mu_i}{\sigma}\right)^2\right\}\right] = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(\tfrac{x_i-\mu_i}{\sigma}\right)^2\right\} \;\sim\; N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}_n$.

Je-li $\mathbf{B}$ ortonormální matice, tj.

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}',$$

pak z věty 13.10 plyne, že náhodný vektor

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \quad \sim \quad N_n(\mathbf{O}, \mathbf{B}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}),$$

přičemž

$$\mathbf{B}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{B}'\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{I}_n$$

s hustotou tvaru

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\tfrac{1}{2} \left(\tfrac{y_j}{\sigma} \right)^2 \right\} \right] = \prod_{j=1}^{n} f_{Y_j}(y_j).$$

Odtud plyne tvrzení věty. □

KAPITOLA 4

Číselné charakteristiky rozdělení pravděpodobností

1. Střední hodnota, její vlastnosti a výpočet

Definice 1.1. Nechť X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť existuje integrál $\int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) < \infty$. Potom číslo

$$EX = \int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega)$$

nazýváme **střední hodnotou náhodné veličiny** X. Pokud uvedený integrál **není konečný** nebo **neexistuje**, říkáme, že **střední hodnota náhodné veličiny** X **neexistuje**.

Poznámka 1.2. Z definice střední hodnoty náhodné veličiny plyne, že EX existuje, právě když náhodná veličina X (což je borelovsky měřitelná funkce $X(\omega)$) je integrovatelná na Ω vzhledem k pravděpodobnostní míře P.

Často se symbolem $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ značí množina všech náhodných veličin definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, které mají **konečné střední hodnoty**.

Z vlastností integrovatelných funkcí ihned plynou následující základní vlastnosti střední hodnoty.

Věta 1.3. *Nechť X, X_1, X_2 jsou náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Potom*

(1) EX existuje $\quad\Leftrightarrow\quad$ $E|X|$ existuje.

(2) Jestliže $P(X = a) = 1 \quad\Rightarrow\quad EX = a$.

(3) Existují-li EX_1, $EX_2 \quad\Rightarrow\quad E(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1EX_1 + a_2EX_2$.

(4) Nechť existují EX_1, EX_2 a platí $X_1 \le X_2 \quad\Rightarrow\quad EX_1 \le EX_2$.

(5) Nechť $|X_1| \le X_2$ a EX_2 existuje $\quad\Rightarrow\quad EX_1$ existuje.

(6) Nechť $P(X \ge 0) = 1 \quad\Rightarrow\quad EX \ge 0$.

Další vlastnosti střední hodnoty, zejména vzorce vhodné pro její výpočet, plynou ze známé věty o přenosu integrace z měřitelného prostoru $(\Omega, \mathcal{A})$ na měřitelný prostor $(\Lambda, \mathcal{D})$ pomocí měřitelné funkce h. Tuto větu budeme citovat pro případ, kdy $(\Lambda, \mathcal{D}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.

Věta 1.4. Věta o přenosu integrace. *Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je n-rozměrný náhodný vektor definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, g je borelovsky měřitelná funkce na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, $P_{\mathbf{X}}$ je rozdělení pravděpodobností náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Potom*

$$\int_\Omega g(\mathbf{X}(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$$

Poznámka 1.5. Má-li náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ distribuční funkci $F(\mathbf{x})$, potom rozdělení pravděpodobností $P_{\mathbf{X}} = \mu_F$, kde μ_F je *Lebesgueova-Stieltjesova míra* indukovaná distribuční funkcí F a můžeme psát

$$\int_\Omega g(\mathbf{X}(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})dP_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})d\mu_F \overset{\text{značíme}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}).$$

Důsledek 1.6. *Nechť X je náhodná veličina, resp. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom platí*

(1) Existuje-li střední hodnota EX, potom existuje konečný integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$ a naopak. V tomto případě platí $\boxed{EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF(x)}$, *tj.* $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} xdF(x) < \infty$.

(a) Nechť $X \sim (M, p)$ je diskrétního typu, pak platí $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow \sum\limits_{x \in M} xp(x)$ absolutně konverguje. V tomto případě $\boxed{EX = \sum\limits_{x \in M} xp(x)}$.

(b) Nechť $X \sim f(x)$ je absolutně spojitého typu. Potom z existence střední hodnoty EX plyne integrovatelnost funkce $xf(x)$ vzhledem k Lebesgueově míře a naopak. V tomto případě platí $\boxed{EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$, *tj. $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow xf(x)$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře.*

(2) Nechť $g(x)$ je borelovská funkce. Potom střední hodnota transformované náhodné veličiny $Y = g(X)$ existuje právě když existuje a je konečný integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) < \infty$. V tomto případě platí $\boxed{EY = Eg(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)}$.

(a) Nechť $X \sim (M, p)$ je diskrétního typu, pak platí $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow \sum\limits_{x \in M} g(x)p(x)$ absolutně konverguje. V tomto případě $\boxed{EY = Eg(X) = \sum\limits_{x \in M} g(x)p(x)}$.

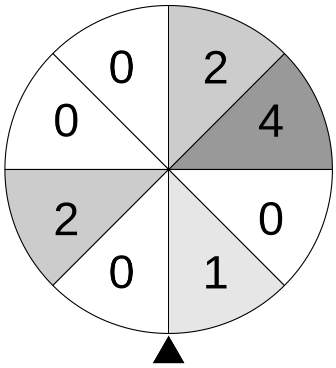
(b) Nechť $X \sim f(x)$ je absolutně spojitého typu. Potom EY existuje právě když je funkce $g(x)f(x)$ integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře a přitom platí $\boxed{EY = Eg(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx}$, *tj. $EY = Eg(X) \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow g(x)f(x)$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře.*

(3) Nechť $g(x_1, \ldots, x_n)$ borelovská funkce. Potom střední hodnota náhodné veličiny $Y = g(\mathbf{X})$ existuje, právě když existuje integrál $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}) < \infty$. V tomto případě $\boxed{EY = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}).}$ *Dále*

(a) Nechť $\mathbf{X} \sim (M, p)$ je diskrétního typu, pak platí $Y \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow \sum\limits_{x \in M} g(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ absolutně konverguje. V tomto případě $\boxed{EY = Eg(\mathbf{X}) = \sum\limits_{\mathbf{x} \in M} g(\mathbf{x})p(\mathbf{x})}$.

(b) Nechť $\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x})$ je absolutně spojitého typu. Potom EY existuje právě když je funkce $g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře a přitom platí $\boxed{EY = Eg(\mathbf{X}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x}}$, *tj. $EY = Eg(\mathbf{X}) \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \Leftrightarrow g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ je integrovatelná vzhledem k Lebesgueově míře.*

Příklad 1.7. Motivační příklad
Jak bylo uvedeno v definici, střední hodnotu náhodné veličiny označujeme písmenem E. Toto označení pochází z anglického „expected value“ (očekávaná hodnota). V tomto příkladu bychom chtěli demonstrovat význam slova „očekávaný“.
Uvažujme hru „kolo štěstí“, kde účastník hry roztočí kolo znázorněné na obr. 1. Každé pole tohoto



Obrázek 1. „Kolo štěstí“

kola definuje výhru (v Kč), která bude vyplacena hráči v případě, že na toto pole ukazuje šipka po zastavení kola. Za každou hru zaplatí hráč provozovateli 1 Kč. Zajímá nás, z pohledu hráče, jestli se nám vyplatí takovou hru hrát, tj. jaká je „očekávaná“ hodnota našeho zisku.

Řešení:
Označme Y náhodnou veličinu, která udává náš zisk z jedné hry a dále označme X náhodnou veličinu udávající částku, kterou si vytočíme na kole v jedné hře. Zřejmě platí $Y = X - 1$. Hodnoty náhodné veličiny X a její pravděpodobnostní funkce jsou uvedeny v následující tabulce:

X	0	1	2	4
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Střední hodnota (tj. očekávaná hodnota) našeho zisku z jedné hry je tedy

$$\begin{aligned} EY &= EX - 1 \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} - 1 \\ &= \frac{1}{8} = 0,125. \end{aligned}$$

To znamená, že se nám hru vyplatí hrát, neboť např. při 1 000 opakováních je očekávaný zisk 125 Kč.

Příklad 1.8. Střední hodnota Poissonova rozdělení. Mějme náhodnou veličinu $X \sim Po(\lambda)$ s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & x \in M = \{0, 1, \ldots, \} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Počítejme střední hodnotu

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{x=0}^{\infty} xp(x) = \sum_{x=0}^{\infty} xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \left|subst.\ y = x-1\right| = \lambda\, \underbrace{e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}}_{1=\sum\limits_{y\in M} p(y)} = \lambda.
\end{aligned}
$$

<u>Příklad</u> 1.9. Střední hodnota normálního (Gaussova) rozdělení. Mějme náhodnou veličinu s normálním rozdělením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s hustotou

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.
$$

Počítejme

$$
EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx.
$$

Položíme-li $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, tj. $x = \sigma y + \mu$ a $dx = \sigma dy$, pak

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}xe^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y+\mu)e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{1}{2}y^2}dy}_{=0\text{ (lichá funkce)}} + \mu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy}_{=1\text{ (hustota } Y\sim N(0,1))} = \mu.
\end{aligned}
$$

Věta 1.10. Střední hodnota součinu nezávislých náhodných veličin. *Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou **nezávislé** náhodné veličiny definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a nechť existují střední hodnoty $EX_1, \dots, EX_n$. Pak platí*

$$
E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} EX_i. \tag{4.1.11}
$$

Důkaz. Položme $Y_i = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, tj. $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$. S využitím faktu, že $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pro které musí platit $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot \dots \cdot F_n(x_n)$, počítejme střední hodnotu transformované náhodné veličiny

$$
\begin{aligned}
EY &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x})dF(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot \dots \cdot x_n dF(x_1, \dots, x_n) \\
&\overset{nez.}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot \dots \cdot x_n\,[dF_1(x_1)\cdot \dots \cdot dF_n(x_n)] = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1 dF_1(x_1)}_{=EX_1<\infty} \cdot \dots \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_n dF_n(x_n)}_{=EX_n<\infty} \\
&= EX_1 \cdot \dots \cdot EX_n.
\end{aligned}
$$

□

2. Obecné a centrální momenty

Definice 2.1. Nechť X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Potom čísla

$\mu'_k = EX^k$ **obecným**

$\mu_k = E(X-EX)^k$ nazýváme $\boxed{k\text{-tým}}$ **centrálním** **momentem** náhodné veličiny X

$\bar{\mu}_k = E|X|^k$ **absolutním**

za předpokladu, že uvedené střední hodnoty pro $k = 1, 2, \dots$ existují.

