Téma 8: Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru z normálního rozložení a dvourozměrného rozložení a jednom náhodném výběru z alternativního rozložení

Upozornění: Pokud to povaha úlohy vyžaduje, proveďte test normality dat:
V menu vybereme Statistika – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK, Proměnné X – OK. Na záložce zvolíme Normalita a zaškrtneme Lilieforsův test a Shapiro – Wilksův W test – Testy normality.

Úkol 1.: **Vlastnosti výběrového průměru z normálního rozložení**
Předpokládejme, že velký ročník na vysoké škole má výsledky ze statistiky normálně rozloženy kolem střední hodnoty 72 bodů se směrodatnou odchylkou 9 bodů. Najděte pravděpodobnost, že průměr výsledků náhodného výběru 10 studentů bude větší než 80 bodů.

Návod:
$X_1, ..., X_{10}$ je náhodný výběr z N(72, 81). Počítáme P(M > 80), přičemž výběrový průměr M má normální rozložení se střední hodnotou E(M) = μ = 72 a rozptylem D(M) $= \frac{\sigma^2}{n} = \frac{81}{10} =$ 8,1. Tedy P(M > 80) = 1 - P(M $\leq$ 80) = 1 – Φ(80), kde Φ(80) je hodnota distribuční funkce rozložení N(72; 8,1) v bodě 80.
Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné a o jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme =1 – INormal(80;72;sqrt(8,1)). Zjistíme, že 1 - Φ(80) = 0,00247005.
Funkce INormal(x;μ;σ) počítá hodnotu distribuční funkce rozložení N(μ,σ^2) v bodě x.

	1 Prom1
1	0,00247

Úkol k samostatnému řešení: Lze předpokládat, že hmotnost pomerančů dodávaných do obchodní sítě se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 170 g a směrodatnou odchylkou 12 g. Jaká je pravděpodobnost, že celková hmotnost devíti náhodně vybraných pomerančů balených do síťky překročí 1,5 kg?
Výsledek: Hledaná pravděpodobnost je 0,797.

Úkol 3.: **Intervaly spolehlivosti pro parametry** μ, σ^2 **normálního rozložení**
Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno šest selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenávány průměrné denní přírůstky hmotnosti v Dg. Z dřívějších pokusů je známo, že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se měnívají. Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58.

a) Najděte 95% empirický levostranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ při neznámé směrodatné odchylce σ.
b) Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro směrodatnou odchylku σ.

Návod:
Vytvoříme datový soubor o 1 proměnné a 6 případech. Tuto proměnnou nazveme hmotnost a zapíšeme do ní zjištěné údaje.
Statistika – Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnná hmotnost – OK – na záložce Detailní výsledky zaškrtneme Meze spolehl. Prům., 95 % změníme na 90 %, dále zaškrtneme Meze sp. směr. odch. a všechny ostatní volby odškrtneme – Výpočet.

Proměnná	Popisné statistiky (Tabulka4)			
	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000	Spolehlivost Sm.Odch. -95,000%	Spolehlivost Sm.Odch. +95,000%
hmotnost	54,05683	59,94317	2,233234	8,774739

ad a) Protože mez 95% levostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu je stejná jako dolní mez 90% oboustranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu, vidíme, že $\mu > 54{,}06$ Dg s pravděpodobností 0,95.

ad b) Dostáváme výsledek: $2{,}23 \text{ g} < \sigma < 8{,}77$ g s pravděpodobností 0,95.

Úkol k samostatnému řešení: Uměle připravený vzorek minerálu byl 12 krát proměřen na obsah křemene. Výsledky měření (v procentech) byly: 8,7 10,2 10,07 9,75 9,65 10,37 10,14 10,5 9,48 11,22 9,49 9,86. Za předpokladu, že výsledky měření obsahu křemene se řídí rozložením $N(\mu,\sigma^2)$, vypočtěte 95% empirický interval spolehlivosti
a) pro střední hodnotu μ
b) pro směrodatnou odchylku σ.
Výsledek: Lilieforsův test ani S-W test nezamítají na hladině významnosti 0,05 normalitu dat.
ad a) $9{,}55\ \% < \mu < 10{,}35\ \%$ s pravděpodobností 0,95.
ad b) $0{,}44\ \% < \sigma < 1{,}07\ \%$ s pravděpodobností 0,95.

Úkol 4.: Testování hypotézy o střední hodnotě μ
Systematická chyba měřicího přístroje se eliminuje nastavením přístroje a měřením etalonu, jehož správná hodnota je $\mu = 10{,}00$. Nezávislými měřeními za stejných podmínek byly získány hodnoty: 10,24 10,12 9,91 10,19 9,78 10,14 9,86 10,17 10,05, které považujeme za realizace náhodného výběru rozsahu 9 z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$. Je možné při riziku 0,05 vysvětlit odchylky od hodnoty 10,00 působením náhodných vlivů?

