Téma 3: Využití systému STATISTICA při řešení příkladů na opakované pokusy

1. Opakované nezávislé pokusy

Opakované nezávisle provádíme týž náhodný pokus a sledujeme nastoupení jevu, kterému říkáme úspěch. V každém z těchto pokusů nastává úspěch s pravděpodobností ϑ, $0 < \vartheta < 1$.

a) Binomické rozložení pravděpodobností

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane právě x-krát ($0 \le x \le n$):

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}.$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce Binom(x; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane nejvýše x_1-krát ($0 \le x_1 \le n$):

$$\sum_{x=0}^{x_1} P_n(x).$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce IBinom(x_1; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane aspoň x_0-krát ($0 \le x_0 \le n$):

$$\sum_{x=x_0}^{n} P_n(x).$$

Výpočet lze provést takto: 1 - IBinom(x_0 - 1; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane aspoň x_0-krát a nejvýše x_1-krát:

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} P_n(x).$$

Výpočet lze provést takto: IBinom(x_1; ϑ; n) - IBinom(x_0 - 1; ϑ; n)

Příklad na binomické rozložení pravděpodobností: Pojišťovna zjistila, že 12% pojistných událostí je způsobeno vloupáním. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi bude způsobeno vloupáním

a) nejvýše 6,
b) aspoň 6,
c) právě 6,
d) od dvou do pěti?

Řešení:

Počet pokusů: n = 30, pravděpodobnost úspěchu: $\vartheta = 0{,}12$

ad a)

$$\sum_{x=0}^{x_1} P_n(x) = \sum_{x=0}^{6} P_{30}(x) = \sum_{x=0}^{6} \binom{30}{x} 0{,}12^x 0{,}88^{30-x} = \mathrm{IBinom}(6;0{,}12;30) = 0{,}9393$$

S pravděpodobností 93,93% bude mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi způsobeno vloupáním nejvýše 6 událostí.

ad b)

$$\sum_{x=x_0}^{n} P_n(x) = \sum_{x=6}^{30} P_{30}(x) = 1 - \sum_{x=0}^{5} P_{30}(x) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{30}{x} 0{,}12^x 0{,}88^{30-x} = 1 - \mathrm{IBinom}(5;0{,}12;30) = 0{,}1431$$

S pravděpodobností 14,31% bude mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi způsobeno vloupáním aspoň 6 událostí.

ad c)

$$P_n(x) = P_{30}(6) = \binom{30}{6} 0{,}12^6 0{,}88^{24} = \mathrm{Binom}(6;0{,}12;30) = 0{,}0825$$

S pravděpodobností 8,25% bude mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi způsobeno vloupáním právě 6 událostí.

ad d)

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} P_n(x) = \sum_{x=2}^{5} P_{30}(x) = \sum_{x=0}^{5} P_{30}(x) - \sum_{x=0}^{1} P_{30}(x) = \sum_{x=0}^{5} \binom{30}{x} 0{,}12^x 0{,}88^{30-x} - \sum_{x=0}^{1} \binom{30}{x} 0{,}12^x 0{,}88^{30-x} =$$

$$= \mathrm{IBinom}(5;0{,}12;30) - \mathrm{IBinom}(1;0{,}12;30) = 0{,}7469$$

S pravděpodobností 74,69% bude mezi 30 náhodně vybranými pojistnými událostmi způsobeno vloupáním od 2 do 5 událostí.

Návod: Otevřeme nový datový soubor se čtyřmi proměnnými a o jednom případu.
Do Dlouhého jména 1. proměnné napíšeme =IBinom(6;0,12;30).
Do Dlouhého jména 2. proměnné napíšeme =1-IBinom(5;0,12;30).
Do Dlouhého jména 3. proměnné napíšeme =Binom(6;0,12;30).
Do Dlouhého jména 3. proměnné napíšeme =IBinom(5;0,12;30)-IBinom(1;0,12;30).

Upozornění: Podobným způsobem postupujeme při řešení dalších příkladů

Příklady k samostatnému řešení

Příklad 1.: V rodině je 10 dětí. Za předpokladu, že chlapci i dívky se rodí s pravděpodobností 0,5 a pohlaví se formuje nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že v této rodině je
a) právě 5 chlapců
b) nejméně 3 a nejvýše 8 chlapců.

$n = 10$, úspěch = narození chlapce, pravděpodobnost úspěchu $\vartheta = 0{,}5$

Výsledek: ad a) 0,246, ad b) 0,935

Příklad 2.: Na dvoukolejném železničním mostě se potkají během 24 hodin nejvýše dva vlaky, a to s pravděpodobností 0,2. Za předpokladu, že denní provozy jsou nezávislé, určete pravděpodobnost, že během týdne se dva vlaky na mostě potkají
a) právě třikrát
b) nejvýše třikrát
c) alespoň třikrát.