Poznámka 2.2. Je-li k-tý moment konečný, tj. $EX^k < \infty$, píšeme $X \in \mathcal{L}_k(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nebo zkráceně $X \in \mathcal{L}_k$.

Věta 2.3. Vlastnosti momentů. *Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ existuje $\mu'_n = EX^n < \infty$. Potom platí*

(1) Existují
$$\boxed{\begin{array}{lcll} \mu'_k & = & EX^k & < \infty \\ \mu_k & = & E(X-EX)^k & < \infty \\ \bar{\mu}_k & = & E|X|^k & < \infty \end{array}} \qquad \text{pro libovolná } k \le n$$

(2) Dále platí
$$(\bar{\mu}_k)^{\frac{1}{k}} = \left(E|X|^k\right)^{\frac{1}{k}} \le (\bar{\mu}_n)^{\frac{1}{n}} = (E|X|^n)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{pro libovolná } k \le n \tag{4.2.12}$$

Důkaz. Tvrzení (1) vyplývá z vlastností Lebesgueových integrálů; v tvrzení (2) jde o speciální případ tzv. Hölderovy nerovnosti. □

Definice 2.4.

(1) Řekneme, že náhodná veličina X má **konečný druhý moment**, jestliže $\boxed{\mu'_2 = EX^2 < \infty}$.

(2) Druhý centrální moment nazýváme **rozptyl** a značíme $\boxed{DX = E(X-EX)^2 = \mu_2}$.

(3) Číslo $\sigma_X = \sqrt{DX}$ nazýváme **směrodatnou odchylkou** náhodné veličiny X.

Věta 2.5. Vlastnosti rozptylu. *Nechť X, X_1, X_2 jsou náhodné veličiny definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s konečnými druhými momenty, $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Pak*

(1) $DX \ge 0$

(2) $DX = EX^2 - (EX)^2$

(3) Jestliže $P(X = a) = 1$, pak $DX = 0$.

(4) $D(a_1 + a_2X) = a_2^2 DX$

(5) Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny, pak $D(X_1 + X_2) = DX_1 + DX_2$.

Důkaz.

(1) Protože pro transformovanou náhodnou veličinu $Y = (X - EX)^2$ platí , že $P(Y \ge 0) = 1$, pak $EY \ge 0$, přičemž $EY = DX$.

(2) $DX = E(X-EX)^2 = E\left[X^2 - 2(EX)\cdot X + (EX)^2\right] = EX^2 - 2EX\cdot EX + EX^2 = EX^2 - (EX)^2$

(3) Jestliže $P(X = a) = 1$, pak X je diskrétní náhodná veličina, tj.
$$X \sim (M, p_X), \qquad \text{kde} \qquad M = \{a\} \qquad \text{a} \qquad p_X(x) = \begin{cases} 1 & x = a, \\ 0 & \textit{jinak}. \end{cases}$$
takže
$$EX = \sum_{x\in M} x p_X(x) = a p_X(a) = a \qquad \text{a} \qquad DX = \sum_{x \in M} (x-a)^2 p_X(x) = (a-a)^2 \cdot 1 = 0$$

(4)
$$\begin{aligned} D(a_1 + a_2X) &= E\left[a_1 + a_2X - E(a_1 + a_2X)\right]^2 = E\left[a_1 + a_2X - a_1 - a_2EX\right]^2 \\ &= E\left[a_2(X - EX)\right]^2 = a_2^2 E(X-EX)^2 = a_2^2 DX \end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned} D(X_1+X_2) &= E\left[X_1+X_2-E(X_1+X_2)\right]^2 = E\left[X_1+X_2-EX_1-EX_2\right]^2 \\ &= E\left[(X_1-EX_1)+(X_2-EX_2)\right]^2 \\ &= E\left[(X_1-EX_1)^2+2(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)+(X_2-EX_2)^2\right] \\ &= \underbrace{E(X_1-EX_1)^2}_{=DX_1} + 2\underbrace{E[(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)]}_{\overset{nez.}{=} E(X_1-EX_1)\cdot E(X_2-EX_2)=0\cdot 0} + \underbrace{E(X_2-EX_2)^2}_{=DX_2} = DX_1 + DX_2 \end{aligned}$$
□

Příklad 2.6. Rozptyl Poissonova rozdělení. Mějme náhodnou veličinu $X \sim Po(\lambda)$ s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & x \in M = \{0, 1, \dots, \} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Abychom mohli vypočítat rozptyl

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

potřebujeme znát střední hodnotu, a ta je rovna $EX = \lambda$ (viz příklad 1.8). Dále počítejme

$$\begin{aligned} EX^2 &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}[x(x-1)+x]\frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x(x-1)(x-2)!} + \underbrace{e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!}}_{=EX=\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda \\ &= \lambda^2\sum_{y=0}^{\infty}\underbrace{e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{(y)!}}_{=1=\sum\limits_{y\in M} p(y)} + \lambda = \lambda^2 + \lambda, \end{aligned}$$

takže

$$DX = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Příklad 2.7. Rozptyl normálního (Gaussova) rozdělení. Mějme náhodnou veličinu s normálním rozdělením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ s hustotou

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

Počítejme rozptyl přímo podle definice

$$DX = E(X-EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx.$$

Položíme-li $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, tj. $x - \mu = \sigma y$ a $dx = \sigma dy$, potom

$$\begin{aligned} \boxed{DX} &= \int_{-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx \\ &= \tfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}}_{\text{sudá funkce}}dy \\ &= 2\int_0^{\infty}\tfrac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}dy. \end{aligned}$$

Položme $\frac{1}{2}y^2 = t$, tj. $y = \sqrt{2t}$ a $ydy = dt$. Potom dostaneme

$$\boxed{DX} = \sigma^2\int_0^{\infty}\tfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2t}e^{-t}dt = \sigma^2\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t}dt = \boxed{\sigma^2},$$

protože

$$\int_0^{\infty}t^{\frac{3}{2}-1}e^{-t} = \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Věta 2.8. Čebyševova nerovnost. *Nechť X je náhodná veličina s konečným druhým momentem. Potom pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí*

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{4.2.13}$$

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme $M_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - EX| \geq \varepsilon\}$. Potom

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 dF(x) \geq \int_{M_\varepsilon} \underbrace{(x - EX)^2}_{\geq \varepsilon^2} dF(x) \\ &\geq \varepsilon^2 \int_{M_\varepsilon} dF(x) = \varepsilon^2 P(X \in M_\varepsilon) = \varepsilon^2 P(|X - EX| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

a odtud již plyne tvrzení věty. □

Poznámka 2.9. Položíme–li $\varepsilon = k\sqrt{DX} = k\sigma_X$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $DX > 0$, pak máme

$$\begin{aligned} P(EX - k\sigma_X < X < EX + k\sigma_X) = P(|X - EX| < k\sigma_X) = 1 - P(|X - EX| \geq k\sigma_X) \\ \overset{\text{Čeb.ner.}}{\geq} 1 - \frac{DX}{k^2 DX} = 1 - \tfrac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Tedy platí

$$P(|X - EX| < k\sigma_X) \geq 1 - \tfrac{1}{k^2} \tag{4.2.14}$$

Zvolíme–li například $k = 3$, pak $P(|X - EX| < 3\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \doteq 0.89$, což lze slovně charakterizovat takto:

náhodná veličina X se při své realizaci neodchýlí od své střední hodnoty o více než trojnásobek své směrodatné odchylky s pravděpodobností aspoň 0.89.

3. Kovariance a korelační koeficient

V celém odstavci budeme předpokládat, že náhodné veličiny mají konečné druhé momenty. Je třeba si uvědomit, že z existence konečných druhým momentů plyne i existence prvních momentů a rozptylu, neboť ze Schwarzovy nerovnosti plyne, že $\boxed{|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{EX^2 EY^2}}$. Položíme–li $Y = 1$, dostaneme nerovnost $\boxed{|E(X)| \leq \sqrt{EX^2} < \infty}$ a můžeme vyjádřit i rozptyl $\boxed{DX = EX^2 - (EX)^2 < \infty}$.

Dále budeme předpokládat, že náhodné veličiny mají nenulový rozptyl, tj. že nejsou degenerované.

Definice 3.1. **Kovariancí** dvou náhodných veličin X a Y nazýváme číslo $\boxed{C(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY)}$ a číslo $\boxed{R(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}}$ nazýváme **korelační koeficient**.

