Téma 11: Neparametrické úlohy o mediánech

Úkol 1.: Párový znaménkový test a párový Wilcoxonův test
Při zjišťování kvality jedné složky půdy se používají dvě metody označené A a B. Výsledky:

Vzorek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0,275	0,312	0,284	0,3	0,365	0,298	0,312	0,315	0,242	0,321	0,335	0,307
B	0,28	0,312	0,288	0,298	0,361	0,307	0,319	0,315	0,242	0,323	0,341	0,315

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že metody A a B dávají stejné výsledky.

Návod: Testujeme H_0: $z_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $z_{0,50} \neq 0$, kde $z_{0,50}$ je medián rozložení, z něhož pochází rozdílový náhodný výběr $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_{12} = X_{12} - Y_{12}$.
Vypočteme rozdíly mezi výsledky metod A a B:
$x_i - y_i$: -0,005, 0, -0,004, 0,002, 0,004, -0,009, -0,007, 0, 0, -0,002, -0,006, -0,008
Párový znaménkový test: Nenulových rozdílů je 9, testová statistika $S_Z^+ = 2$. Ve statistických tabulkách najdeme pro n = 9 a $\alpha = 0,05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 8$. Protože kritický obor $W = \langle 0,1 \rangle \cup 8$ neobsahuje hodnotu 2, nemůžeme H_0 zamítnout na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 0,05 metody A a B dávají stejné výsledky.
Párový Wilcoxonův test: Absolutní hodnoty nenulových rozdílů uspořádáme vzestupně podle velikosti:

Usp. abs($x_i - y_i$):	**0,002**	0,002	**0,004**	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
Pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Průměrné pořadí	**1,5**	1,5	**3,5**	3,5	5	6	7	8	9

$S_W^+ = 1,5 + 3,5 = 5$,
$S_W^- = 1,5 + 3,5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$,
n = 9, $\alpha = 0,05$, tabelovaná kritická hodnota pro n = 9 a $\alpha = 0,05$ je 5, testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(5,40) = 5$. Protože $5 \leq 5$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Postup ve STATISTICE:
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými A a B a 12 případy. Do proměnné A napíšeme výsledky metody A, do proměnné B výsledky metody B.
Provedení párového znaménkového testu: Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných A, 2. seznam proměnných B – OK – Znaménkový test.

	Znaménkový test (metody AB.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet různých	procent v < V	Z	Úroveň p
A & B	9	77,77778	1,333333	0,182422

Vidíme, že nenulových hodnot n = 9. Z nich záporných je 77,78%, tj. 7. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 9 - 7 = 2$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 1,3333. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,182422, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že obě metody dávají stejné výsledky. Nejsou však splněny předpoklady pro použití asymptotické varianty testu (příliš malý rozsah výběru), i když závěr je stejný jako při testování pomocí kritické hodnoty.

Grafické znázornění výsledků: Návrat do Porovnání dvou proměnných – Krabicový graf všech proměnných – Proměnné X, Y – OK – ponecháme implicitní nastavení krabicového diagramu – OK.

Z krabicových diagramů je vidět, že obě metody se poněkud liší v úrovni, ale neliší se ve variabilitě.

Provedení Wilcoxonova testu: Návrat do Porovnání dvou proměnných – Wilcoxonův párový test. Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky (ozn. T), hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 a p-hodnotu pro U_0. (STATISTICA tedy nezohledňuje omezení $n \geq 30$ pro použití U_0.)

	Wilcoxonův párový test (metody AB.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet platných	T	Z	Úroveň p
A & B	12	5,000000	2,073221	0,038153

V tomto případě je p-hodnota 0,038153, tedy nulová hypotéza se zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05. Nejsou však splněny předpoklady pro použití asymptotické varianty testu (příliš malý rozsah výběru), i když závěr je stejný jako při testování pomocí kritické hodnoty.