$n = 7$, úspěch = potkání dvou vlaků během 24 hodin, pravděpodobnost úspěchu $\vartheta = 0{,}2$

Výsledek: ad a) 0,115, ad b) 0,967, ad c) 0,148

Příklad 3.: Je pravděpodobnější vyhrát se stejně silným soupeřem tři partie ze čtyř nebo pět partií z osmi, když nerozhodný výsledek je vyloučen a výsledky jsou nezávislé?

Úspěch je výhra partie se stejně silným soupeřem, když remíza je vyloučena, pravděpodobnost úspěchu $\vartheta = 0{,}5$.

a) $n = 4, x = 3$
b) $n = 8, x = 5$

Výsledek: ad a) 0,25, ad b) 0,219

Příklad 4.: Dvacetkrát nezávisle na sobě házíme třemi mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň v jednom hodě padnou tři líce?

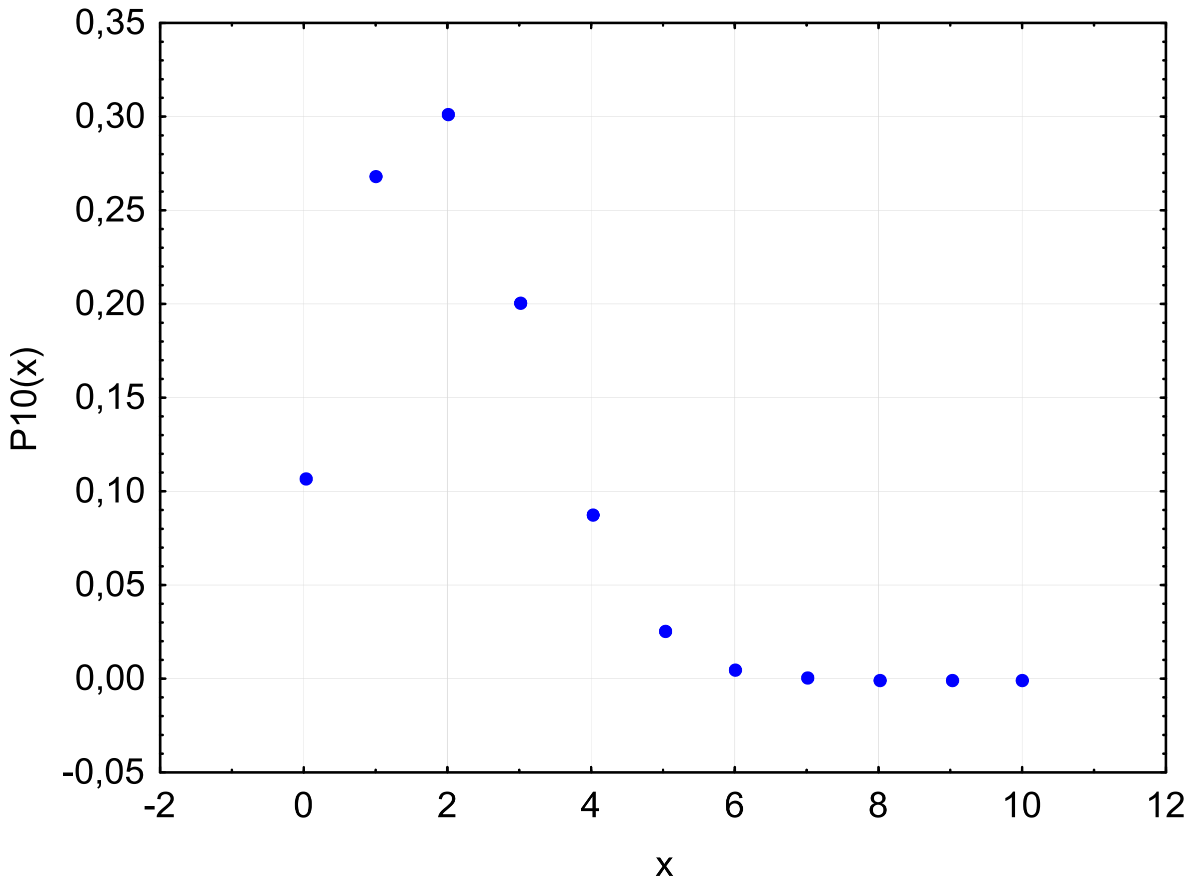
$n = 20$, úspěch je padnutí tří líců při hodu třemi mincemi, $\vartheta = 1/8 = 0{,}125$,

Výsledek: 0,931

Příklad 5.: Pravděpodobnost, že náhodně vybrané jablko je červivé, je 0,2.
a) Jaká je pravděpodobnost, že z 10 náhodně vybraných jablek bude aspoň jedno červivé?
b) Graficky znázorněte závislost pravděpodobností $P_{10}(x)$ na $x = 0, 1, \ldots, 10$.