Věta 3.2. *Nechť náhodné veličiny X a Y mají sdruženou distribuční funkci $F(x,y)$. Pak*

$$C(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)(y - EY) dF(x,y) \tag{4.3.15}$$

(a) Nechť náhodné veličiny jsou diskrétního typu, tj. $(X,Y)' \sim (M, p(x,y))$, pak platí

$$C(X,Y) = \sum_{(x,y) \in M} (x - EX)(y - EY) p(x,y) \tag{4.3.16}$$

(b) Nechť náhodné veličiny jsou absolutně spojitého typu, tj. $(X,Y)' \sim f(x,y)$, pak platí

$$C(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)(y - EY) dF(x,y) \tag{4.3.17}$$

Důkaz. Věta je důsledkem věty o střední hodnotě transformovaného náhodného vektoru, kdy $g(X,Y) = (X - EX)(Y - EY)$. □

Příklad 3.3. KOVARIANCE A KORELACE NORMÁLNÍHO (GAUSSOVA) ROZDĚLENÍ. Nechť náhodný vektor $\mathbf{X} = (X,Y)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ má dvourozměrné normální rozdělení s parametry $\boldsymbol{\mu} = \binom{\mu_1}{\mu_2}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, tj. má hustotu tvaru

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

Naším úkolem bude vypočítat korelační koeficient.

Z příkladů 1.9 a 2.7 víme, že pro marginální náhodné veličiny platí

$$\begin{aligned} EX &= \mu_1 & EY &= \mu_2 \\ DX &= \sigma_1^2 & DY &= \sigma_2^2 \end{aligned}$$

Dále víme, že standardizovaná náhodná veličina $U = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ má nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl, tj.

$$EU = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{1}{2}u^2}dy = 0 \qquad \text{a} \qquad DU = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^2e^{-\frac{1}{2}u^2}dy = 1.$$

Protože $R(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$, počítejme nejprve kovarianci

$$C(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)(y-EY)f_{(X,Y)}(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}dxdy.$$

Položíme-li nejprve $u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$, $v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$, (tj. $x-\mu_1 = \sigma_1 u$, $y-\mu_2 = \sigma_2 v$ a $dx = \sigma_1 du$, $dy = \sigma_2 dv$), dostaneme

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[u^2-2\rho uv+v^2]}dudv \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}u^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(v^2-2\rho uv)}dv\right]du. \end{aligned}$$

Protože platí $v^2 - 2\rho uv = (v-\rho u)^2 - \rho^2u^2$, pokračujme

$$C(X,Y) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\frac{u^2(1-\rho^2)}{2(1-\rho^2)}}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\int_{-\infty}^{\infty} v\, e^{-\frac{(v-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}}dv\right]}_{\text{označme } I_1}du.$$

Zavedeme-li substituci $\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}} = t$, pak $v = \sqrt{1-\rho^2}\,t + \rho u$ a $dv = \sqrt{1-\rho^2}\,dt$, takže

$$\begin{aligned} \boxed{I_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{1-\rho^2}\,t + \rho u)e^{-\frac{1}{2}t^2}\sqrt{1-\rho^2}\,dt \\ &= \sqrt{1-\rho^2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{1}{2}t^2}dt}_{=0=EU,\text{ kde } U\sim N(0,1)} + \rho u\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt}_{=1\text{ (hustota } U\sim N(0,1))} = \boxed{\rho u} \end{aligned}$$

Pokračujme

$$\boxed{C(X,Y)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du = \rho\sigma_1\sigma_2\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du}_{=1=DU,\text{ kde } U\sim N(0,1)} = \boxed{\rho\sigma_1\sigma_2}$$

a korelační koeficient je tedy roven

$$\boxed{R(X,Y)} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \boxed{\rho}.$$

Věta 3.4. Vlastnosti kovariance a korelace. *Nechť X a Y jsou náhodné veličiny, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Potom*

(1) $C(X,X) = DX$ *a* $R(X,X) = 1.$

(2) $C(X,Y) = C(Y,X)$ *a* $R(X,Y) = R(Y,X).$

(3) $C(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY).$

(4) Jsou–li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak $C(X,Y) = R(X,Y) = 0.$

(5) $|C(X,Y)| \leq \sqrt{DXDY}$ *a* $|R(X,Y)| \leq 1.$

(6) $C(a_1 + a_2X, b_1 + b_2Y) = a_2b_2C(X,Y)$

$R(a_1 + a_2X, b_1 + b_2Y) = R(X,Y)sign(a_2b_2),$ *je–li* $a_2 \neq 0$ *a* $b_2 \neq 0.$

(7) $D(X+Y) = DX + DY + 2C(X,Y).$

(8) $R(X,Y) = 1 \quad \Leftrightarrow$ *existují konstanty* $\boxed{a}$ *a* $\boxed{b>0}$ *takové, že* $P(Y = a + bX) = 1$

$R(X,Y) = -1 \quad \Leftrightarrow$ *existují konstanty* $\boxed{a}$ *a* $\boxed{b<0}$ *takové, že* $P(Y = a + bX) = 1$

Důkaz.

(1) $C(X,X) = E(X - EX)^2 = DX$ a $R(X,X) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = \frac{DX}{DX} = 1.$

(2) $C(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E[(Y-EY)(X-EX)] = C(Y,X) \Leftrightarrow R(X,Y) = R(Y,X).$

(3)
$$\begin{aligned} C(X,Y) &= E[(X-EX)(Y-EY)] = E[XY - X\cdot EY - EX\cdot Y + EX\cdot EY] \\ &= E(XY) - EX\cdot EY - EX\cdot EY + EX\cdot EY = E(XY) - (EX)(EY) \end{aligned}$$

(4) Jestliže X a Y jsou nezávislé $\Rightarrow E(XY) = (EX)(EY)$, takže

$$C(X,Y) \overset{(3)}{=} E(XY) - (EX)(EY) = (EX)(EY) - (EX)(EY) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(X,Y) = 0$$

(5) Podle Schwarzovy nerovnosti pro střední hodnoty náhodných veličin W a Z platí vztah $|E(WZ)| \leq \sqrt{EW^2}\sqrt{EZ^2}$, přičemž rovnost nastává $\Leftrightarrow P(Z = cW) = 1$, $c \neq 0$, tj. s pravděpodobností 1 jsou náhodné veličiny W a Z proporcionální. Položíme–li $W = X - EX$ a $Z = Y - EY$, dostaneme

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)(y-EY)dF(x,y)\right]^2 \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-EX)^2dF(x,y)}_{=DX}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-EY)^2dF(x,y)}_{=DY}$$

Odtud plyne tvrzení $|C(X,Y)| \leq \sqrt{DXDY}$ a $|R(X,Y)| = \left|\frac{C(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}\right| \leq 1.$

(6)
$$\begin{aligned} C(a_1 + a_2X, b_1 + b_2Y) &= E[(a_1 + a_2X - E(a_1 + a_2X))(b_1 + b_2Y - E(b_1 + b_2Y))] \\ &= E[a_2(X - EX)][b_2(Y - EY)] = a_2b_2E[(X - EX)(Y - EY)] \\ &= a_2b_2C(X,Y) \end{aligned}$$

$$R(a_1 + a_2X, b_1 + b_2Y) = \frac{C(a_1+a_2X, b_1+b_2Y)}{\sqrt{D(a_1+a_2X)}\sqrt{D(b_1+b_2Y)}} = \frac{a_2b_2C(X,Y)}{\sqrt{a_2^2DX}\sqrt{b_2^2DY}} = \underbrace{\frac{a_2b_2}{|a_2||b_2|}}_{=\text{sign}(a_2b_2)} R(X,Y)$$

(7)
$$\begin{aligned} D(X+Y) &= E[X + Y - E(X+Y)]^2 = E[(X-EX) + (Y-EY)]^2 \\ &= E[(X-EX)^2 + 2(X-EX)(Y-EY) + (Y-EY)^2] \\ &= E(X-EX)^2E(X-EX)(Y-EY) + E(Y-EY)^2 = DX + 2C(X,Y) + DY \end{aligned}$$

(8) Protože $1 = |R(X,Y)| = \frac{|C(X,Y)|}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \Leftrightarrow C(X,Y) = \overbrace{|R(X,Y)|}^{=1}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$, takže nastala rovnost ve Schwarzově nerovnosti. V tom případě jsou s pravděpodobností 1 náhodné veličiny $X-EX$ a $Y-EY$ proporcionální, tj. $\exists\, c\neq 0$ a platí $1 = P(Y-EY = c(X-EX)) = P(Y = EY - cEX + cX)$. Položme $a = EY - cEX$ a $b = c$, pak $P(Y = a + bX) = 1$. Vrátíme–li se ke korelačnímu koeficientu, dostaneme

$$R(X,Y) = R(X, a+bX) \overset{(6)}{=} sign(b)\underbrace{R(X,X)}_{=1} = \begin{cases} 1 & b > 0, \\ -1 & b < 0. \end{cases}$$

□

Poznámka 3.5. Jestliže je kovariance a korelace nulová, tj. $C(X,Y) = R(X,Y) = 0$, pak říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou **nekorelované**.

Poznámka 3.6. V případě dvourozměrného normálního rozdělení $\mathbf{X} = (X,Y)' \sim N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ s parametry $\boldsymbol{\mu} = \binom{\mu_1}{\mu_2}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ a s hustotou

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

víme, že $R(X,Y) = \rho$ (viz příklad 3.3). Jsou–li obě náhodné veličiny nekorelované, tj. $\rho = 0$, tak ze tvaru hustoty vyplývá, že obě náhodné veličiny jsou i **nezávislé**, neboť platí

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Toto tvrzení lze snadno zobecnit i na n–rozměrné normální rozdělení

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)' \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \text{ s hustotou } f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})},$$

kdy **nekorelovanost a nezávislost jsou ekvivalentní vlastnosti**, právě když matice

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2).$$

Toto tvrzení však neplatí obecně pro jiná rozdělení, jak nám ukáže následující příklad.