Návod:
Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\mu = 10$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 10$. Jde o úlohu na jednovýběrový t-test. Ten je ve STATISTICE implementován.
Načteme datový soubor mereni_etalonu.sta.
1. způsob: V Základních statistikách a tabulkách vybereme t-test, samostatný vzorek. Do Referenční hodnoty zapíšeme 10. Ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu. Pokud p-hodnota bude menší nebo rovna 0,05, zamítneme hypotézu H_0: $\mu = 10$ ve prospěch oboustranné alternativní hypotézy H_1: $\mu \neq 10$ na hladině významnosti 0,05.
V opačném případě H_0 nezamítáme. V našem případě je

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě)							
	Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
Prom1	10,05111	0,162669	9	0,054223	10,00000	0,942611	8	0,373470

Protože p-hodnota 0,373470 > 0,05 nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05. S rizikem omylu nejvýše 5% lze tedy odchylky od hodnoty 10 vysvětlit působením náhodných vlivů.
Všimněme si ještě hodnoty testového kriteria: $t_0 = 0{,}942611$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(8)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(8), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2{,}306\right\rangle \cup \left\langle 2{,}306, \infty\right)$$

Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 .

2. způsob: V Základních statistikách a tabulkách vypočteme průměr a směrodatnou odchylku. Pak použijeme Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – zaškrtneme Výběrový průměr vs. Střední hodnota – do políčka Pr1 napíšeme 10,05111, do políčka SmOd1 napíšeme 0,162669, do políčka N1 napíšeme 9, do políčka Pr2 napíšeme 10 - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,3735, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Úkol k samostatnému řešení: Při kontrole balicího automatu, který má plnit cukrem balíčky o hmotnosti 1000 g, byly při přesném převážení 5 balíčků zjištěny tyto odchylky (v gramech) od požadované hodnoty: 3, -2, 2, 0, 1. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že automat nemá systematickou odchylku od požadované hodnoty.
Výsledek: Protože p-hodnota je 0,405023, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Úkol 5.: Testování hypotézy o směrodatné odchylce σ
U 25 náhodně vybraných dvoulitrových lahví s nealkoholickým nápojem byl zjištěn přesný objem nápoje. Výběrový průměr činil m = 1,99 l a výběrová směrodatná odchylka s = 0,1 l. Předpokládejme, že objem nápoje v láhvi je náhodná veličina s normálním rozložením.
Na hladině významnosti 0,05 ověřte tvrzení výrobce, že směrodatná odchylka je 0,08 l.

Návod:
Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\sigma = 0{,}08$ proti oboustranné alternativě H_1: $\sigma \neq 0{,}08$ neboli H_0: $\sigma^2 = 0{,}0064$ proti oboustranné alternativě H_1: $\sigma^2 \neq 0{,}0064$. Jde o úlohu na test o rozptylu. Vypočteme realizaci testového kritéria $t_0 = \frac{(n-1)s^2}{c} = \frac{24 \cdot 0{,}1^2}{0{,}08^2} = 37{,}5$.

Jelikož hodnota testového kritéria 37,5 neleží v kritickém oboru
$W = \left(0; \chi^2_{0,025}(24)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{0,975}(24); \infty\right) = \left(0; 12{,}4\right\rangle \cup \left\langle 39{,}4; \infty\right)$, nejsme oprávněni na hladině významnosti 0,05 zamítnout tvrzení výrobce.)
V systému STATISTICA otevřeme datový soubor o třech proměnných a jednom případu. Do Dlouhého jména první proměnné napíšeme vzorec pro výpočet testového kritéria:
=24*0,1^2/0,08^2
Další dvě proměnné nám poslouží k výpočtu kvantilů Pearsonova χ^2 – rozložení.
Do Dlouhého jména druhé proměnné napíšeme
=VChi2(0,025;24)
a do Dlouhého jména třetí proměnné napíšeme
=VChi2(0,975;24)

Úkol 6.: Interval spolehlivosti pro rozdíl parametrů μ_1 - μ_2 dvourozměrného rozložení
Bylo vylosováno 6 vrhů selat a z nich vždy dva sourozenci. Jeden z nich vždy dostal náhodně dietu č. 1 a druhý dietu č. 2. Přírůstky v Dg jsou následující: (62,52), (54,56), (55,49), (60,50), (53,51), (58,50). Za předpokladu, že uvedené dvojice tvoří náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vektorem středních hodnot (μ_1, μ_2) a jejich rozdíly se řídí normálním rozložením, sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot.