Úkol 2.: Jednovýběrový znaménkový test a jednovýběrový Wilcoxonův test
Vyráběné ocelové tyče mají kolísavou délku s předpokládanou hodnotou mediánu 10 m. Náhodný výběr 10 tyčí poskytl tyto výsledky:
9,83 10,10 9,72 9,91 10,04 9,95 9,82 9,73 9,81 9,90
Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že předpoklad o mediánu délky tyčí je oprávněný.
Návod: Testujeme H_0: $x_{0,50} = 10$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} \neq 10$. Vypočteme rozdíly mezi naměřenými délkami a konstantou 10:
$x_i - 10$: -0,17, 0,1, -0,28, -0,09, 0,04, -0,05, -0,18, -0,27, -0,19, -0,1
Jednovýběrový znaménkový test: Nenulových rozdílů je 10, testová statistika $S_Z^+ = 2$. Ve statistických tabulkách najdeme pro n = 10 a $\alpha = 0,05$ kritické hodnoty $k_1 = 1$, $k_2 = 9$. Protože kritický obor $W = \langle 0,1 \rangle \cup \langle 9,10 \rangle$ neobsahuje hodnotu 2, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.
Párový Wilcoxonův test: Absolutní hodnoty nenulových rozdílů uspořádáme vzestupně podle velikosti:

Usp. abs($x_i - y_i$):	**0,04**,	0,05,	0,09,	**0,1**,	0,1,	0,17,	0,18,	0,19,	0,27,	0,28
Pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Průměrné pořadí	**1**	2	3	**4,5**	4,5	6	7	8	9	10

$S_W^+ = 1 + 4,5 = 5,5$,
$S_W^- = 2 + 3 + 4,5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49,5$,
n = 10, $\alpha = 0,05$, tabelovaná kritická hodnota pro n = 10 a $\alpha = 0,05$ je 8, testová statistika = $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(5,5;49,5) = 5,5$. Protože $5,5 \leq 8$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05. Vidíme, že Wilcoxonův test dospěl k odlišnému závěru než znaménkový test.

Postup ve STATISTICE:
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými X a konst a 10 případy. Do proměnné X napíšeme měřené délky tyčí, do proměnné konst uložíme číslo 10.
Provedení jednovýběrového znaménkového testu: Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných konst – OK – Znaménkový test.

	Znaménkový test (delka_tyci.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
Dvojice proměnných	Počet různých	procent v < V	Z	Úroveň p
X & konst	10	80,00000	1,581139	0,113846

Vidíme, že nenulových hodnot n = 10. Z nich záporných je 80%, tj. 7. Hodnota testové statistiky $S_Z^+ = 10 - 8 = 2$. Asymptotická testová statistika U_0 (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 1,5811. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,113846, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že medián délky tyčí je 10. Nejsou však splněny předpoklady pro použití asymptotické varianty testu (příliš malý rozsah výběru), i když závěr je stejný jako při testování pomocí kritické hodnoty.

Provedení Wilcoxonova testu: Návrat do Porovnání dvou proměnných – Wilcoxonův párový test. Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky (ozn. T), hodnotu asymptotické testové statistiky U_0 a p-hodnotu pro U_0. (STATISTICA tedy nezohledňuje omezení $n \geq 30$ pro použití U_0.)

Dvojice proměnných	Wilcoxonův párový test (delka_tyci.sta) Označené testy jsou významné na hladině p <,05000			
	Počet platných	T	Z	Úroveň p
X & konst	10	5,500000	2,242448	0,024933

V tomto případě je p-hodnota 0,0249, tedy nulová hypotéza se zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05. Nejsou však splněny předpoklady pro použití asymptotické varianty testu (příliš malý rozsah výběru), i když závěr je stejný jako při testování pomocí kritické hodnoty.

Úkol 3.: Dvouvýběrový Wilcoxonův test

Majitel obchodu chtěl zjistit, zda velikost nákupů (v dolarech) placených kreditními kartami Master/EuroCard a Visa jsou přibližně stejné. Náhodně vybral 7 nákupů placených Master/EuroCard: 42 77 46 73 78 33 37 a 9 placených Visou: 39 10 119 68 76 126 53 79 102. Lze na hladině významnosti 0,05 tvrdit, že velikost nákupů placených těmito dvěma typy karet se shodují?

Návod: Na hladině významnosti 0,05 testujeme H_0: $x_{0,50} - y_{0,50} = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $x_{0,50} - y_{0,50} \neq 0$.

usp. hodnoty	10	**33**	**37**	39	**42**	**46**	53	68	**73**	76	**77**	**78**	79	102	119	126
pořadí x_i		2	3		5	6			9		11	12				
pořadí y_i	1			4			7	8		10			13	14	15	16

$T_1 = 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 12 = 48$, $T_2 = 1 + 4 + 7 + 8 + 10 + 13 + 14 + 15 + 16 = 88$

$U_1 = 7.9 + 7.8/2 - 48 = 43$, $U_2 = 7.9 + 9.10/2 - 88 = 20$

Kritická hodnota pro $\alpha = 0,05$, min(7,9) = 7, max(7,9) = 9 je 12. Protože min(43,20) = 20 > 12, nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že velikosti nákupů placených kreditními kartami Master/EuroCard a Visa se shodují.