Příklad 3.7. Mějme dvourozměrný diskrétní náhodný vektor $(X,Y)' \sim (M,p)$, kde

$$M = M_X \times M_Y = \{0,1\} \times \{-1,0,1\} \quad \text{a} \quad p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (x,y) \in \{(0,0),(1,-1),(1,1)\}, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$

Vypočítáme korelační koeficient a marginální pravděpodobnostní funkce. Na základě toho pak určíme, zda případná nekorelovanost implikuje i nezávislost.

X/Y	-1	0	1	$p_X(x)$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_Y(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{x \in M_X} x\, p_X(x) &&= 0 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{3} \\
EY &= \sum_{y \in M_Y} y\, p_Y(y) &&= (-1) \cdot \tfrac{1}{3} + 0 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} = 0 \\
E(XY) &= \sum_{(x,y) \in M} xy\, p(x,y) &&= 0 \cdot 0 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot (-1) \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{3} \\
& &&= -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = 0
\end{aligned}$$

Nyní dopočítáme kovarianci

$$C(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY) = 0 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ a } Y \text{ jsou } \textbf{nekorelované}.$$

Avšak **nejsou nezávislé**, neboť například

$$p(0,0) = \tfrac{1}{3} \neq p_X(0) \cdot p_Y(0) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{9}.$$

Pokud bychom si ihned všimli, že platí s pravděpodobností 1 vztah

$$X = Y^2,$$

lze ihned počítat

$$C(X,Y) = E(XY) - (EX)\underbrace{(EY)}_{=0} = EY^3 = \sum_{y \in M_Y} y^3\, p_Y(y) = (-1)^3 \cdot \tfrac{1}{3} + 0^3 \cdot \tfrac{1}{3} + 1^3 \cdot \tfrac{1}{3} = 0$$

takže vidíme, i přes funkční vztah $X = Y^2$ dostáváme, že X a Y jsou **nekorelované**. Je třeba si neustále uvědomovat, že

- **korelace** je mírou **lineárního vztahu**;
- **nulová korelace** neimplikuje nezávislost, ale značí pouze, že mezi náhodnými veličinami **neexistuje lineární vztah**, což nevylučuje možnost jiného funkčního vztahu.

4. Kvantily a další číselné charakteristiky

K popisu rozdělení náhodné veličiny X slouží mnoho číselných charakteristik. Zatím jsme v první kapitole poznali střední hodnotu náhodné veličiny X jako charakteristiku její polohy. Ve druhé kapitole jsem se zabývali rozptylem náhodné veličiny X, který charakterizuje její variabilitu. Ve třetí kapitole byla pak popsána kovariance náhodných veličin X a Y, která charakterizuje jejich vzájemnou závislost. Zabývejme se nyní dalšími charakteristikami polohy. Definujme nejprve kvantilovou funkci a kvantil.

Definice 4.1. Nechť F je distribuční funkcí a $\alpha \in (0,1)$. Potom funkce

$$F^{-1}(\alpha) = Q(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}$$

se nazývá **kvantilová funkce** a číslo

$$x_\alpha = Q(\alpha)$$

se nazývá α-**kvantilem** rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$.

Poznámka 4.2. Pokud je distribuční funkce F spojitá a rostoucí, pak kvantilová funkce F^{-1} je inverzní funkcí k distribuční funkci F. Za těchto předpokladů také platí vztah

$$P(x_{\alpha/2} < X \leq x_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

Mezi často používané kvantily patří

$$\begin{array}{rcll} x_{0.25} & = & Q(0.25) \quad \text{se nazývá} & \textbf{dolní kvartil} \\ x_{0.5} & = & Q(0.5) & \textbf{medián} \\ x_{0.75} & = & Q(0.75) & \textbf{horní kvartil} \end{array}$$

V souvislosti s kvantily se také často uvádí **interkvartilové rozpětí** $IQR = x_{0.75} - x_{0.25}$ jako charakteristika variability náhodné veličiny X. Nejznámějším kvantilem je medián $\tilde{x} = x_{0.5}$, který udává polohu poloviny rozdělení. Další charakteristikou míry polohy je **modus** $\hat{x}$.

Definice 4.3. (a) Nechť $X \sim (M, p)$ je diskrétního typu, pak $\hat{x}$ značí libovolné $x_j \in M$, pro které platí $P(X = \hat{x}) \geq P(X = x_i),\ i = 1, 2, \ldots$

(b) Nechť $X \sim f(x)$ je absolutně spojitého typu, pak $\hat{x}$ značí libovolné $x \in \mathbb{R}$, pro které platí $f(\hat{x}) \geq f(x),\ x \in \mathbb{R}$.

Je dobré si uvědomit, že ani medián ani modus obecně nemusí být definovány jednoznačně.

Dalšími číselnými charakteristikami náhodné veličiny X jsou míry šikmosti a špičatosti, které charakterizují tvar křivky rozdělení náhodné veličiny.

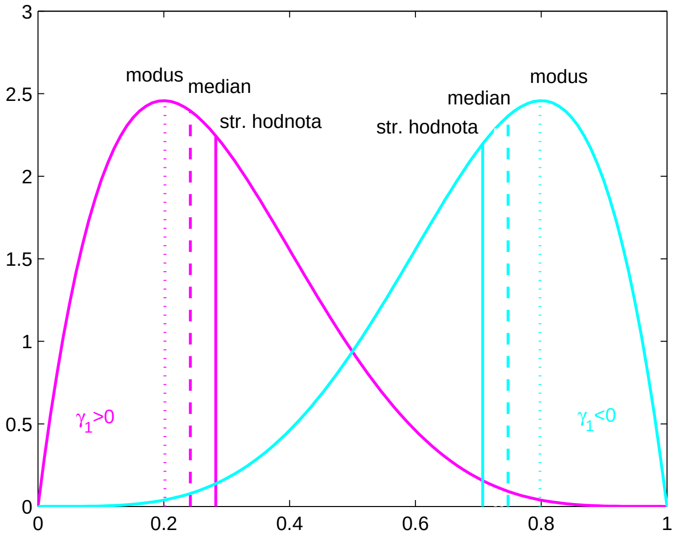
Definice 4.4. **Koeficient šikmosti** je definován jako

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{(DX)^{3/2}} = \frac{E(X - EX)^3}{(DX)^{3/2}}.$$

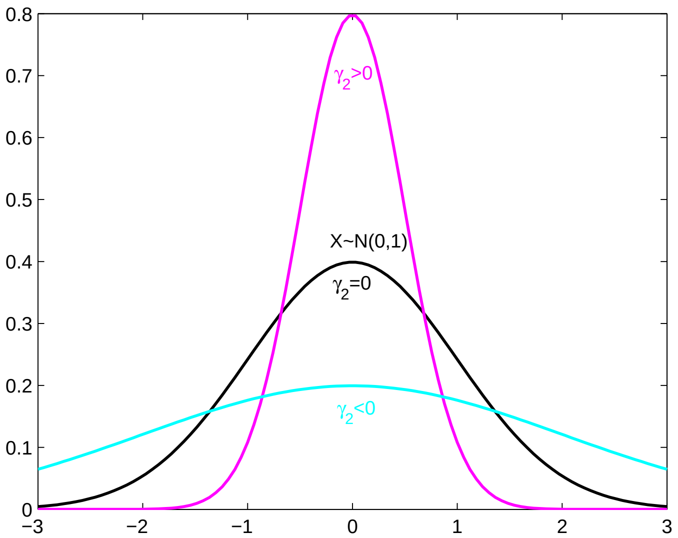
Nulová šikmost značí, že hodnoty náhodné veličiny jsou rovnoměrně rozděleny vlevo a vpravo od střední hodnoty. Tj. symetrická rozdělení včetně normálního rozdělení mají šikmost nula. Kladná šikmost poukazuje na častější výskyt odlehlejších hodnot vpravo od střední hodnoty a na větší kumulaci hodnot v levém okolí střední hodnoty. Pro rozdělení s kladnou šikmostí obvykle platí, že jeho modus je menší než medián a ten je menší než střední hodnota. Pro zápornou šikmost je tomu naopak. Situace je znázorněna na Obr. 2.

Definice 4.5. **Koeficient špičatosti** je definován jako

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{(DX)^2} = \frac{E(X - EX)^4}{(DX)^2}.$$



Obrázek 2. Koeficient šikmosti



Obrázek 3. Koeficient špičatosti

Kladná špičatost značí, že většina hodnot náhodné veličiny leží blízko její střední hodnoty a hlavní vliv na rozptyl mají málo pravděpodobné odlehlé hodnoty. Křivka rozdělení je špičatější. Záporná špičatost značí, že rozdělení je rovnoměrnější a jeho křivka je plošší. Situace je znázorněna na Obr. 3.

KAPITOLA 5

Charakteristická funkce

1. Komplexní náhodná veličina

Pravděpodobnostní chování náhodných veličin a náhodných vektorů je plně popsáno jejich **rozdělením pravděpodobností** P_X nebo **distribuční funkcí** F.

Ovšem dokazování celé řady vlastností náhodných veličin či náhodných vektorů pomocí distribuční funkce je těžkopádné a zdlouhavé.

