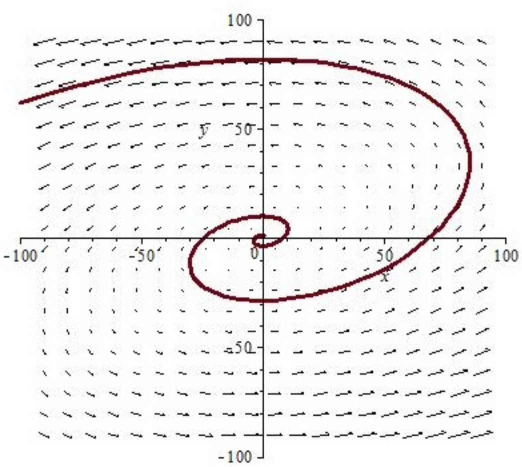
MASARYKOVA UNIVERZITA • PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

Anton Galaev

ÚLOHY Z GLOBÁLNÍ ANALÝZY



Brno 2013

Obsah

Předmluva

Tato sbírka úloh vznikla během výuky předmětu "Globální analýza" v letech 2011-2013 na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně jako doplnění ke skriptu prof. RNDr. Ivana Koláře, DrSc [2].

Autor děkuje prof. RNDr. Janu Slovákovi, DrSc za všeobecnou podporu a Mgr. Martinu Panákovi, Ph.D. za opravu textu.

1. Podvariety číselných prostorů

1.1. Vypočtěte Jakobiho matice a Jakobiány (pokud existují) následujících zobrazení. Které z těchto zobrazení jsou imerse, submerse a difeomorfismy na svůj obraz?
a) $x = 3\rho\cos t, \quad y = 4\rho\sin t, \quad (\rho, t) \in (0,1)\times(0,2\pi)$;
b) $x = \cos u \cos v, \quad y = \sin u \cos v, \quad z = \sin v, \quad (u,v) \in (0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;
c) $x = \sqrt{\rho}\cos\varphi, \quad y = \sqrt{\rho}\sin\varphi, \quad z = \rho, \quad (\rho,\varphi) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi)$;
d) $x = \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \quad y = \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

1.2. Ukažte, že podmnožina $M \subset \mathbb{R}^n$ je podvarietou dimenze 0 právě tehdy, když $M \subset \mathbb{R}^n$ je diskrétní podmnožina, tj. pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ takové, že $M \cap U = \{x\}$.

1.3. Ukažte, že podmnožina $M \subset \mathbb{R}^n$ je podvarietou dimenze n právě tehdy, když $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená podmnožina.

1.4. Dokažte, že podmnožina $M = \{(x,y) |\, xy = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ není podvarietou prostoru $\mathbb{R}^2$.

1.5. Dokažte, že trojúhelník není podvarietou roviny.

1.6. Dokažte, že množina

$$\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < y < 1\} \cup \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| x > 0 \right\}$$

není podvarietou prostoru $\mathbb{R}^2$.

1.7. Rozhodněte, je-li řešení rovnice $x^5 + y^5 + z^5 + w^5 = 1$ podvarietou $\mathbb{R}^4$.

1.8. Rozhodněte, je-li řešení soustavy rovnic $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, $z = xy$ podvarietou prostoru $\mathbb{R}^3$.

1.9. Pro které hodnoty konstanty c je množina

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = c\}$$

dvourozměrnou podvarietou prostoru $\mathbb{R}^3$?

1.10. Ukažte, že množina $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ všech čtvercových matic n-tého řádu s nenulovým determinantem je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$. Určete její dimenzi.

1.11. Ukažte, že množina $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ všech čtvercových matic n-tého řádu s determinantem 1 je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$. Určete její dimenzi.

1.12. Ukažte, že množina $\mathrm{O}(n)$ všech ortogonálních čtvercových matic n-tého řádu je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n^2}$. Určete její dimenzi.

1.13. Nechť $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ a $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ jsou m_1 a m_2 rozměrné podvariety. Dokažte, že $M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ je (m_1+m_2)-rozměrnou podvarietou.

1.14. Ukažte aspoň dvěma způsoby, že anuloid (též torus) $T^m = S^1 \times \cdots \times S^1$ je podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{2m}$.

1.15. Dokažte, že graf zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ třídy C^r je n-rozměrnou podvarietou prostoru $\mathbb{R}^{n+m}$ třídy C^r.

2. Hladké variety a hladká zobrazení

2.1. Ověřte, je-li dvojice $((-1,1), f(x) = \sqrt{1-x^2})$ mapou slučitelnou se standardní mapou na $\mathbb{R}$.

2.2. Ukažte, že dvojice $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$ je mapou na množině $\mathbb{R}$. Ukažte, že tato mapa není slučitelná se standardní mapou na $\mathbb{R}$. Nechť $\mathbb{R}'$ je varieta, jejíž diferenciální strukturu určuje tato mapa. Ukažte, že varieta $\mathbb{R}'$ je difeomorfní varietě $\mathbb{R}$ se standardní diferenciální strukturou.

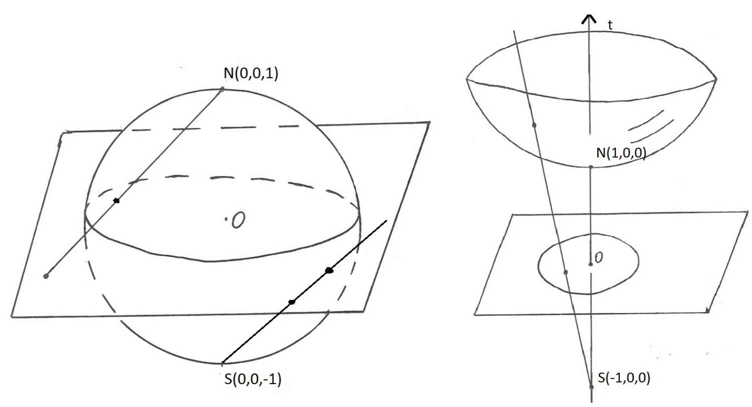
2.3. Nechť $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ jsou atlasy na topologickém prostoru M. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- atlasy $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ jsou slučitelné (tj. $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ je zase atlasem na M);
- každá mapa s $\mathcal{A}_1$ je slučitelná s každou mapou s $\mathcal{A}_2$;
- $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ jsou podmnožinami stejného maximálního atlasu;
- $\mathcal{A}_1$ a $\mathcal{A}_2$ určují stejnou množinu hladkých funkcí na každé otevřené podmnožině $U \subset M$.