Návod:

Vytvoříme datový soubor o třech proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky, do proměnné v3 uložíme rozdíly v1 - v2.
Ve STATISTICE je implementován výpočet oboustranného intervalu spolehlivosti pro μ, když σ^2 neznáme. Pomocí Popisných statistik zjistíme meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu proměnné v3 tak, že zaškrtneme Meze spolehl. prům.

	Popisné statistiky	
Proměnná	Int. spolehl. -95,000%	Int. spolehl. +95,000%
Prom3	0,626461	10,70687

Dostaneme výsledek: 0,63 Dg < μ < 10,71 Dg s pravděpodobností 0,95.

Úkol 7.: Testování hypotézy o rozdílu parametrů $\mu_1 - \mu_2$ dvourozměrného rozložení
Bylo vybráno šest nových vozů téže značky a po určité době bylo zjištěno, o kolik mm se sjely jejich levé a pravé přední pneumatiky. Výsledky: (1,8; 1,5), (1,0; 1,1), (2,2; 2,0), (0,9; 1,1), (1,5; 1,4), (1,6; 1,4). Za předpokladu, že uvedené dvojice tvoří náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s vektorem středních hodnot (μ_1, μ_2) a jejich rozdíly se řídí normálním rozložením, testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě pneumatiky se sjíždějí stejně rychle.

Návod:
Označme $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Na hladině významnosti 0,05 testujeme hypotézu H_0: $\mu = 0$ proti oboustranné alternativě H_1: $\mu \neq 0$. Jde o úlohu na párový t-test.Ten je ve STATISTICE implementován.Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných a šesti případech. Do proměnných v1 a v2 zapíšeme naměřené přírůstky. V Základních statistikách vybereme t-test, závislé vzorky. Zadáme názvy obou proměnných a ve výstupu se podíváme na hodnotu testového kritéria a na p-hodnotu.

	t-test pro závislé vzorky (Tabulka1) Označ. rozdíly jsou významné na hlad. p < ,05000							
Proměnná	Průměr	Sm.odch.	N	Rozdíl	Sm.odch. rozdílu	t	sv	p
X	1,500000	0,489898						
Y	1,416667	0,331160	6	0,083333	0,194079	1,051758	5	0,341062

Protože p-hodnota 0,341062 > 0,05, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že obě přední pneumatiky se sjíždějí stejně rychle.
Všimněme si ještě hodnoty testového kriteria: $t_0 = 1{,}051758$. Kritický obor

$$W = \left(-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-1)\right\rangle \cup \left\langle t_{1-\alpha/2}(n-1), \infty\right) = \left(-\infty, -t_{0,975}(5)\right\rangle \cup \left\langle t_{0,975}(5), \infty\right) =$$
$$= \left(-\infty, -2{,}5706\right\rangle \cup \left\langle 2{,}5706, \infty\right)$$

Protože $t_0 \notin W$, nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0.

Úkol k samostatnému řešení: Zkouška ze statistiky se skládá z písemné části, v níž je možno získat maximálně 20 bodů a z ústní části, kde je možno získat maximálně 10 bodů. Výsledky 20 náhodně vybraných studentů (X – počet bodů z písemné části, Y – počet bodů z ústní části):

č. st.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	6	11	8	18	6	11	6	3	14	7
Y	4	7	6	8	3	5	6	4	9	8

č. st.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	17	12	8	4	15	20	13	5	10	0
Y	10	9	6	5	7	10	8	6	7	3

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozdíl středních hodnot počtu bodů v písemné a ústní části se liší o 3 body proti oboustranné alternativě. Data jsou uložena v souboru body ze zkousky.sta
Výsledek: Lilieforsův test ani S-W test nezamítají na hladině významnosti 0,05 hypotézu o normalitě rozdílů.
Testujeme H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 3$ proti H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 3$. Hodnota testové statistiky = 0,178431, p-hodnota = 0,806273, na hladině významnosti 0,05 tedy nezamítáme nulovou hypotézu.

Úkol 8.: Asymptotický interval spolehlivosti pro parametr ϑ alternativního rozložení
Může politická strana, pro niž se v předvolebním průzkumu vyslovilo 60 z 1000 dotázaných osob, očekávat se spolehlivostí 0,95, že by v této době ve volbách překročila 5% hranici pro vstup do parlamentu?

Návod: Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tá osoba se vysloví pro danou politickou stranu a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 1000. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení A(ϑ). V tomto případě n = 1000, m = 60/1000 = 0,06, α = 0,05, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1{,}645$.
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak 1000.0,06.0,94 = 56,4 > 9.
95% levostranný interval spolehlivosti pro ϑ je
$\left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha}\ ;\ \infty\right) = \left(0{,}06 - \sqrt{\frac{0{,}06(1-0{,}06)}{1000}}u_{0,95}\ ;\ \infty\right)$. V našem případě
$$d = 0{,}06 - \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{1000}} \cdot 1{,}645 = 0{,}0476$$
S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $\vartheta > 0{,}048$. Protože tento interval zahrnuje i hodnoty nižší než 0,05, nelze vyloučit, že strana získá méně než 5% hlasů.