Proto pracujeme s jiným analytickým vyjádřením rozdělení než je distribuční funkce, a to s **Fourierovou–Stieltjesovou transformací**, která se v teorii pravděpodobnosti nazývá **charakteristickou funkcí**.

Při zavedení charakteristické funkce nevystačíme pouze s reálnou náhodnou veličinou, ale budeme pracovat s **komplexní náhodnou veličinou**.

- **Komplexní náhodnou veličinou** rozumíme veličinu $Z = X + iY$ kde X a Y jsou **reálné** náhodné veličiny definované na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- **Distribuční funkcí** komplexní náhodné veličiny $Z = X + iY$ budeme rozumět dvourozměrnou sdruženou distribuční funkci náhodných veličin X a Y, tj. $F_Z(z) = F_{(X,Y)}(x, y)$.
- Existují-li střední hodnoty EX a EY, definuje se **střední hodnota komplexní náhodné veličiny** $Z = X + iY$ vztahem $EZ = EX + iEY$.
- Důležitý **příklad** komplexní náhodné veličiny dostaneme následujícím způsobem: mějme dvě borelovsky měřitelné funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a F je její distribuční funkce. Položme $Z = g(X) + ih(X)$. Pak Z je komplexní náhodná veličina a pro její střední hodnotu platí
$$EZ = E[g(X) + ih(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dF(x),$$
pokud integrály existují a jsou konečné.
- Náhodné veličiny $Z_1 = X_1 + iY_1, \ldots, Z_n = X_n + iY_n$ jsou **nezávislé** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(X_1, Y_1)', \ldots, (X_n, Y_n)'$ jsou **nezávislé**.

Věta 1.1. *Nechť $Z_1, \ldots, Z_n$ jsou nezávislé komplexní náhodné veličiny a existují $EZ_1, \ldots, EZ_n$. Pak platí* $\boxed{E\left(\prod_{i=1}^{n} Z_i\right) = \prod_{i=1}^{n} EZ_i}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Fakt, že náhodné veličiny Z_1 a Z_2 jsou nezávislé budeme značit $Z_1 \perp Z_2$. Počítejme

$$\begin{aligned} EZ_1Z_2 &= E(X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) = E\left[X_1X_2 + iX_1Y_2 + iY_1X_2 - iY_1Y_2\right] \\ &= EX_1X_2 + iEX_1Y_2 + iEY_1X_2 - iEY_1Y_2 \end{aligned}$$

Protože $Z_1 \perp Z_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (X_1, Y_1)' \perp (X_2, Y_2)' \Rightarrow X_1 \perp X_2, X_1 \perp Y_2, Y_1 \perp X_2, Y_1 \perp Y_2$

takže můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} EZ_1Z_2 &= EX_1X_2 + iEX_1Y_2 + iEY_1X_2 - EY_1Y_2 \\ &= EX_1EX_2 + iEX_1EY_2 + iEY_1EX_2 - EY_1EY_2 \\ &= E(X_1 + iY_1)\, E(X_2 + iY_2) = EZ_1\, EZ_2 \end{aligned}$$

a zbytek se dokáže úplnou matematickou indukcí. □

2. Definice a vlastnosti charakteristická funkce

Definice 2.1. Nechť X je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pak funkce $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ daná vztahem $\boxed{\psi(t) = Ee^{itX}}$, $t \in \mathbb{R}$, se nazývá **charakteristickou funkcí náhodné veličiny** X.

Poznámka 2.2. Uvedenou definicí je charakteristická funkce zavedená pouze pro **reálné** náhodné veličiny. Charakteristickou funkci pro komplexní náhodné veličiny zavádět nebudeme.

Poznámka 2.3. Je zřejmé, že pro $\forall\, t \in \mathbb{R}$ a pro každou náhodnou veličinu X existuje konečná střední hodnota Ee^{itX}, neboť můžeme psát

$$e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX) \quad \text{a} \quad |\cos(tX)| \le 1, \quad |\sin(tX)| \le 1 \quad \text{s pravděpodobností 1.}$$

Poznámka 2.4. Označíme–li distribuční funkci náhodné veličiny X symbolem F, pak přímo z definice $\psi(t) = Ee^{itX} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)$ vidíme, že charakteristická funkce závisí pouze na distribuční funkci. Proto lze také mluvit o charakteristické funkci distribuční funkce.

Poznámka 2.5. Výpočet charakteristické funkce.

Diskrétní případ $X \sim (M, p)$:
$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, dF(x) + i\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, dF(x)$$
$$= \sum_{x \in M} \cos(tx)\, p(x) + i \sum_{x \in M} \sin(tx)\, p(x) = \sum_{x \in M} e^{itx}\, p(x)$$

Spojitý případ $X \sim f(x)$:
$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos tx\, dF(x) + i\int_{\mathbb{R}} \sin tx\, dF(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\, f(x)\, dx + i\int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\, f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx$$

Příklad 2.6. Nechť náhodná veličina X má alternativní rozdělení $X \sim A(\theta)$ s parametrem $\theta \in (0, 1)$, což je pravděpodobnost zdaru či úspěchu. Pak pravděpodobnostní funkce je tvaru

$$p(x) = \begin{cases} \theta & x = 1 \\ 1 - \theta & x = 0 \\ 0 & jinak \end{cases} = \begin{cases} \theta^x (1-\theta)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & jinak \end{cases} \quad \text{a definiční obor } M = \{0, 1\}.$$

Počítejme její charakteristickou funkci

$$\psi(t) = Ee^{itX} = \sum_{x \in M} e^{itx}\, p(x) = \sum_{x=0,1} e^{itx} \theta^x (1-\theta)^{1-x} = (1 - \theta) + e^{it}\theta = 1 - \theta(1 - e^{it}).$$

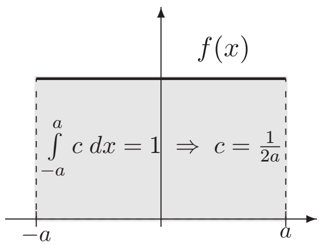
Charakteristická funkce alternativního rozdělení má tedy tvar $\psi(t) = 1 - \theta(1 - e^{it})$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Příklad 2.7. Nechť náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-a, a)$, $a \neq 0$.

Značíme $X \sim Ro(-a, a)$.

Pak hustota má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & x \in (-a, a), a \neq 0, \\ 0 & jinak. \end{cases}$$



Nejprve vyjádříme charakteristickou funkci pro $t = 0$

$$\psi(0) = Ee^{iX \cdot 0} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

Pro $t \neq 0$ je pak charakteristická funkce rovna

$$\psi(t) = Ee^{itX} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} e^{itx} dx = \frac{1}{2a}\left[\frac{e^{itx}}{it}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{at}\frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2i} = \frac{\sin(at)}{at}$$

Shrneme–li předchozí dva výsledky, dostaneme konečný tvar charakteristické funkce

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(at)}{at} & \text{pro } t \neq 0, \\ 1 & \text{pro } t = 0. \end{cases}$$

Věta 2.8. Vlastnosti charakteristické funkce. *Nechť $\psi(t)$ je charakteristická funkce nějaké náhodné veličiny. Pak*

(1) $|\psi(t)| \leq 1$ *(2)* $\psi(0) = 1$

(3) $\overline{\psi(t)} = \psi(-t)$ *pro* $\forall\, t \in \mathbb{R}$ *(4)* ψ *je rovnoměrně spojitá na* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $\psi(t)$ je charakteristická funkce náhodné veličiny X definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s distribuční funkcí $F(x) = P(X \leq x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(1) $|\psi(t)| = \left|Ee^{itX}\right| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\left|e^{itx}\right|}_{=1} dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} dF(x) = P_X(\mathbb{R}) = P(X \in \mathbb{R}) = 1.$

(2) $\psi(0) = Ee^{iX\cdot 0} = E(1) = 1.$

(3) $\psi(-t) = Ee^{-itX} = E\left[\cos(-tX) + i\sin(-tX)\right] = E\left[\cos(tX) - i\sin(tX)\right]$

$= \overline{E\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right]} = \overline{Ee^{itX}} = \overline{\psi(t)}.$

(4) Důkaz posledního tvrzení nebudeme provádět, lze ho najít například v knize Rényi, A., *Teorie pravděpodobnosti*, ACADEMIA, Praha 1972. □

Věta 2.9. *Nechť X je náhodná veličina, $\psi_X(t)$ její charakteristická funkce, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak charakteristická funkce transformované náhodné veličiny* $\boxed{Y = a + bX}$ *je rovna* $\boxed{\psi_Y(t) = e^{ita}\psi_X(tb)}$.

Důkaz. $\psi_Y(t) = Ee^{itY} = Ee^{it(a+bX)} = E\left(e^{ita}e^{itbX}\right) = e^{ita}Ee^{itbX} = e^{ita}\psi_X(tb).$ □

Příklad 2.10. Charakteristická funkce normálního rozdělení.
Právě dokázané tvrzení využijeme pro výpočet charakteristické funkce normálního rozdělení.