Výsledek:
Ad a) 0,893

Ad b)



0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
-0,05
P10(x)
-2
0
2
4
6
8
10
12
x

b) Geometrické rozložení pravděpodobností
Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet x neúspěchů:
$P(x) = (1-\vartheta)^x \vartheta$.
K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce Geom(x; ϑ)

Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet nejvýše x_1 neúspěchů:
$$\sum_{x=0}^{x_1} P(x)$$
K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce IGeom(x_1; ϑ)

Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet aspoň x_0 neúspěchů:
$$1-\sum_{x=0}^{x_0-1} P(x)$$
Výpočet lze provést takto: 1 - IGeom(x_0-1; ϑ)

Příklad na geometrické rozložení pravděpodobností: Jaká je pravděpodobnost, že při hře „Člověče, nezlob se!" nasadíme figurku nejpozději při třetím hodu?

Řešení:
Počet neúspěchů: x = 0, 1, 2, pravděpodobnost úspěchu: $\vartheta = \frac{1}{6}$
$$\sum_{x=0}^{2} P(x) = \sum_{x=0}^{2} (1-\vartheta)^x \vartheta = \sum_{x=0}^{2} \left(\frac{5}{6}\right)^x \frac{1}{6} = \mathrm{IGeom}(2;1/6) = 0{,}4213$$
Pravděpodobnost, že figurku nasadíme nejpozději při třetím hodu, je 42,13%.

Příklad k samostatnému řešení: Při digitálním přenosu bitů dochází k chybě s pravděpodobností 0,1. Předpokládáme, že přenosy jednotlivých bitů na sobě nezávisí. Určete pravděpodobnost, že bude správně přeneseno 5 bitů než dojde k chybě.

V naší terminologii je neúspěch správně přenesený bit. Počet neúspěchů: x = 5, pravděpodobnost úspěchu: $\vartheta = 0{,}1$
Výsledek: Pravděpodobnost, že bude správně přeneseno 5 bitů než dojde k chybě, je 6,6%.

2. Opakované závislé pokusy

Hypergeometrické rozložení pravděpodobností
Máme N objektů, mezi nimi je M objektů označeno $0 \le M \le N$. Náhodně bez vracení vybereme n objektů ($0 \le n \le N$).
Pravděpodobnost, že ve výběru je právě x označených objektů ($\max\{0, M-N+n\} \le x \le \min\{n, M\}$):

$$P_{N,M,n}(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Výpočet lze provést takto: Combin(M;x)* Combin(N-M;n-x)/Combin(N;n)

Pravděpodobnost, že ve výběru je nejvýše x_1 označených objektů:

$$\sum_{x=\max\{0,M-N+n\}}^{x_1} P_{N,M,n}(x).$$

Pravděpodobnost, že ve výběru je aspoň x_0 označených objektů:

$$\sum_{x=x_0}^{\min\{n,M\}} P_{N,M,n}(x).$$

Příklad na hypergeometrické rozložení pravděpodobností: Koupili jsme 10 cibulek červených tulipánů a 5 cibulek žlutých tulipánů. Zasadili jsme 8 náhodně vybraných cibulek.
a) Jaká je pravděpodobnost, že žádná nebude cibulka žlutých tulipánů?
b) Jaká je pravděpodobnost, že jsme zasadili všech 5 cibulek žlutých tulipánů?
c) Jaká je pravděpodobnost, že aspoň dvě budou cibulky žlutých tulipánů?
d) Graficky znázorněte závislost pravděpodobností $P_{15,5,8}(x)$ na x = 0, 1, …, 5.

Řešení:
Počet objektů: N = 15, počet označených objektů: M = 5, počet vybraných objektů: n = 8
ad a)

$$P_{15,5,8}(0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{10}{8}}{\binom{15}{8}} = \frac{\binom{10}{8}}{\binom{15}{8}} = \mathrm{Combin}(10;8)/\mathrm{Combin}(15;8) = 0{,}007$$

Mezi 8 náhodně vybranými cibulkami se s pravděpodobností 0,7% nevyskytne žádná cibulka žlutých tulipánů.

ad b)

$$P_{15,5,8}(5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{10}{3}}{\binom{15}{8}} = \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{8}} = \mathrm{Combin}(10;3)/\mathrm{Combin}(15;8) = 0{,}0186$$

S pravděpodobností 1,86% bude mezi 8 náhodně vybranými cibulkami právě 5 cibulek žlutých tulipánů.