2.4. Dokažte, že relace slučitelnosti atlasů je relací ekvivalence.

2.5. Sestrojte atlasy na elipsu $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

2.6. Sestrojte atlasy na sféře $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ pomocí stereografické projekce (viz. obrázek 1) a pomocí ortogonální projekce na souřadnicové roviny. Ukažte, že tyto atlasy jsou ekvivalentní.



Obrázek 1. Stereografická projekce

2.7. Sestrojte atlas na povrchu Lobačevského

$$L^2 = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 | t^2 - x^2 - y^2 = 1,\, t > 0\}$$

pomocí stereografické projekce (viz. obrázek 1) a pomocí ortogonální projekce na rovinu $t = 0$. Ukažte, že tyto atlasy jsou ekvivalentní.

2.8. Ukažte, že na sféře neexistuje atlas obsahující jenom jednu mapu.

2.9. Dokažte, že souřadnicové funkce x, y, z jsou hladké na sféře $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

2.10. Ukažte, že kanonická projekce $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ je hladké zobrazení.

2.11. Dokažte, že konstantní zobrazení variet $f : M \to N$, $f(x) = y_0$ pro všechna $x \in M$, je hladké.

2.12. Ukažte, že rotace kružnice je difeomorfismem.

2.13. Ukažte, že zobrazení hladkých variet $f : M \to N$ je hladké právě tehdy, když zobrazení $f \circ g$ je hladké pro libovolné hladké zobrazení $g : U \to M$ libovolné otevřené podmnožiny $U \subset \mathbb{R}^k$.

3. Tečné bandly a vektorová pole

3.1. Dokažte, že difeomorfní hladké variety mají stejné dimenze.

3.2. Určete tečný prostor k elipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ v bodě $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$. Určete relace mezi bázovými tečnými vektory odpovídajícím různým lokálním mapám v tomto bodě.

3.3. Ukažte, že $T_{(x,y)}M \times N = T_xM \oplus T_yN$, kde M a N jsou variety a $x \in M$, $y \in N$.

3.4. Určete tečný prostor variety $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ v bodě E.

3.5. Určete tečný prostor variety $\mathrm{O}(n)$ v bodě E.

3.6. Pro hladké zobrazení variet $f : M \to N$ ukažte, že tečné zobrazení $f_* : TM \to TN$ je hladké.

3.7. Určete Xf, kde $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ je vektorové pole a $f = x^2 + y^2 + z^2$ je funkce na $\mathbb{R}^3$.

3.8. Nechť $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y^3\frac{\partial}{\partial y}$ a $f = x^2 + xy$. Určete funkce Xf.

3.9. Určete Lieovy závorky následujících vektorových polí:
a) $X = \sin u\frac{\partial}{\partial v} + \cos v\frac{\partial}{\partial u}$, $Y = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}$;
b) $X = z^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = xyz\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$;
c) $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

3.10. Nechť M je varieta dimenze 1 a X, Y jsou vektorová pole na M, při tom $X_x \neq 0$ pro všechna $x \in M$ a platí, že $[X, Y] = 0$. Ukažte, že $Y = cX$ pro nějakou konstantu $c \in \mathbb{R}$.

3.11. Určete tvar vektorového pole $\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$ v polárních souřadnicích.

3.12. Nechť $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots y^n$ jsou standardní souřadnice na $\mathbb{R}^{2n}$. Ukažte, že zúžení vektorového pole

$$X = \sum_{i=1}^{n} \left(-y^i \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

na sféru $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ je vektorovým polem bez nulových bodů na sféře.

3.13. Ukažte, že následující zobrazení určují toky, a určete odpovídající vektorová pole:
a) $Fl_t^X(x,y) = (5t+x, 4t+y)$;
b) $Fl_\varphi^X(x,y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi, x\sin\varphi + y\cos\varphi)$;
c) $Fl_t^X(x,y) = (e^t x, e^{-t}y)$.

3.14. Určete integrální křivky následujících vektorových polí:
a) $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$;
b) $X = (x+y)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$;
c) $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$.

3.15. Určete integrální křivku vektorového pole X procházející bodem a pro
a) $X = y\sin x\frac{\partial}{\partial x} + x\cos y\frac{\partial}{\partial y}, \quad a = (0,0)$;
b) $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + (x+2y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad a = (2,-1)$;
c) $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad a = (1,1)$;
d) $X = (2x-5y)\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial y}, \quad a = (2,-1)$.

3.16. Pro vektorové pole X určete integrální křivku procházející bodem $(1,1)$, tok Fl_t^X, pevné body toku a obraz čtverce $[-1,1]\times[-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ v toku, jestliže
a) $X = -x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$;
b) $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$

3.17. Určete tok vektorového pole $X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Kam ten tok zobrazuje body $(0,0)$ a $(-1,2)$ během času $t=1$?

3.18. Určete, které z následujících distribucí na $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x,y,z>0\}$ jsou involutivní:
a) distribuce generovaná vektorovými poli
$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$;
b) distribuce generovaná vektorovými poli
$X = xyz\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$, $Y = x\frac{\partial}{\partial x} + (z+y)\frac{\partial}{\partial z}$.

3.19. Ukažte, že každá distribuce dimenze 1 je involutivní.

4. Tenzory

4.1. Nechť $A \in \bigotimes^r V$, $r \geq 2$. Ukažte, že platí nasledující tvrzení:
a) $\mathrm{Sym}A \in S^rV$; $A \in S^rV \Leftrightarrow \mathrm{Sym}A = A$;
b) $\mathrm{Alt}A \in \Lambda^rV$; $A \in \Lambda^rV \Leftrightarrow \mathrm{Alt}A = A$;
c) $\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}A) = \mathrm{Sym}A$; $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}A) = \mathrm{Alt}A$; $\mathrm{Sym}(\mathrm{Alt}A) = 0$; $\mathrm{Alt}(\mathrm{Sym}A) = 0$;
d) $\Lambda^rV \cap S^rV = \{0\}$.

4.2. Určete dimenzi prostorů Λ^rV a S^rV, jestliže $\mathrm{dim}V = n$.

4.3. Ukažte, že $\bigotimes^2 V = S^2V \bigoplus \bigwedge^2 V$.

4.4. Nechť $A \in \Lambda^2 V$, $B \in V$ jsou tensory se souřadnicemi A^{ij} a B^i. Určete souřadnice tensoru $A \wedge B$.

4.5. Nechť $A \in \bigotimes^2 \mathbb{R}^2 \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ je tensor se souřadnicemi

$$A^{11}_1 = 3, \quad A^{11}_2 = 0, \quad A^{12}_1 = 2, \quad A^{12}_2 = 1,$$
$$A^{21}_1 = 0, \quad A^{21}_2 = 1, \quad A^{22}_1 = 0, \quad A^{22}_2 = 5.$$

Určete kontrakce dolního indexu s každým z horních indexů.