Označme $U \sim N(0\,,\,1)$ s hustotou $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}$ $u \in \mathbb{R}$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in \mathbb{R}, ; \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$

Vzájemný vztah mezi oběma náhodnými veličinami lze vyjádřit takto (viz věta 13.1)

$X = \mu + \sigma U$ a $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (tzv. standardizace)

Protože je mnohem snazší vypočítat charakteristickou funkci standardizovaného normálního rozdělení, začneme s náhodnou veličinou U.

$$\psi_U(t) = Ee^{itU} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\varphi(u)du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2-2itu)}du$$

Upravujme

$$u^2 - 2itu = [u^2 - 2u(it) + (it)^2] - (it)^2 = (u-it)^2 + t^2,$$

pak

$$\psi_U(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-it)^2}du = \left|\begin{array}{ll} subst. & y = u - it \\ & dy = du \end{array}\right|$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t^2}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy}_{=1\ (hustota\ N(0,1))} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Nyní, když známe charakteristickou funkci standardizované náhodné veličiny $U \sim N(0,1)$, můžeme pomocí věty 2.9 (když položíme $a = \mu$ a $b = \sigma$) spočítat také charakteristickou funkci náhodné veličiny $X = \mu + \sigma U$

$$\psi_X(t) = \psi_{\mu+\sigma U}(t) = e^{it\mu}\psi_U(t\sigma) = e^{it\mu}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Shrneme–li předchozí, dostaneme

náhodná veličina $U \sim N(0,1)$ má charakteristickou funkci $\psi_U(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2} = \sqrt{2\pi}\varphi(t)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\psi_X(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Věta 2.11. *Nechť X_1 a X_2 jsou* ***nezávislé*** *náhodné veličiny s charakteristickými funkcemi $\psi_{X_1}(t)$ a $\psi_{X_2}(t)$. Pak $\boxed{\psi_{X_1+X_2}(t) = \psi_{X_1}(t)\,\psi_{X_2}(t)}$.*

Důkaz. $\psi_{X_1+X_2}(t) = Ee^{it(X_1+X_2)} = E(e^{itX_1} \cdot e^{itX_2}) \overset{nez.}{=} Ee^{itX_1}Ee^{itX_2} = \psi_{X_1}(t)\,\psi_{X_2}(t).$ □

Poznámka 2.12. Z předchozí věty právě vycházejí nejdůležitější aplikace charakteristické funkce v teorii pravděpodobnosti, neboť velmi často potřebujeme znát rozdělení součtu několika nezávislých náhodných veličin. V mnoha případech je výpočet těchto konvolucí pomocí distribuční funkce, popř. hustoty nebo pravděpodobnostní funkce velmi obtížné. Naproti tomu charakteristickou funkci součtu nezávislých náhodných veličin lze stanovit velmi snadno, a to jako součin jednotlivých charakteristických funkcí.

Příklad 2.13. Charakteristická funkce binomického rozdělení

Uvažujme konečnou bernoulliovskou posloupnost délky n (tj. konečnou posloupnost nezávislých alternativních pokusů typu zdar/nezdar) s pravděpodobností zdaru $\theta \in (0,1)$. Nechť Y je náhodná veličina udávající **počet zdarů v** n **pokusech**.

Chceme–li odvodit charakteristickou funkci binomického rozdělení, využijeme faktu, že náhodnou veličinu Y s binomickým rozdělením lze vyjádřit jako součet $\boxed{n}$ nezávislých alternativních náhodných veličin, tj.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n,\theta), \qquad \text{kde} \qquad X_i \sim A(\theta), \quad \theta \in (0,1).$$

V příkladu 2.6 jsme spočítali charakteristickou funkci alternativního rozdělení

$$\psi_{X_i}(t) = 1 - \theta(1 - e^{it})$$

Využijeme–li předchozí větu, dostaneme charakteristickou funkci binomického rozdělení

$$\psi_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \psi_{X_i}(t) = \left[1 - \theta(1 - e^{it})\right]^n.$$

Shrneme–li předchozí, můžeme říci, že

náhodná veličina	$X \sim A(\theta)$	má charakteristickou funkci	$\psi_X(t) = 1 - \theta(1 - e^{it})$
	$Y \sim Bi(n,\theta)$		$\psi_Y(t) = \left[1 - \theta(1 - e^{it})\right]^n$

Věta 2.14. *Za předpokladu, že existují příslušné momenty náhodné veličiny X, tak existují i příslušné derivace charakteristické funkce a platí*

$$(1) \quad \psi^{(k)}(0) = i^k EX^k$$

$$(2) \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n),$$

kde $o(t^n)$ je taková funkce, že $\lim\limits_{t\to 0} \frac{o(t^n)}{t^n} = 0$.

Důkaz. Nechť existují momenty až do řádu n.

(1) Nejprve předpokládejme, že $n = 1$. Z existence EX plyne, že $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < \infty$ a $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{itx}\, dF(x)$ je stejnoměrně konvergentní vzhledem k t, takže lze provést záměnu derivace a integrálu a můžeme počítat

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF(x) = \int_{\mathbb{R}} ix\, e^{itx} dF(x)$$

Po dosazení $t = 0$ dostaneme $\quad \psi'(0) = \int_{\mathbb{R}} ix\, dF(x) = i\, EX.$

Zbytek dokážeme matematickou indukcí.

(2) Rozvineme–li $\psi(t)$ pomocí Taylorova vzorce a užijeme Peanův tvar zbytku, dostaneme

$$\psi'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \psi^{(k)}(0) + o(t^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} EX^k + o(t^n)$$

□

Příklad 2.15. Poissonovo rozdělení - výpočet střední hodnoty a rozptylu pomocí charakteristické funkce. Mějme náhodnou veličinu $X \sim Po(\lambda)$ s pravděpodobnostní funkcí

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0 \\ 0 & jinak \end{cases}.$$

Pak

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= Ee^{itX} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^x}{x!}}_{=e^{\lambda e^{it}}} = e^{\lambda(e^{it}-1)} \\
\psi'(t) &= e^{\lambda(e^{it}-1)}\lambda e^{it}i = i\lambda e^{\lambda(e^{it}-1)+it} \\
\psi'(0) &= iEX = i\lambda \quad \Rightarrow \quad EX = \lambda \\
\psi''(t) &= i\lambda e^{\lambda(e^{it}-1)+it}(\lambda e^{it}i + i) = i^2\lambda e^{\lambda(e^{it}-1)+it}(\lambda e^{it}+1) \\
\psi''(0) &= i^2EX^2 = i^2\lambda(\lambda+1) \quad \Rightarrow \quad DX = EX^2 - (EX)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

Shrneme–li předchozí výsledky, dostaneme

$X \sim Po(\lambda)$ má tyto vlastnosti:
$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{\lambda(e^{it}-1)} \\ EX &= \lambda \\ DX &= \lambda \end{aligned}$$

Následující tři věty ukazují, že rozdělení pravděpodobností lze jednoznačně popsat její charakteristickou funkcí. Důkazy lze najít v knize Rényi, A., *Teorie pravděpodobnosti*, ACADEMIA, Praha 1972.

Věta 2.16. Inverzní vzorec. *Nechť $\psi(t)$ je charakteristická funkce náhodné veličiny X s distribuční funkcí F, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ jsou body spojitosti distribuční funkce F. Pak platí*

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\psi(t)\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2it} - \psi(-t)\frac{e^{ita}-e^{itb}}{2it}\right]dt$$

nebo ekvivalentně

$$F(b) - F(a) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\psi(t)\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2it}dt$$

a každá distribuční funkce je svou charakteristickou funkcí určena jednoznačně.

Poznámka 2.17. Je třeba upozornit, že nelze psát

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{2it}dt$$

neboť tento nevlastní integrál nemusí existovat, avšak existuje–li, rovná se hodnotě $F(b) - F(a)$.

Věta 2.18. *Nechť náhodná veličina X má je charakteristickou funkci $\psi(t)$, pro kterou platí $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|dt < \infty$. Potom náhodná veličina X je (absolutně) spojitá a má spojitou hustotu*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\psi(t)dt.$$

Věta 2.19. *Nechť* $\psi(t)$, *resp.* $\{\psi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou charakteristické funkce náhodných veličin* X, *resp.* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* F, *resp.* $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou odpovídající distribuční funkce. Nechť pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\psi(t) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(t).$$

Pak v každém bodě spojitosti platí

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Definice 2.20. Charakteristická funkce náhodného vektoru. Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ je n–rozměrný náhodný vektor. Funkci $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$\psi(\mathbf{t}) = \psi(t_1, \dots, t_n) = Ee^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}} = Ee^{i\sum\limits_{j=1}^{n} t_j X_j}$$

pro $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)' \in \mathbb{R}^n$ budeme nazývat **charakteristickou funkcí náhodného vektoru X**.

Analogickým způsobem jako v jednorozměrném případě lze odvodit následující vlastnosti charakteristické funkce náhodného vektoru.

Věta 2.21. *Nechť* $\psi(\mathbf{t})$ *je charakteristická funkce náhodného vektoru* $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$. *Pak platí*

(1) $|\psi(\mathbf{t})| \le \psi(0, \dots, 0) = 1 \qquad$ *pro* $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\psi(-t_1, \dots, -t_n) = \overline{\psi(t_1, \dots, t_n)} \qquad$ *pro* $\forall \mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$.

(3) ψ *je stejnoměrně spojitá.*

(4) Je–li vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *a matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *je typu* $m \times n$, *pak* $\qquad \psi_{\mathbf{b}+\mathbf{AX}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mathbf{b}}\psi(\mathbf{A}'\mathbf{t})$.

(5) Pokud existují příslušné střední hodnoty, pak $\left(\frac{\partial \psi(\mathbf{t})}{\partial t_j}\right)_{\mathbf{t}=(0,\dots,0)'} = iEX_j$.

(6) Existují–li střední hodnoty $E(X_jX_k)$, *pak* $\left(\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{t})}{\partial t_j \partial t_k}\right)_{\mathbf{t}=(0,\dots,0)'} = -iE(X_jX_k)$.