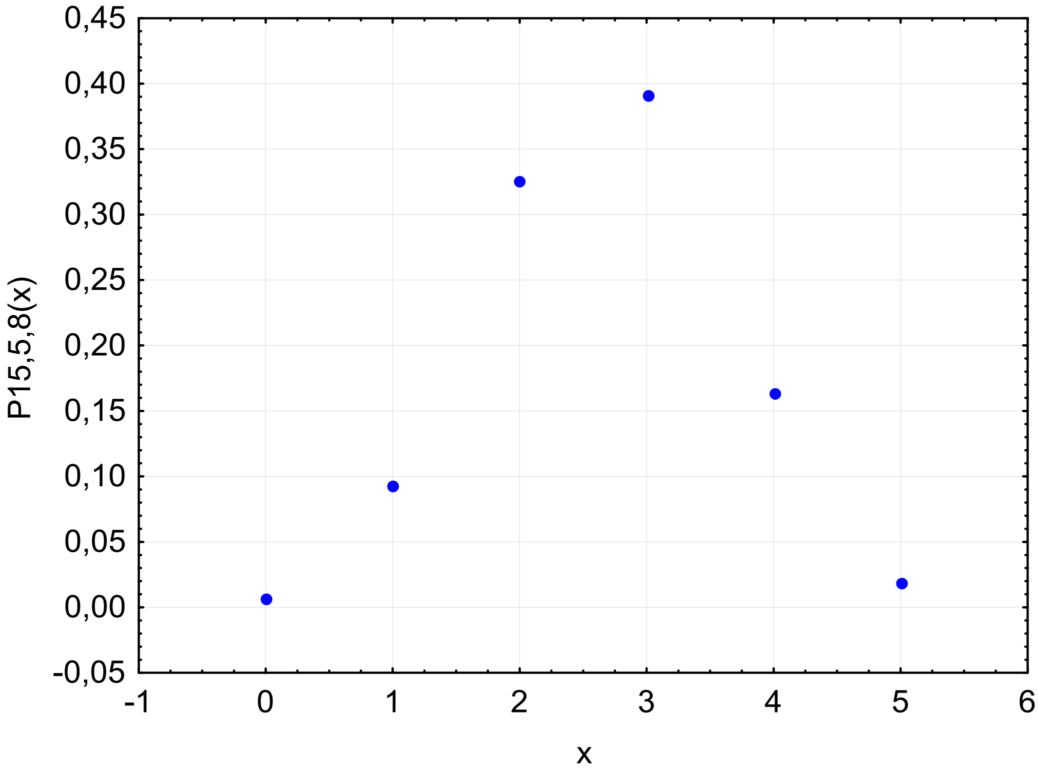
ad c)

$$1-P_{15,5,8}(0)-P_{15,5,8}(1)=1-\frac{\binom{5}{0}\binom{10}{8}}{\binom{15}{8}}-\frac{\binom{5}{1}\binom{10}{7}}{\binom{15}{8}}=1-\frac{\binom{10}{8}}{\binom{15}{8}}-\frac{5\cdot\binom{10}{7}}{\binom{15}{8}}=$$

$$=1-\mathrm{Combin}(10;8)/\mathrm{Combin}(15;8)-5*\mathrm{Combin}(10;7)/\mathrm{Combin}(15;8)=0{,}8998$$

S pravděpodobností 89,98% budou mezi 8 náhodně vybranými cibulkami aspoň dvě cibulky žlutých tulipánů.

ad d)



Příklady k samostatnému řešení:

Příklad 1.: Dítě dostalo sáček, v němž bylo 5 červených a 5 žlutých bonbónů. Dítě náhodně vybralo ze sáčku 6 bonbónů. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bonbóny budou právě 2 červené?

Výsledek:
Pravděpodobnost, že mezi 6 vybranými bonbóny budou právě 2 červené, je 23,8%.

Příklad 2.: Mezi 200 vajíčky určenými pro prodej v jisté maloobchodní prodejně je 50 vajíček prasklých. Náhodně bez vracení vybereme 20 vajíček. Jaká je pravděpodobnost, že nejvýše 2 budou prasklá?

Výsledek:
Pravděpodobnost, že mezi 20 náhodně vybranými vajíčky budou nejvýše 2 prasklá, je 8 %.