4.6. Určete vztah mezi souřadnicemi $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ a $A^{i'_1 \dots i'_r}_{j'_1 \dots j'_s}$ tenzoru $A \in \bigotimes^r V \otimes \bigotimes^s V^*$ v různých bázích.

4.7. Přepište výsledek předchozí úlohy pomoci matic pro následující hodnoty (r, s): a) $(1, 0)$; b) $(0, 1)$; c) $(2, 0)$; d) $(0, 2)$; e) $(1, 1)$.

4.8. Ukažte, že následující zobrazení jsou tenzory na euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$. Určete jejich typy a souřadnice vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Předpokládejme, že $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ a $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{3*}$.
a) $g(X, Y) = (X, Y)$ je skalární součin vektorů;
b) $f(X, Y) = [X, Y]$ je vektorový součin vektorů;
c) $f(X, Y, \xi) = \xi([X, Y])$;
d) $f(X, Y, Z) = (X, Y, Z)$ je smíšený součin vektorů;
e) $f(X, \xi) = \xi(A(u))$, kde $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení;
f) $f(X, Y, \xi, \eta) = \begin{vmatrix} \xi(X) & \eta(X) \\ \xi(Y) & \eta(Y) \end{vmatrix}$.

4.9. Uvažujeme na $\mathbb{R}^3$ tenzory s následujícími souřadnicemi:

$$(X^i) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\xi_i) = (3 \;\; 7 \;\; 1), \quad (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete souřadnice následujících tenzorů: a) $\xi(X)$; b) $\xi \otimes X$; c) $\operatorname{tr}(\xi \otimes X)$; d) $T \otimes \xi$; e) $T \otimes X$; f) $\operatorname{tr}^1_1(T \otimes X)$; g) $\operatorname{tr}^1_2(T \otimes X)$; h) $\operatorname{tr}^{12}_{12}(T \otimes X \otimes X)$.

4.10. Nechť (e_i) je báze prostoru $\mathbb{R}^3$ a (e^i) je odpovídající kobáze. Vypočtete $(\xi \otimes \eta)(X, Y)$, jestliže
a) $\xi = e^1 - e^2 + 3e^3$, $\eta = e^1 + 2e^2 - e^3$, $X = e_1 - 2e_2 + e_3$, $Y = -e_1 + e_2$;
b) $\xi = e^1 + e^2 - e^3$, $\eta = e^1 - e^2 + e^3$, $X = 2e_1 - 2e_2 - e_3$, $Y = e_1 + e_2 - 3e_3$.

4.11. Nechť $\xi, \eta \in V^*$ jsou nenulové. Ukažte, že pokud $\xi \otimes \eta = \eta \otimes \xi$, pak $\xi = \lambda \eta$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.12. Určete souřadnice tenzorů $\operatorname{Sym}(\xi \otimes \eta)$, $\operatorname{Sym}(X \otimes Y)$, $\operatorname{tr}^{12}_{12}(\operatorname{Sym}(\xi \otimes \eta) \otimes \operatorname{Sym}(X \otimes Y))$, $\operatorname{tr}^{12}_{21}(\operatorname{Sym}(\xi \otimes \eta) \otimes \operatorname{Sym}(X \otimes Y))$, jestliže kovektory ξ, η a vektory X, Y mají následující souřadnice:
a) $\xi = (1, -2)$, $\eta = (1, 1)$, $X = (1, 2)$, $Y = (1, -2)$;
b) $\xi = (2, 1)$, $\eta = (1, -1)$, $X = (3, 2)$, $Y = (1, 1)$.

4.13. Nechť $b \in \otimes^2 V^*$. Ukažte, že pokud $b(X,X) = 0$ pro všechna $X \in V$, pak $\mathrm{Sym} b = 0$.

4.14. Nechť $A \in \wedge^2 V$ a $b \in S^2 V^*$. Určete $\mathrm{tr}^{12}_{12}(A \otimes B)$.

4.15. Ukažte, že vektory $X_1, ..., X_r \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$X_1 \wedge \cdots \wedge X_r \neq 0.$$

5. Tenzorová pole

5.1. Určete vztah mezi souřadnicemi tenzorového pole T typu (r,s) na $\mathbb{R}^n$ ve dvou souřadnicových systémech $x^1, ..., x^n$ a $x^{1'}, ..., x^{n'}$.

5.2. Nechť (x,y) a (r,φ) jsou standardní a polární souřadnice na $\mathbb{R}^2$. Určete souřadnice kovektorového pole $\xi = xdx + ydy$ vůči polárním souřadnicím a souřadnice kovektorového pole $\eta = rdr + \varphi d\varphi$ vůči standardním souřadnicím.

5.3. Nechť x^1, x^2, x^3 a $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ jsou souřadnicové systémy, pro které

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = x^1 + x^2, \quad x^{3'} = x^1 + x^2 + x^3.$$

Určete souřadnice tensorového poli X vůči prvnímu systému, jestliže

$$X = x^{2'} \frac{\partial}{\partial x^{1'}} \otimes dx^{2'} - (x^{1'} + x^{2'}) \frac{\partial}{\partial x^{2'}} \otimes dx^{1'} + x^{3'} \frac{\partial}{\partial x^{3'}} \otimes dx^{3'}.$$

5.4. Nechť x^1, x^2, x^3 a $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ jsou souřadnicové systémy, pro které

$$x^{1'} = x^1, \quad x^{2'} = x^1 - x^2, \quad x^{3'} = x^1 - x^2 - x^3.$$

Určete tvar tensorového pole X vůči druhému systému, jestliže

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

6. Vnější diferenciální formy

6.1. Určete $\omega(X)$, kde $\omega = zdx - dz$, $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

6.2. Určete $\alpha \wedge \beta$, jestliže

$$\alpha = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz, \quad \beta = b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge dx + b_3 dx \wedge dy.$$

6.3. Nechť $\omega = (x^2 + y^2)dx + xzdz$ a $\theta = zdy \wedge dx + xdz \wedge dx$
Určete $d\omega$, $d\theta$, $\omega \wedge \omega$, $\theta \wedge \theta$, $\omega \wedge \theta$, $d(\omega \wedge \theta)$.

6.4. Určete $d\omega$, jestliže a) $\omega = x^2 ydy - xy^2 dx$; b) $\omega = xdy + ydx$;
c) $\omega = f(x)dx + g(y)dy$; d) $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$;
e) $\omega = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$; f) $\omega = xydx \wedge dz + zudz \wedge du$.