Postup ve STATISTICE:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 17 případy. Do proměnné X napíšeme zjištěné hodnoty nákupů a do proměnné ID napíšeme 7x číslo 1 pro kartu Master/EuroCard a 9x číslo 2 pro kartu Visa.

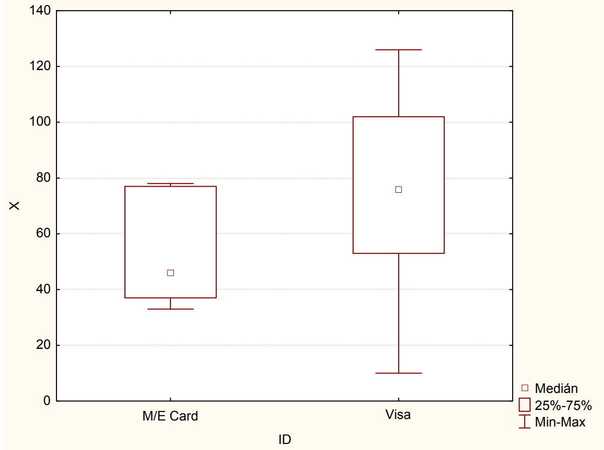
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupov.) proměnná ID – OK – M-W U test.

Proměnná	Mann-Whitneyův U test (kreditní karty.sta) Dle proměn. ID Označené testy jsou významné na hladině p <,05000									
	Sčt poř. M/E Card	Sčt poř. Visa	U	Z	Úroveň p	Z upravené	Úroveň p	N platn. M/E Card	N platn. Visa	2*1str. přesné p
X	48,00000	88,00000	20,00000	-1,21729	0,223495	-1,21729	0,223495	7	9	0,252273

Ve výstupní tabulce jsou součty pořadí T_1, T_2, hodnota testové statistiky min(U_1, U_2) ozn. U, hodnota asymptotické testové statistiky U_0 (ozn. Z), p-hodnota pro U_0 a přesná p-hodnota (ozn. 2*1str. přesné p – ta se používá pro rozsahy výběrů pod 30).

V našem případě přesná p-hodnota = 0,252273, tedy H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet je vhodné doplnit krabicovým diagramem typu Median/kvartily/rozpětí



.

Úkol 4.: **Kruskalův – Wallisův test a mediánový test**

Voda po holení jisté značky se prodává ve čtyřech různých lahvičkách stejného obsahu. Údaje o počtu prodaných lahviček za týden v různých obchodech:

1.typ: 50 35 43 30 62 52 43 57 33 70 64 58 53 65 39

2.typ: 31 37 59 67 44 49 54 62 34 42 40

3.typ: 27 19 32 20 18 23

4.typ: 35 39 37 38 28 33.

Posuďte na 5% hladině významnosti, zda typ lahvičky ovlivňuje úroveň prodeje.

Návod: Všech 38 hodnot uspořádáme vzestupně podle velikosti a stanovíme součet pořadí hodnot patřících do 1. až 4. výběru.

$T_1 = 379$, $T_2 = 257$, $T_3 = 24$, $T_4 = 81$

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{T_j^2}{n_j} - 3(n+1) = \frac{12}{38 \cdot 39} \left(\frac{379^2}{15} + \frac{257^2}{11} + \frac{24^2}{6} + \frac{81^2}{6} \right) - 3 \cdot 39 = 18{,}79,$$

$$W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}(r-1), \infty \right) = \left\langle \chi^2_{0,95}(3), \infty \right) = \left\langle 7{,}815, \infty \right)$$

Protože $Q \in W$, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Postup ve STATISTICE:

Vytvoříme nový datový soubor o dvou proměnných X a typ a 38 případech. Do proměnné X napište zjištěné údaje o prodeji, do proměnné typ 15 x jedničku, 11 x dvojku, 6 x trojku a 6 x čtyřku.