(7) Je–li ψ_j *charakteristická funkce náhodné veličiny* X_j, *pak*

$$\psi_j(t) = \psi(0, \dots, 0, \underbrace{t}_{j-\text{tá pozice}}, 0, \dots, 0).$$

(8) Nechť $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ *má charakteristickou funkci* ψ_Y. *Jsou-li* $X_1, \dots, X_n$ *nezávislé náhodné veličiny, pak*

$$\psi_Y(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^{n} \psi_j(t_j),$$

kde ψ_j *je charakteristická funkce náhodné veličiny* X_j.

KAPITOLA 6

Konvergence náhodných veličin a centrální limitní věta

1. Konvergence podle pravděpodobnosti a slabý zákon velkých čísel

Poznámka 1.1. V matematické statistice se často pracuje s **aritmetickými průměry**, které se počítají z pozorování náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$, takže jde vlastně o lineární kombinaci původních náhodných veličin

$$\bar{X}_n = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

V dalším nás budou zajímat vlastnosti této transformované náhodné veličiny při $n \to \infty$.

Definice 1.2. Konvergence podle pravděpodobnosti. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje podle pravděpodobnosti k číslu** $\theta \in \mathbb{R}$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \qquad \text{a píšeme} \qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta.$$

Poznámka 1.3. V teorii míry se uvedené konvergenci říká **slabá konvergence** nebo též **konvergence podle míry**, a to pravděpodobnostní míry P. Pokud $X_n - X \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, řekneme, že posloupnost náhodných veličin **konverguje podle pravděpodobnosti k náhodné veličině** X.

Definice 1.4. Slabý zákon velkých čísel. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$splňuje **slabý zákon velkých čísel**, jestliže posloupnost náhodných veličin

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Věta 1.5. Čebyševova věta. *Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$je posloupnost po dvou nezávislých náhodných veličin, které mají konečné druhé momenty a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} DX_i = 0.$$

Pak posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***splňuje slabý zákon velkých čísel.***

Důkaz. Položme $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)$. Podle Čebyševovy nerovnosti pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|Y_n - EY_n| > \varepsilon) \le \tfrac{DY_n}{\varepsilon^2}.$$

Proto počítejme

$$\begin{aligned} EY_n &= E\left[\tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)\right] = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i - EX_i)}_{=0} = 0 \\ DY_n &= D\left[\tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)\right] = \tfrac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i)\right] \\ &\overset{nez.}{=} \tfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(X_i - EX_i) = \tfrac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} DX_i \end{aligned}$$

a dosadíme–li do Čebyševovy nerovnosti, dostaneme

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) - 0\right| > \varepsilon\right) \le \frac{DY_n}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{podle předp.}} 0,$$

takže $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel. □

Důsledek 1.6. *Nechť* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost po dvou nezávislých náhodných veličin. Jestliže pro* $\forall\, n$ *platí*

$$DX_n \leq c, \text{ kde } c \in \mathbb{R}, c > 0,$$

pak $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňuje slabý zákon velkých čísel.*

Důkaz. Protože platí

$$0 \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{DX_i}_{\leq c} \leq \frac{1}{n^2}nc = \frac{c}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

jsou splněny předpoklady předchozí věty a $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel. □

Důsledek 1.7. Bernoulliova věta. *Nechť náhodná veličina* Y_n *je rovna počtu úspěchů v posloupnosti nezávislých alternativních pokusů délky* n*, ve které je pravděpodobnost úspěchu rovna číslu* $\theta \in (0,1)$*. Potom posloupnost*

$$Z_n = \frac{1}{n}Y_n \text{ relativních četností úspěchů}$$

konverguje podle pravděpodobnosti k θ*, tj.*

$$Z_n = \frac{1}{n}Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta.$$

Důkaz. Označme náhodnou veličinu $X_i = \begin{cases} 0 & \text{úspěch} \\ 1 & \text{neúspěch} \end{cases}$ s pravděpodobností úspěchu θ. Dostáváme posloupnost nezávislých alternativních náhodných veličin $\{X_i \sim A(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$, ve které platí $EX_i = \theta$ a $DX_i = \theta(1-\theta) \leq \frac{1}{4}$, tedy podle předchozího důsledku posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje slabý zákon velkých čísel, což značí, že

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \;\Leftrightarrow\; \overbrace{\frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i}_{=Y_n}}^{=Z_n} -\theta \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \;\Leftrightarrow\; Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta.$$

□

Důsledek 1.8. *Nechť* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost* ***nezávislých*** *náhodných veličin, které mají všechny stejné rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou* μ *a rozptylem* σ^2*. Potom* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňuje slabý zákon velkých čísel a posloupnost průměrů konverguje podle pravděpodobnosti k* μ*, tj.*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$

Důkaz. Je zřejmý, neboť $DX_n \leq c = \sigma^2$. □

Věta 1.9. Markovova věta. *Nechť posloupnost náhodných veličin* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňuje podmínku*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\sum_{i=1}^{n}X_i = 0.$$

Pak $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňuje slabý zákon velkých čísel.*

Důkaz. Protože postup důkazu je analogický důkazu věty 1.5, nebudeme jej zde uvádět. □

Věta 1.10. Chinčinova věta. *Nechť* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost* ***nezávislých*** *náhodných veličin, které mají stejné rozdělení pravděpodobností s konečnou střední hodnotou* $EX_i = \mu$*. Potom* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *splňuje slabý zákon velkých čísel, tj. posloupnost průměrů*

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu\right\}.$$

Důkaz. Nebudeme provádět, lze ho najít například v knize Rényi, A., *Teorie pravděpodobnosti*, ACADEMIA, Praha 1972, str. 322. □

2. Konvergence skoro jistě a silný zákon velkých čísel

Definice 2.1. Konvergence skoro jistě. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje skoro jistě k náhodné veličině** X (vzhledem k pravděpdobnosti), jestliže

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \text{a píšeme} \qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.v.} X.$$

Poznámka 2.2. Konvergenci **skoro jistě** se v teorii míry říká **silná konvergence** nebo také **konvergence skoro všude vzhledem k míře** P.

Definice 2.3. Silný zákon velkých čísel. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje **silný zákon velkých čísel**, jestliže posloupnost náhodných veličin $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)$ konverguje **skoro jistě** k nule, tj.

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) = 0\right) = 1.$$

Poznámka 2.4. K tomu, aby posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňovala **silný zákon velkých čísel** stačí splnění podmínek Chinčinovy větu. Toto tvrzení se nazývá II. Kolmogorova věta a její důkaz lze najít například v knize Dupač, V., Hušková, M. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Karolinum. Praha 1999.

3. Konvergence posloupnosti distribučních funkcí

Označme $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost distribučních funkcí náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definujme další typ konvergence náhodných veličin.

Definice 3.1. Řekneme, že posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **konverguje v distribuci** (nebo podle zákona rozdělení) k náhodné veličině X s distribuční funkcí F, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{ve všech bodech spojitosti } F(x).$$

Tuto skutečnost značíme

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X.$$

Distribuční funkce F se nazývá **limitní** nebo **asymptotická distribuční funkce**.

4. Centrální limitní věty

Mějme posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, které jsou
- definované na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,
- **nezávislé**,
- $EX_i = \mu_i$,
- $DX_i = \sigma_i^2$.

Řekneme, že náhodná veličina

$$C_i = X_i - \mu_i \quad \text{je } \textbf{centrovaná} \quad \Rightarrow \quad EC_i = 0 \quad \text{a} \quad DC_i = \sigma_i^2$$

$$U_i = \frac{C_i}{\sigma_i} = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad \text{je } \textbf{standardizovaná} \quad \Rightarrow \quad EU_i = 0 \quad \text{a} \quad DU_i = 1$$

Označme náhodnou veličinu $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad E\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}(\mu_1 + \cdots + \mu_n)$

$$D\overline{X}_n \overset{nez.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$$

Standardizujme průměr $\overline{X}_n$: $\quad U_{\overline{X}_n} = \dfrac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}{n^2}}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)}{\sqrt{\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2}}$

Pokud $EX_i = \mu$ a $DX_i = \sigma^2$ $\qquad U_{\overline{X}_n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)}{\sqrt{n\sigma^2}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)}{\sigma\sqrt{n}}.$

Nyní vyslovíme několik modifikací centrálních limitních vět (CLV). Jejich význam spočívá v tom, že za velmi všeobecných podmínek ukazují, že
standardizované průměry $U_{\overline{X}_n}$ z **nezávislých** náhodných veličin **konvergují** k **normálnímu rozdělení**.