6.5. Ověřte, které z nasledujících 1-forem ω jsou uzavřené na D. Určete všechny funkce φ splňující $d\varphi = \omega$.
a) $\omega = xydx + \frac{x^2}{2}dy$, $D = \mathbb{R}^2$;
b) $\omega = xdx + xzdy + xydz$, $D = \mathbb{R}^2$;
c) $\omega = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(ydx - xdy)$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$.

6.6. Pro 1-formu

$$(3x^2 - 3yz + 2)dx + (3y^2 - 3xz + 1)dy + (3z^2 - 3xy + 1)dz = 0$$

na $\mathbb{R}^3$ určete všechny funkce f splňující $df = \omega$.

6.7. Určete $d\omega$, jestliže $\omega = d\theta \wedge \theta$ a θ je 2-formou na varietě M.

6.8. Nechť M je souvislá varieta. Ukažte, že $H^0(M) \cong \mathbb{R}$.

6.9. Ukažte, že vnější formy $\omega = xdx + ydy$ a $\eta = ydx + xdy$ na $\mathbb{R}^2$ jsou uzavřené. Ověřte, jestli tyto formy patří do stejné kohomologické třídy.

6.10. Nechť ω je exaktní forma a ξ je libovolná forma. Ukažte, že forma $\omega \wedge \xi$ je exaktní.

6.11. Nechť $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ je zobrazení. Ukažte, že a) $f^*\left(\frac{xdx - ydy}{x^2+y^2}\right) = d\varphi$; b) $f^*(xdx + ydy) = rdr$.

6.12. Nechť $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(u,v) = (uv, u\cos v, e^v)$ je zobrazení. Určete $d\omega$, $g^*\omega$, $g^*d\omega$ pro nasledující formy ω na $\mathbb{R}^3$: a) $\omega = xdy$; b) $\omega = ydz \wedge dx$; c) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

6.13. Nechť $\omega = dp^1 \wedge dq^1 + \cdots + dp^n \wedge dq^n$ je 2-forma na $\mathbb{R}^{2n}$. Ukažte, že ω je uzavřená a že pro její n-tou vnější mocninu platí

$$\omega \wedge \cdots \wedge \omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n! dp^1 \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dp^n \wedge dq^n.$$

6.14. Ukažte, že 2-forma

$$\omega = xydx \wedge dy + 2xdy \wedge dz + 2ydx \wedge dz$$

na $\mathbb{R}^3$ je uzavřená, a určete aspoň jednu 1-formu θ splňující $d\theta = \omega$.

6.15. Určete $\int_M \omega$, kde ω je 1-forma z předchozí úlohy a

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^3 = 1,\ z \geq 0\}.$$

6.16. Určete $\int_M \omega$, kde
a) $\omega = (x - y)dx + (x + y)dy$ a M je úsečka AB, $A = (2,3)$, $B = (3,5)$;
b) $\omega = ydx + xdy$, $M = \{(\cos t, \sin t) | t \in (0, \frac{\pi}{2})\} \subset \mathbb{R}^2$;
c) $\omega = xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ a M je úsečka AB, $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,4)$.

6.17. Určete

$$\int_M dx_3 \wedge dx_4 + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_4,$$

kde $M = T^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Uvažujte parametrizaci $g(u, v) = (\cos u, \sin u, \cos v, \sin v)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

6.18. Pomocí Stokesovy věty určete $\int_M \omega$, kde
a) $\omega = (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$ a M je obvod trojúhelníku s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$;
b) $\omega = xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + xzdx \wedge dy$ a M je hranice standardního trojrozměrného simplexu v $\mathbb{R}^3$.

6.19. Ukažte, že 2-forma $\omega = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)$ na $\mathbb{R}^3\setminus\{(0, 0, 0)\}$ je uzavřená, ale není exaktní.

6.20. Ukažte, že 1-forma $\omega = \frac{-ydy+xdy}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ je uzavřená, ale není exaktní.

7. Lineární konexe a Riemannovy prostory

7.1. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$ s nulovými Christoffelovými symboly vůči souřadnicím x, y. Určete symbol $\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}$ konexe ∇ vůči polárním souřadnicím r, φ.

7.2. Nechť ∇ je lineární konexe bez torse na varietě M a S je paralelní distribuce na M, tj. $\nabla_Y X \in \Gamma(S)$ pro všechna $X \in \Gamma(S)$, $Y \in \Gamma(TM)$. Ukažte, že distribuce S je involutivní.

7.3. Ukažte jak vypadají souřadnicové vzorce pro kovariantní derivace tenzorů následujících typů: a) $(0, 0)$; b) $(1, 0)$; c) $(0, 1)$; d) $(1, 1)$; e) $(2, 0)$; f) $(0, 2)$.

7.4. Určete $\nabla_i \delta^j_k$, kde je ∇ je lineární konexe.

7.5. Nechť tenzorové pole T typu $(0, 2)$ na $\mathbb{R}^2$ má následující souřadnice:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & x^1 + x^2 \\ 2x^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete kovariantní derivace tenzoru T vůči symetrické konexi bez torze mající Christoffelovy symboly

$$\Gamma^1_{11} = (x^1)^2, \quad \Gamma^1_{12} = x^1x^2, \quad \Gamma^1_{22} = (x^2)^2,$$
$$\Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{x^1}{x^2}, \quad \Gamma^2_{22} = 0.$$

7.6. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, která má vůči standardním souřadnicím nulové Christoffelovy symboly, pouze $\Gamma^2_{22} = -1$. Určete výsledek paralelního přenášení vektoru $X = (1, 0)$ podél dráhy

$$x^1(2) = 2t + 1, \quad x^2(t) = -t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

z bodu a_0 $(t_0 = 0)$ do bodu a_1 $(t_1 = 1)$.

7.7. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, která má vůči standardním souřadnicím nulové Christoffelovy symboly, pouze $\Gamma^1_{12} = 1$. Určete symbol Γ^1_{11} vůči souřadnicím $y^1 = x^1 + x^2$, $y^2 = x^1 - x^2$.

7.8. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, která má vůči standardním souřadnicím nulové Christoffelovy symboly, pouze $\Gamma^2_{12} = 1$.
a) Nechť $g = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2$. Určete $\nabla_1 g_{12}$.
b) Najděte $\nabla\omega$, jestliže $\omega = dx^1 \wedge dx^2$.

7.9. Určete Christoffelovy symboly Riemannovy metriky

$$g = e^{2f}(dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n),$$

kde f je funkce. Najděte tenzor Ricciho metriky g pro $n = 2$.

7.10. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, která má nulové Christoffelovy symboly kromě

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{2y}{1+y^2}$$

vůči souřadnicím $x^1 = x$, $x^2 = y$. Určete souřadnice tenzorů torze a křivostí.