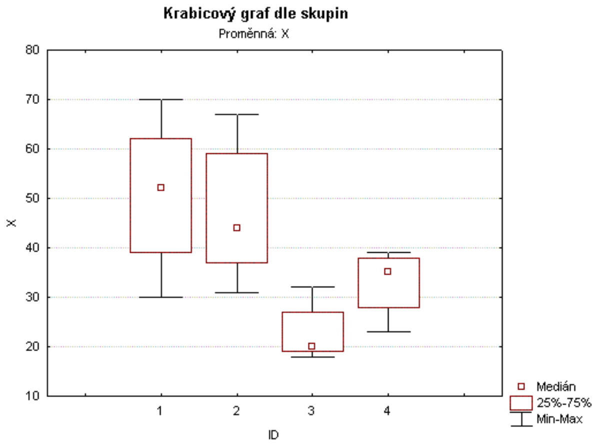
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání více nezávislých vzorků - OK – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupovací) proměnná typ – OK – Shrnutí: Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test. Ve dvou výstupních tabulkách se objeví výsledky K-W testu a mediánového testu.

	Kruskal-Wallisova ANOVA založ. na poř.; X (voda po holeni.sta Nezávislá (grupovací) proměnná :TYP Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 38) =18,80199 p =,0003		
Závislá: X	Kód	Počet platných	Součet pořadí
1	1	15	379,0000
2	2	11	257,0000
3	3	6	24,0000
4	4	6	81,0000

Závislá: X	Mediánový test, celk. medián = 39,5000; X (voda po holeni.sta Nezávislá (grupovací) proměnná :TYP Chi-Kvadr. = 17,53939 sv = 3 p = ,0005				
	1	2	3	4	Celkem
<= Medián: pozorov.	4,00000	3,00000	6,00000	6,00000	19,00000
očekáv.	7,50000	5,50000	3,00000	3,00000	
poz.-oč.	-3,50000	-2,50000	3,00000	3,00000	
> Medián: pozorov.	11,00000	8,00000	0,00000	0,00000	19,00000
očekáv.	7,50000	5,50000	3,00000	3,00000	
poz.-oč.	3,50000	2,50000	-3,00000	-3,00000	
Celkem: oček.	15,00000	11,00000	6,00000	6,00000	38,00000

Oba testy zamítají hypotézu o shodě mediánů v daných čtyřech skupinách, ale K-W test má poněkud nižší p-hodnotu (0,0003), zatímco p-hodnota pro mediánový test je 0,0005).

Grafické znázornění výsledků: návrat do Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test – Krabicový graf – Proměnná X – OK – Typ grafu: Medián/kvartily/Rozpětí – OK.



Je vidět, že úroveň prodeje pro 1. typ je nevyšší, zatímco pro 3. typ nejnižší.

Nyní provedeme mnohonásobné porovnávání, abychom zjistili, které dvojice typů lahviček se liší na hladině významnosti 0,05: návrat do Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test, Vícenás. porovnání průměrného pořadí pro vš. sk.

Závislá: X	Vícenásobné porovnání p hodnot (oboustr.);X (voda po holeni.sta Nezávislá (grupovací) proměnná :TYP Kruskal-Wallisův test: H (3, N= 38) =18,80199 p =,0003			
	1 R:25,267	2 R:23,364	3 R:4,0000	4 R:13,500
1		1,000000	0,000447	0,170297
2	1,000000		0,003579	0,481908
3	0,000447	0,003579		0,832208
4	0,170297	0,481908	0,832208	

Vidíme, že se liší typy (1, 3) a (2, 3).

Úkoly k samostatnému řešení

1. Ve skupině 12 studentů se sledovala srdeční frekvence při změně polohy z lehu do stoje. Získaly se tyto rozdíly počtu tepů srdce za 1 minutu: -2 4 8 25 -5 16 3 1 12 17 20 9. Za předpokladu, že tyto rozdíly mají symetrické rozložení, testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že medián rozdílů obou tepových frekvencí je 15 proti oboustranné alternativě.
(Výsledek: znaménkový a Wilcoxonův test nulovou hypotézu nezamítají na hladině významnosti 0,05, avšak asymptotická varianta Wilcoxonova testu ano.)

2. Z produkce tří podniků vyrábějících televizory bylo vylosováno 10, 8 a 12 kusů. Byly získány následující výsledky zjišťování citlivosti těchto televizorů v mikrovoltech:
1.podnik: 420 560 600 490 550 570 340 480 510 460
2.podnik: 400 420 580 470 470 500 520 530
3.podnik: 450 700 630 590 420 590 610 540 740 690 540 670
Ověřte na hladině významnosti 0,05 hypotézu o shodě úrovně citlivosti televizorů v jednotlivých podnicích.
(Výsledek: na hladině významnosti 0,05 se liší televizory vyráběné ve 2. a 3. podniku.)