Postup ve STATISTICE:
Asymptotický způsob: Vytvoříme datový soubor o jedné proměnné (nazveme ji d) a o jednom případu. Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme
=0,06-sqrt(0,06*0,94/1000)*VNormal(0,95;0;1)
Vyjde 0,047647.
Přibližný způsob: Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 1000 případech uložíme 60 jedniček (indikují volbu dané politické strany) a 940 nul (indikují volbu jiné politické strany).

Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. – Interval 90,00 – Výpočet.
Dostaneme tabulku:

	Popisné statistiky (Tabulka1)			
Proměnná	N platných	Průměr	Int. spolehl. -90,000%	Int. spolehl. 90,000
X	1000	0,060000	0,047630	0,072370

Protože dolní mez oboustranného 90% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu je shodná s dolní mezí 95% levostranného intervalu spolehlivosti, můžeme konstatovat, že voliči budou volit danou politickou stranu s pravděpodobností aspoň 4,76%. Na základě uvedených dat strana tedy nemá zaručeno, že překročí 5% hranici pro vstup do parlamentu.

Úkol k samostatnému řešení: Přírůstky cen akcií na burze (v %) u 10 náhodně vybraných společností dosáhly těchto hodnot: 10, 16, 5, 10, 12, 8, 4, 6, 5, 4. Sestrojte 95% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že přírůstek ceny akcie překročí 8,5%.
Výsledek: $0{,}096 < \vartheta < 0{,}704$ s pravděpodobností aspoň 0,95.
Znamená to, že pravděpodobnost, že přírůstek ceny akcie překročí 8,5%, je aspoň 9,6% a nanejvýš 70,4% (při spolehlivosti 95%.)

Úkol 9.: Testování hypotézy o parametru ϑ alternativního rozložení
Určitá cestovní kancelář organizuje zahraniční zájezdy podle individuálních přání zákazníků. Z několika minulých let ví, že 30% všech takto organizovaných zájezdů má za cíl zemi X. Po zhoršení politických podmínek v této zemi se cestovní kancelář obává, že se zájem o tuto zemi mezi zákazníky sníží. Ze 150 náhodně vybraných zákazníků v tomto roce má 38 za cíl právě zemi X. Potvrzují nejnovější data pokles zájmu o tuto zemi? Volte hladinu významnosti 0,05.
Návod: Máme náhodný výběr $X_1, ..., X_{150}$ z rozložení A(0,3). Testujeme H_0: $\vartheta = 0{,}3$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta < 0{,}3$. V tomto případě je testovým kritériem statistika
$T_0 = \dfrac{M - c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).
Musíme ověřit splnění podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $150 . 0{,}3 . 0{,}7 = 31{,}5 > 9$. Vypočteme realizaci testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}} = \dfrac{\frac{38}{150} - 0{,}3}{\sqrt{\dfrac{0{,}3(1-0{,}3)}{150}}} = -1{,}24722$. Kritický obor:
$W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle = \left(-\infty, -1{,}645\right\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Postup ve STATISTICE:
Asymptotický způsob: Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných (nazveme je t0 a kvantil) a jednom případu. Vypočteme realizaci testového kritéria tak, že do Dlouhého jména proměnné t0 napíšeme
=(38/150-0,3)/sqrt(0,3*0,7/150)
Do Dlouhého jména proměnné kvantil napíšeme
=VNormal(0,95;0;1)
Tím získáme kvantil $u_{0{,}95}$.

	1 t0	2 kvantil
1	-1,24721913	1,644854

Jelikož realizace testového kritéria t_0 = -1,24721913 nepatří do kritického oboru $W = \left(-\infty, -1{,}644854\right\rangle$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Přibližný způsob: Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 150 případech uložíme 38 jedniček (indikují zájem o danou zemi) a 112 nul (indikují nezájem o danou zemi).
Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, samost. vzorek – OK – Proměnné X – OK, Test všech průměrů vůči 0,3 – Výpočet.

Proměnná	Test průměrů vůči referenční konstantě (hodnotě) (Tabulka4) Průměr	Sm.odch.	N	Sm.chyba	Referenční konstanta	t	SV	p
X	0,253333	0,436377	150	0,035630	0,300000	-1,30976	149	0,192294

Hodnota testové statistiky je při tomto přibližném způsobu -1,30976. Odpovídající p-hodnota je 0,1923, ovšem to je p-hodnota pro oboustranný test. Tuto p-hodnotu tedy musíme dělit dvěma a dostaneme 0,0961. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu, že zájem o danou zemi se nezměnil.