7.11. Nechť R^l_{kij} jsou souřadnice tenzoru křivosti Riemannovy konexe metriky g_{ij}. Určete $g^{ij}R^l_{kij}$.

7.12. Určete metriku na sféře S^2 vůči
a) sférickým souřadnicím;
b) vůči souřadnicím definovaným pomocí stereografické projekce.

7.13. Určete Christoffelovy symboly pro metriku na sféře vůči souřadnicím z předchozí úlohy.

7.14. Řešte rovnice paralelního přenosu na sféře s metrikou $(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2$ podél rovnoběžky $\theta = \theta_0, \varphi = t \in [0, 2\pi]$. Určete úhel mezi tečným vektorem ke sféře a jeho obrazem při paralelním přenosu podél této rovnoběžky.

7.15. Určete R, ∇R, Ric, ∇Ric a skalární křivost metriky na sféře vůči sférickým souřadnicím.

7.16. Uvažujeme metriku Minkowského

$$-(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2$$

v číselném prostoru $\mathbb{R}^3$ a definujeme metriku g na povrchu Lobačevského $L^2 \subset R^3$ jako metriku indukovanou. Určete metriku g
a) vůči souřadnicím (χ, φ), kde (a, χ, φ) jsou pseudosférické souřadnice prostorů $\mathbb{R}^3$, tj. $t = a\cosh\chi$, $x = a\sinh\chi\cos\varphi$, $y = a\sinh\chi\sin\varphi$;
b) vůči souřadnicím (u, v) definovaným pomocí stereografické projekce (kruhový model Poincarého geometrie Lobačevského);
c) vůči souřadnicím (r, s) modelu geometrie Lobačevského v horní polorovině

$$H = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 | s > 0\},$$

souřadnice (r, s) jsou definovaný vzorcem

$$r + is = i\frac{1 + u + iv}{1 - u - iv}.$$

7.17. Určete Christoffelovy symboly pro metriku povrchu Lobačevského vůči souřadnicím z předchozí úlohy.

7.18. Určete délku kružnice $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 1$
a) vůči metrice $g = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\big((dx)^2 + (dy^2)\big)$;
b) vůči metrice $g = \frac{1}{s^2}((dr)^2 + (ds)^2)$.

7.19. Určete geodetické dráhy modelu geometrie Lobačevského
a) v kruhu; b) v horní polorovině.

7.20. Nechť dvě konexe Γ^k_{ij} a $\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ mají stejné geodetické dráhy. Ukažte, že každá konexe $\bar{\Gamma}^k_{ij} = \alpha\Gamma^k_{ij} + \beta\tilde{\Gamma}^k_{ij}$ $(\alpha + \beta = 1)$ má tytéž geodetické dráhy.

7.21. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, pro kterou

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

Najděte geodetiku $\gamma(t)$ takovou, že $\gamma(0) = (0,0)$, $\dot{\gamma}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_0$.

7.22. Nechť $\gamma(t) = (t,t)$, $0 \le t \le 1$ je geodetika nějaké konexe na $\mathbb{R}^2$. Určete výsledek paralelního přenosu vektoru $X = (2,2) \in T_{\gamma(0)}\mathbb{R}^2$ podél γ.

7.23. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, která má nulové Christoffelovy symboly, pouze

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{12} = -\frac{2x}{1+x^2}.$$

Najděte geodetiky této konexe.

7.24. Najděte nutné a postačující podmínky pro to, aby každá křivka splňující $x = const$ byla geodetickou křivkou dané lineární konexe ∇ na $\mathbb{R}^2$.

7.25. Ukažte, že Ricciho tenzor Riemannovy variety je symetrický.

7.26. Ukažte, že pro Riemannův prostor platí

$$g^{ki}\nabla_k \mathrm{Ric}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{Scal}}{\partial x^j}.$$

7.27. Nechť je (M,g) Einsteinova varieta, tj. platí

$$\mathrm{Ric} = \lambda g$$

pro vhodnou funkci λ. Najděte skalární křivost této variety. Ukažte, že pokud dimenze variety je větší než 2, pak funkce λ je konstantní.

7.28. Nechť ∇ je lineární konexe na $\mathbb{R}^2$, která má nulové Christoffelovy symboly, pouze

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = 1.$$

Najděte Ricciho tenzor této konexe.

7.29. Nechť R^l_{kij} jsou souřadnice tenzoru křivosti lineární konexe bez torze. Určete R^1_{211} a R^1_{121}, jestliže $R^1_{112} = x^1$.

7.30. Nechť M je varieta s lineární konexí ∇ a $x \in M$. Ukažte, že množina paralelních přenosu podél po částech uzavřených hladkých drahách y bodu x tváři podgrupu grupy $\mathrm{GL}(T_xM)$ všech lineárních izomorfizmů tečného prostoru T_xM. Tato grupa se jmenuje holonomickou grupou konexe ∇ z bodu x.

7.31. Ukažte, že pokud M je souvislá varieta, pak holonomcké grupy v různých bodech jsou izomorfní.

7.32. Určete holonomckou grupu dvourozměrné sféry.

7.33. Nechť n-dimenzionální Riemannovská varieta (M, g) je plochá, tj. v okolí každého její bodu existuje n paralelních, bodově lineárně nezávislých vektorových polí. Dokažte, že
a) tenzor křivosti je nulový;
b) v okolí každého bodu existují souřadnice $x^1, \ldots, x^n$ takové, že $g = \delta_{ij} dx^i dx^j$.

Návody a výsledky cvičení

1.1. a) $J = \begin{pmatrix} 3\cos t & -3\rho\sin t \\ 4\sin t & 4\rho\cos t \end{pmatrix}$; $\det J = 12\rho$; je imerse, submerse a difeomorfismus na svůj obraz;

b) $J = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix}$ je imerse, není submerse, je difeomorfismus na svůj obraz;

c) $J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\cos\varphi & -\sqrt{\rho}\sin\varphi \\ \frac{1}{2\sqrt{\rho}}\sin\varphi & \sqrt{\rho}\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ je imerse, není submerse, je difeomorfismus na svůj obraz;

d) $J = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 & -2uv \\ -2uv & 1+u^2-v^2 \end{pmatrix}$; $\det J = \frac{4(1-u^2-v^2)}{(1+u^2+v^2)^3}$ není imerse, není submerse, a není difeomorfismus na svůj obraz.

1.4. Předpokládejte, že existuje difeomorfismus ψ nějakého okolí U bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ na otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$, který zobrazuje $M \cap U$ na podmnožinu množiny $\{(x,0) | \, x \in \mathbb{R}\}$ a ukažte, že Jakobián zobrazení ψ v bodě $(0,0)$ je roven 0.

1.7. Je podvarietou.

1.8. Je podvarietou.

1.9. $c \neq 0$.