VĚTA 4.1. LINDEBERGOVA–LÉVYHO CLV. *Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost* ***nezávislých*** *náhodných veličin se stejným rozdělením se střední hodnotou μ a nenulovým rozptylem σ^2. Potom náhodné veličiny*

$$U_{\overline{X}_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)}{\sigma\sqrt{n}}$$

mají asymptoticky ***standardizované normální rozdělení*** $N(0,1)$, *což budeme značit*

$$U_{\overline{X}_n} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

Důkaz. Označme pro $k = 1, 2, \dots$

$$C_k = X_k - \mu \text{ a } \psi_{C_k}(t) = Ee^{itC_k}.$$

V tomto případě platí

$$EC_k = 0 \text{ a } DC_k = EC_k^2 = \sigma^2.$$

Rozviňme charakteristickou funkci $\psi_{C_k}(t)$ pomocí Taylorova rozvoje

$$\psi_{C_k}(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j EC_k^j}{j!} + R_n(t), \qquad \text{kde} \qquad R_n(t) = o(t^n), \qquad \text{tj.} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{R_n(t)}{t^n} = 0.$$

Protože máme zaručenu existenci prvních dvou momentů, pak pro $n = 2$

$$\psi_{C_k}(t) = 1 + \frac{itEC_k}{1!} + \frac{(it)^2 EC_k^2}{2!} + R_2(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + R_2(t), \qquad \text{kde} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{R_2(t)}{t^2} = 0.$$

Položme

$$Z_k = \frac{C_k}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Protože

$$\psi_{a+bX}(t) = e^{ita}\psi_X(tb),$$

pak položíme–li $a = 0$ a $b = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}$, můžeme psát:

$$\psi_{Z_k}(t) = \psi_{C_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 n} + R_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + R_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

a přitom

$$\lim_{t\to 0} \frac{R_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{\frac{t^2}{\sigma^2 n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{pro pevné } t \in \mathbb{R} \quad \frac{\sigma^2}{t^2} \lim_{n\to\infty} nR_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.$$

Nakonec položme

$$U_{\overline{X}_n} = Z_1 + \dots + Z_n = \frac{C_1}{\sigma\sqrt{n}} + \dots + \frac{C_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Protože jde o součet nezávislých náhodných veličin, pak pro jejich charakteristické funkce platí

$$\begin{aligned}\psi_{U_{\overline{X}_n}}(t) = \psi_{Z_1+\dots+Z_n}(t) &\overset{nez.}{=} \prod_{k=1}^{n} \psi_{Z_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{C_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left[\psi_{C_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + R_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n\end{aligned}$$

Počítejme limitu

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \psi_{U_{\overline{X}_n}}(t) &= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{t^2}{2n} + R_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\frac{t^2}{2} + nR_2\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)}{n}\right]^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{\frac{t^2}{2}}{n}\right]^n = e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

což je charakteristická funkce $N(0,1)$ a platí tvrzení věty. □

Příklad 4.2. Zaměstnanec pravidelně cestuje do zaměstnání i ze zaměstnání tramvají, která jezdí každých pět minut. Jeho příchod na zastávku vzhledem k odjezdu tramvaje je zcela náhodný. S jakou pravděpodobností pročeká na cestě tam i zpět během 20 pracovních dnů méně než 120 minut?

Řešení: Označme X_i ... doba čekání na i-té cestě (i=1,...,40)

B ... náhodný jev, že během 20 pracovních dnů, tj. během 40 cest pročeká zaměstnanec méně než 120 minut

Naším úkolem bude spočítat přibližnou pravděpodobnost

$$P(X_1 + \cdots + X_{40} \in B) = P(n\overline{X}_n \leq 120), \text{ kde } n = 40.$$

s využitím Lindebergovy–Lévyho CLV věty, která tvrdí, že při velkém počtu nezávislých pokusů konverguje standardizovaný průměr k rozdělení normálnímu.

Náhodná veličina $X_i \sim Ro\,(0,5)$ s hustotou $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & x \in \langle 0,5\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Nejprve spočítejme střední hodnotu a rozptyl:
$$\begin{aligned} EX_i &= \int_0^5 \tfrac{1}{5}x\,dx = \tfrac{1}{5}\left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^5 = \tfrac{25}{10} = \tfrac{5}{2} = 2.5 \\ EX_i^2 &= \int_0^5 \tfrac{1}{5}x^2\,dx = \tfrac{1}{5}\left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^5 = \tfrac{125}{15} = \tfrac{25}{3} \\ DX_i &= EX^2 - (EX)^2 = \tfrac{25}{3} - \tfrac{25}{4} = \tfrac{25}{12} \end{aligned}$$

Nyní můžeme již po několika úpravách vypočítat žádanou pravděpodobnost:

$$\begin{aligned} P(X_1 + \cdots + X_{40} \in B) &= P(40\overline{X}_n \leq 120) = P(\overline{X}_n \leq 3) \\ &= P\left(\frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} \leq \frac{3 - E\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}}\right) = P\left(U_{\overline{X}_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{96}}}\right) \\ &= P(U_{\overline{X}_n} \leq 2.1909) \approx \Phi(2.1909) = \boxed{0.9858}. \end{aligned}$$

Tedy náhodný jev, že během 20 pracovních dnů, tj. během 40 cest, pročeká méně než 120 minut nastane přibližně s pravděpodobností 0.9858.

Další verze centrální limitní věty, tzv. věta Ljapunovova, je nejobecnějším vyjádřením této věty pro součet **nezávislých** náhodných veličin a říká, že rozdělení součtu vzájemně nezávislých veličin konverguje k normálnímu rozdělení i v případě, že veličiny nemají stejné rozdělení pravděpodobnosti.

Věta 4.3. Ljapunovova CLV. *Mějme posloupnost nezávislých náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro které existují pro $i = 1, 2, \ldots$ následující momenty*
$$\begin{aligned} EX_i &= \mu_i \\ DX_i &= E(X_i - \mu_i)^2 = \sigma_i^2 > 0\,. \\ H_i^3 &= E|X_i - \mu_i|^3 \end{aligned}$$

Položme
$$\begin{aligned} S_n &= \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}\,. \\ K_n &= \sqrt[3]{H_1^3 + \cdots + H_n^3} \end{aligned}$$

*Potom **Ljapunovova podmínka***
$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{S_n} = 0$$

*je **postačující** k tomu, aby*
$$U_{\overline{X}_n} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

Důkaz. Nebudeme provádět, lze ho najít například v knize Rényi, A., *Teorie pravděpodobnosti*, ACADEMIA, Praha 1972. □

Věta 4.4. Integrální věta Moivre–Laplaceova. *Nechť náhodná veličina Y_n udává* ***počet úspěchů*** *v posloupnosti délky* ***n*** *nezávislých alternativních pokusů s pravděpodobností úspěchu θ. Pak náhodné veličiny* $\frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{A}{\sim} N(0,1)$.

Důkaz. Označme $X_n \sim A(\theta)$. Pak posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$s konečnou střední hodnotou $EX_n = \theta$ a konečným rozptylem $DX_n = \theta(1-\theta)$ splňuje Lindebergovu–Lévyho CLV, takže

$$U_{\overline{X}_n} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

Protože **binomická** náhodná veličina je součtem nezávislých alternativních náhodných veličin $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = n\overline{X}_n \sim Bi(n,\theta)$ se střední hodnotou $EX_n = n\theta$ a rozptylem $DX_n = n\theta(1-\theta)$, nejprve vyjádřeme

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n} n\theta = \theta$$

$$D\overline{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{nez.}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2} n\theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

a pak upravujme

$$U_{\overline{X}_n} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{\sqrt{D\overline{X}_n}} = \frac{n\overline{X}_n - nE\overline{X}_n}{\sqrt{n^2 D\overline{X}_n}} = \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n^2 \frac{\theta(1-\theta)}{n}}} = \frac{Y_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{A}{\sim} N(0,1).$$

Tím je věta dokázána. □

Příklad 4.5. Nalezněte přibližnou hodnotu pravděpodobnosti toho, že počet šestek, které padnou ve 12 000 hodech homogenní hrací kostkou, bude mezi 1 900 a 2 100.

Řešení: Označme Y_n ... počet šestek, které padnou v $n = 12\,000$ hodech

B ... náhodný jev, že ve 12 000 hodech homogenní hrací kostkou bude počet padnutých šestek mezi 1 900 a 2 100

Náhodná veličina $Y_n \sim Bi\left(n, \frac{1}{6}\right)$, přičemž $n = 12\,000$.

Naším úkolem bude spočítat přibližnou pravděpodobnost

$$P(Y_n \in B) = P(1\,900 < Y_n \leq 2\,100)$$

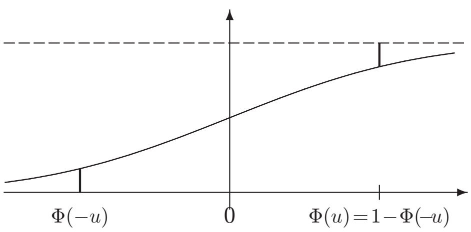
s využitím Moivreovy-Laplaceovy (čti: moávr laplasovy) věty, která tvrdí, že při velkém počtu nezávislých pokusů konverguje binomické rozdělení k rozdělení normálnímu.

Nejprve spočítejme střední hodnotu a rozptyl: $EY_n = n\theta = 12\,000\frac{1}{6} = 2\,000$

$$DY_n = n\theta(1-\theta) = 12\,000\frac{1}{6}\frac{5}{6} = 2\,000\frac{5}{6} = \frac{10\,000}{6}.$$

Nyní můžeme již upravovat:

$$\begin{aligned}
P(1\,900 < Y_n \leq 2\,150) &= P(1\,900 - EY_n < Y_n - EY_n \leq 2\,100 - EY_n) \\
&= P\left(\frac{1\,900 - EY_n}{\sqrt{DY_n}} < \frac{Y_n - EY_n}{\sqrt{DY_n}} \leq \frac{2\,100 - EY_n}{\sqrt{DY_n}}\right) \\
&= P\left(\frac{1\,900 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}} < U_{\overline{X}_n} \leq \frac{2\,100 - 2\,000}{\sqrt{\frac{10\,000}{6}}}\right) \\
&= P\left(-2.4495 < U_{\overline{X}_n} \leq 2.4495\right) \\
&\approx \Phi(2.4495) - \Phi(-2.4495) \\
&= 2\Phi(2.4495) - 1 = 0.9857.
\end{aligned}$$



Distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení

Tedy náhodný jev, že ve 12 000 hodech homogenní hrací kostkou bude počet padnutých šestek mezi 1 900 a 2 100, nastane přibližně s pravděpodobností 0.9857.