1.10. n^2.

1.11. $n^2 - 1$.

1.12. $\frac{n(n-1)}{2}$.

1.14. 1. způsob: aplikujte předchozí úlohu; 2. způsob: zadejte anuloid jako řešení soustavy rovnic.

2.1. Není slučitelnou mapou.

2.8. Tato mapa by musela být homeomorfismem sféry (což je kompaktní topologický prostor) a otevřené podmnožiny eukleidovského prostoru.

3.1. Ukažte, že tečné zobrazení v libovolném bodě je isomorfismem.

3.2. Přímka $2x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

3.4. Množina čtvercových matic řádu n s nulovou stopou.

3.5. Množina antisymetrických čtvercových matic řádu n.

3.7. $2x^2 + 2y^2$.

3.8. $2x^2 + xy^3 + xy$.

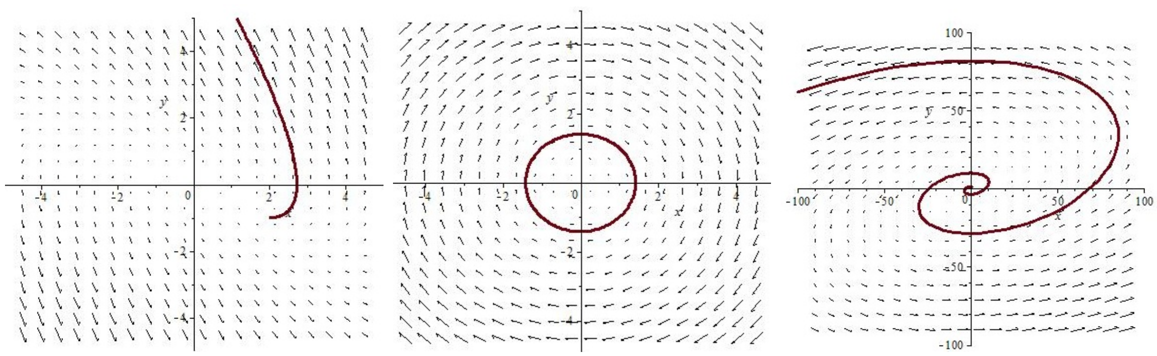
3.9. a) $(\cos v + v \sin v)\frac{\partial}{\partial u} + (\sin u - u \cos u)\frac{\partial}{\partial v}$;
b) $(yz^3 - 2xz + x^2yz)\frac{\partial}{\partial x} + (xy^2 - xy^2z)\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}$; c) 0.

3.11. $r(\cos\varphi + \sin\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + (\cos\varphi - \sin\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

3.13. a) $5\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial y}$; b) $-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$; c) $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.

3.14. a) $x(t) = x_0e^t$, $y(y) = y_0e^t$; b) $x(t) = (x_0 + y_0t)e^t$, $y(t) = y_0e^t$; c) $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0t}$, $y(t) = \frac{y_0}{1-y_0t}$.

3.15. a) $x(t) = 0$, $y(t) = 0$; b) $x(t) = (2-t)e^t$, $y(t) = (t-1)e^t$; c) $x(t) = \cos t + \sin t$, $y(t) = \cos t - \sin t$; d) $x(t) = e^t\left(\cos 3t - \frac{40}{9}\sin 3t\right)$, $y(t) = e^t\left(\cos 3t + \frac{1}{9}\sin 3t\right)$.



Obrázek 2. Integrální křivky vektorových poli b), c), d) z úlohy 3.15

3.16. a) Integrální křivka: $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$; tok: $Fl_t^X(x,y) = (xe^{-t}, ye^t)$; pevný bod: $(0,0)$; obrazem čtverce je obdélník $[-e^{-t}, e^{-t}] \times [-e^t, e^t]$;
b) Integrální křivkou je kružnice: $x(t) = \cos t - sint$, $y(t) = \cos t + \sin t$, $t \in \mathbb{R}$; tok je soustava rotací: $Fl_t^X(x,y) = (x\cos t - y\sin t, x\sin t + y\cos t)$; pevný bod: $(0,0)$; obrazem čtverce je čtverec $[-1,1] \times [-1,1]$ otočený o úhel t.

3.17. Tok: $Fl_t^X(x,y) = \left(\frac{xt}{1-xt}, ye^t\right)$; bod $(0,0)$ zůstává na místě; tok zobrazuje bod $(-1,2)$ na bod $\left(-\frac{1}{2}, 2e\right)$.

3.18. a) je involutivní; b) není involutivní.

4.2. $\binom{n}{r}$; $\binom{n+r-1}{r}$.

4.4. $\frac{1}{3}(A^{ij}B^k + A^{jk}B^i + A^{ki}B^j)$.

4.5. $A_i^{1i} = 4$; $A_i^{2i} = 5$; $A_i^{i1} = 4$; $A_i^{i2} = 7$.

4.6. $A^{i'_1\dots i'_r}_{j'_1\dots j'_s} = B^{i'_1}_{i_1}\cdots B^{i'_r}_{i_r}B^{j_1}_{j'_1}\cdots B^{j_s}_{j'_s}A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$, kde $(B^i_{i'})$ je matice přechodu od první báze (e_i) k druhé bázi $(e_{i'})$, tj $e_{i'} = B^i_{i'}e_i$, a $(B^{i'}_i) = B^{-1}$ je inverzní matice, tj. $B^i_{i'}B^{i'}_j = \delta^i_j$.

4.7. a) $(A^{i'}) = B^{-1}\cdot(A^i)$; b) $(A_{i'}) = B\cdot(A_i)$; c) $(A^{i'j'}) = B^{-1}\cdot(A^{ij})\cdot(B^{-1})^T$; d) $(A_{i'j'}) = B^T\cdot(A_{ij})\cdot B$; e) $(A^{i'}_{j'}) = B^{-1}\cdot(A^i_j)\cdot B$.

4.8. a) $g\in\otimes_2\mathbb{R}^3$, $g_{ij}=\delta_{ij}$;
b), c) $f\in\otimes^1_2\mathbb{R}^3$, nenulové souřadnice: $f^3_{12} = -f^3_{21} = f^2_{31} = -f^2_{13} = f^1_{23} = -f^1_{32} = 1$;
d) $f\in\otimes_3\mathbb{R}^3$, nenulové souřadnice: $f_{123} = f_{231} = f_{312} = -f_{213} = -f_{132} = -f_{321} = 1$;
e) $f\in\otimes^1_1\mathbb{R}^3$, $f^i_j = A^i_j$, kde (A^i_j) je matice lineárního zobrazení A;
f) $f\in\otimes^2_2\mathbb{R}^3$, $f^{ij}_{kl} = \delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k$.

4.9. a) 13; b) $(\xi\otimes X)^i_j) = \begin{pmatrix}6 & 14 & 2\\ 3 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; c) 13; f) (4 0 5); g) (2 4 1); h) 8.

4.10. a) 6; b) -6.

4.12. a) $(\mathrm{Sym}(\xi\otimes\eta)_{ij}) = \begin{pmatrix}1 & -\frac12\\ -\frac12 & -2\end{pmatrix}$, $(\mathrm{Sym}(X\otimes Y)^{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}^{12}_{12}(\mathrm{Sym}(\xi\otimes\eta)\otimes\mathrm{Sym}(X\otimes Y)) = 9$, $\mathrm{tr}^{12}_{21}(\mathrm{Sym}(\xi\otimes\eta)\otimes\mathrm{Sym}(X\otimes Y)) = 9$;
b) $(\mathrm{Sym}(\xi\otimes\eta)_{ij}) = \begin{pmatrix}2 & -\frac12\\ -\frac12 & -1\end{pmatrix}$, $(\mathrm{Sym}(X\otimes Y)^{ij}) = \begin{pmatrix}3 & \frac52\\ \frac52 & 2\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}^{12}_{12}(\mathrm{Sym}(\xi\otimes\eta)\otimes\mathrm{Sym}(X\otimes Y)) = \frac32$, $\mathrm{tr}^{12}_{21}(\mathrm{Sym}(\xi\otimes\eta)\otimes\mathrm{Sym}(X\otimes Y)) = \frac32$.

4.14. 0.

5.1.

$$A^{i'_1\dots i'_r}_{j'_1\dots j'_s} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}A^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}.$$

5.2. $\xi = rdr$, $\eta = \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}\right)dy$.

5.3. $(X^i_j) = \begin{pmatrix}x^1+x^2 & x^1+x^2 & 0\\ -3x^1-2x^2 & -x^1-x^2 & 0\\ 3x^1+2x^2+x^3 & x^1+x^2+x^3 & x^1+x^2+x^3\end{pmatrix}$.

5.4. $X = x^{1'}\frac{\partial}{\partial x^{1'}} + x^{2'}\frac{\partial}{\partial x^{2'}} + x^{3'}\frac{\partial}{\partial x^{3'}}$.

6.1. yz.

6.2. $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)dx\wedge dy\wedge dz$.

6.3. $d\omega = -2ydx\wedge dy + zdx\wedge dz$, $d\theta = -dx\wedge dy\wedge dz$, $\omega\wedge\omega = 0$, $\theta\wedge\theta = 0$, $\omega\wedge\theta = -xz^2dx\wedge dy\wedge dz$, $d(\omega\wedge\theta) = 0$.

6.4. a) $4xydx\wedge dy$; b) 0; c) 0; d) $3dx\wedge dy\wedge dz$; e) 0; f) $-xdx\wedge dy\wedge dz$.

6.5. a) $\varphi = \frac12 x^2y + c$; b) ω není uzavřená; c) $\varphi = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + c$.

6.6. $f = x^3+y^3+z^3-3xyz+2x+y\ln y+z+c$.

6.7. 0.

6.9. Patří do stejné kohomologické třídy.

6.10. Nechť $\omega = d\theta$, pak $d(\theta \wedge \xi) = \omega \wedge \xi$.

6.12. a) $d\omega = dx \wedge dy$, $g^*\omega = uv\cos v du - u^2 v \sin v dv$, $g^*(d\omega) = -(uv\sin v + u\cos v) du \wedge dv$; b) $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, $g^*\omega = -e^v uv\cos v du \wedge dv$, $g^* d\omega = 0$; c) $d\omega = 0$, $g^*\omega = 0$, $g^* d\omega = 0$.

6.14. $\theta = \frac{1}{2}x^2 y dy + 2xydz$.

6.15. 0.

6.16. a) $\frac{23}{2}$; b) 0; c) 13.

6.17. π^2.

6.18. a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{8}$.

6.19. Důkaz neexaktnosti: 1. ukažte, že $\int_{S^2} \omega \neq 0$; 2. pomocí Stokesovy věty ukažte, že pro libovolnou exaktní 2-formu ω je $\int_{S^2} \omega = 0$.

7.1. $\frac{1}{r}$.

7.3. a) $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_k f = \partial_k f$;
b) $X \in \Gamma(TM)$, $\nabla_k X^i = \partial_k X^i + \Gamma^i_{jk} X^j$;
c) $\xi \in \Gamma(T^*M)$, $\nabla_k \xi_i = \partial_k \xi_i - \Gamma^j_{ik}\xi_j$;
d) $A \in \Gamma(\otimes^1_1 TM)$, $\nabla_k A^j_i = \partial_k A^j_i + \Gamma^j_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^j_l$;
e) $A \in \Gamma(\otimes^2 TM)$, $\nabla_k A^{ij} = \partial_k A^{ij} + \Gamma^i_{lk} A^{lj} + \Gamma^j_{lk} A^{il}$;
f) $A \in \Gamma(\otimes_2 TM)$, $\nabla_k A_{ij} = \partial_k A^j_i - \Gamma^l_{ik} A_{lj} - \Gamma^l_{jk} A_{il}$.

7.4. 0.

7.5. $(\nabla_1 T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - (x^1 + x^2)\left((x^1)^2 - \frac{x^1}{x^2}\right) \\ -2x^1(1 + x^1x^2) & -2\frac{x^1}{x^2} - (x^1 + 3x^2)x^1x^2 \end{pmatrix}$,
$(\nabla_2 T_{ij}) = \begin{pmatrix} -(x^1 + 3x^2)\frac{x^1}{x^2} & 1 - (x^1 + x^2)x^1x^2 - \frac{x^1}{x^2} \\ 2(1 - x^1x^2)^2 - \frac{x^1}{x^2} & -(x^1 + 3x^2)(x^2)^2 \end{pmatrix}$.

7.6. $(1, 0)$.

7.7. $\frac{1}{4}$.

7.8. a) 0; b) nenulové komponenty $\nabla_i \omega_{jk}$: $\nabla_1 \omega_{12} = -\nabla_1 \omega_{21} = -1$.

7.9. $\Gamma^k_{ij} = \delta_{kj}\partial_i f + \delta_{ki}\partial_j f - \delta_{ij}\partial_k f$; $\mathrm{Ric}_{11} = \mathrm{Ric}_{22} = -\partial_1^2 f - \partial_2^2 f$, $\mathrm{Ric}_{12} = \mathrm{Ric}_{21} = 0$.

7.10. Nenulové komponenty: $T^2_{12} = -T^2_{21} = -\frac{2y}{1+y^2}$; $R^2_{212} = -R^2_{221} = -2\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$.

7.11. 0.

7.12. a) $g = (d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2$; b) $g = \frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}((du)^2 + (dv)^2)$.

7.13. a) Nenulové symboly: $\Gamma^1_{22} = -\sin\theta\cos\theta$, $\Gamma^2_{11} = \mathrm{cotan}\theta$;
b) $-\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = -\Gamma^2_{12} = \frac{2u}{1+u^2+v^2}$, $-\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = \frac{2v}{1+u^2+v^2}$.

7.14. $X^1(t) = \sin\theta_0(c_1\sin(\cos\theta_0 t) - c_2\cos(\cos\theta_0 t))$, $X^2(t) = c_1\cos(\cos\theta_0 t) + c_2\sin(\cos\theta_0 t)$, úhel je $2\pi\cos\theta_0$.

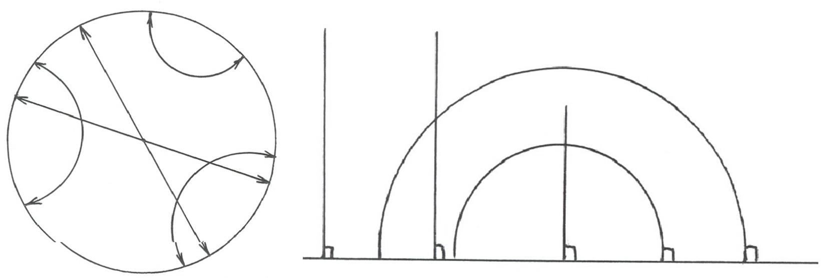
7.15. Nenulové komponenty R: $R^1_{212} = -R^1_{221} = \sin^2\theta$, $R^2_{112} = -R^2_{121} = -1$, $(x^1 = \theta,\ x^2 = \varphi)$; $\nabla R = 0$, $\mathrm{Ric} = g$, $\nabla\mathrm{Ric} = 0$, $\mathrm{Scal} = 2$.

7.16. a) $g = (d\chi)^2 + \sinh^2\chi(d\varphi)^2$; b) $g = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}((du)^2 + (dv)^2)$
c) $g = \frac{1}{s^2}((dr)^2 + (ds)^2)$.

7.17. a) Nenulové symboly: $\Gamma^1_{22} = -\sinh\chi\cosh\chi$, $\Gamma^2_{11} = \mathrm{cotanh}\chi$;
b) $\Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{12} = \frac{2u}{1-u^2-v^2}$, $\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \frac{2v}{1-u^2-v^2}$;
c) nenulové symboly: $-\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = \frac{1}{s}$.

7.18. a) $\frac{2\pi}{\sqrt{170}}$; b) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

7.19. a) oblouky kružnic kolmých na hranici kruhu, a průměry kruhu; b) polokružnice se středy na ose x a polopřímky kolmé na ose x (viz. obrázek 3).



Obrázek 3. Geodetické dráhy geometrie Lobačevského

7.20. Pro důkaz faktu, že každá geodetická dráha konexe Γ (a $\tilde{\Gamma}$) je geodetickou drahou konexe $\bar{\Gamma}$, stačí uvažovat odpovídající rovnice. Opačně, nechť $\bar{\gamma}$ je geodetická dráha pro $\bar{\Gamma}$. Nechť γ je geodetická dráha pro Γ (a $\tilde{\Gamma}$) splňující $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0)$, $\dot{\gamma}(0) = \dot{\bar{\gamma}}(0)$. Pak γ je geodetickou drahou pro $\bar{\Gamma}$. Z uvedených podmínek vyplývá, že $\gamma = \bar{\gamma}$.

7.21. $x(t) = \ln(t+1)$, $y(t) = 0$.

7.22. $(2,2) \in T_{\gamma(1)}\mathbb{R}^2$.

7.23. $ax + by + c = 0$, kde a, b, c jsou libovolné konstanty a $a^2 + b^2 \neq 0$.

7.24. $\Gamma^1_{22} = 0$.

7.25. Využijte první Bianchiho identitu.

7.26. Využijte druhou Bianchiho identitu.

7.27. $\mathrm{Scal} = n\lambda$; pro důkaz konstantnosti λ využijte předchozí úlohu.

7.28. Nenulová komponenta: $\mathrm{Ric}_{22} = 1$.

7.29. $R^1_{211} = 0$; $R^1_{121} = -x^1$.

7.31. Pokud γ je uzavřenou křivkou v bodě x a μ je křivka s počátkem v bodě x a koncem v bodě y, pak kompozice μ a λ je uzavřená křivka v bodě y. Zvolíme-li pevně μ a uvažujeme-li paralelní přenosy, dostaneme jisté zobrazení z grupy holonomie v bodě x do grupy holonomie v bodě y.

7.32. $\mathrm{SO}(2)$, tj. grupa všech rotací tečné roviny.

7.33. b) nechť lokální vektorová pole $X_1, \cdots X_n$ jsou paralelní. Ukažte, že jejích Lieovy závorky jsou nulové. To znamená, že existují souřadnice $x^1, \ldots, x^n$ takové, že $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Použitá literatura

[1] Agricola I.; Friedrich Th. *Global analysis. Differential forms in analysis, geometry and physics.* Translated from the 2001 German original by Andreas Nestke. Graduate Studies in Mathematics, 52. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. xiv+343 pp.

[2] KOLÁŘ I. *Úvod do globální analýzy.* 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2003. iv, 118 s.

[3] Malakhaltsev M. A., Fomin B. E. *Sbornik zadač po tenzornomu analizu.* (Russian) [*Collection of problems in tensor analys*] Kazan, Kazanskij gosudarstvennyj universitet. 2008. 91 s.

[4] Mishchenko A. S.; Solov'ev Yu. P.; Fomenko A. T. *Sbornik zadač po differentsial'noj geometrii i topologii.* (Russian) [*Collection of problems in differential geometry and topology*] Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1981. 184 s.

[5] Novikov, S. P.; Fomenko, A. T. Basic elements of differential geometry and topology. Translated from the Russian by M. V. Tsaplina. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 60. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990. x+490 pp.

[6] Novikov S. P.; Taimanov I. A. *Modern geometric structures and fields.* Translated from the 2005 Russian original by Dimitry Chibisov. Graduate Studies in Mathematics, 71. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. xx+633 pp.

[7] Robbin J. W., Salamon D. A. *Introduction to Differential Geometry.* ETH, Lecture Notes. 2013. Available on http://www.math.ethz.ch/ salamon/PREPRINTS/diffgeo.pdf

[8] Tu L. W. *An introduction to manifolds.* Second edition. Universitext. Springer, New York, 2011. xviii+411 pp.