SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, Kamenice 3, 4. patro, dv.č.424

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

VIII.
SPOJITÉ SYSTÉMY

FORMY ABSTRAKTNÍHO POPISU SPOJITÝCH SYSTÉMŮ

VNĚJŠÍ A VNITŘNÍ POPIS

© Institut biostatistiky a analýz

PROČ ABSTRAKTNÍ SYSTÉMY?

- ☑ modely zkoumaných reálných (biologických) objektů (procesů) -;
- ☑ popis algoritmů pro zpracování dat (technické, resp. matematické systémy);

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ☑ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ☑ charakteru proměnných (spojité, diskrétní, logické);
- ☑ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,…);
- ☑ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ☑ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ☑ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

© Institut biostatistiky a analýz

FORMÁLNÍ (MATEMATICKÝ) POPIS SYSTÉMU

Matematické prostředky se různí podle:

- ☑ typu časové základny (spojité, diskrétní, nezávislé na časovém měřítku);
- ☑ charakteru proměnných (spojité, diskrétní, logické);
- ☑ determinovanosti proměnných a parametrů (deterministické, nedeterministické - pravděpodobnostní, fuzzy,…);
- ☑ vztahu k okolí (autonomní, neautonomní);
- ☑ proměnnosti parametrů (lineární, nelineární, časově proměnné);
- ☑ vztahu k minulosti (bez paměti, s pamětí);

© Institut biostatistiky a analýz

TECHNICKÝ & BIOLOGICKÝ SYSTÉM

základními vlastnostmi biologických systémů jsou:

- ☑ přirozenost (zpravidla nejsou vytvořeny člověkem);
- ☑ veliký rozměr (velký počet stavových proměnných a ne vždy je přesně znám);
- ☑ složitá hierarchická struktura;
- ☑ významná interakce na všech úrovních jejich struktury (často časově proměnná);
- ☑ velké rozdíly mezi jednotlivými realizacemi (jedinci) – rozptyl uvnitř populace – interindividuální variabilita;
- ☑ velké rozdíly v chování jednotlivých realizací (jedinců) v čase – intraindividuální variabilita;

© Institut biostatistiky a analýz

TECHNICKÝ & BIOLOGICKÝ SYSTÉM

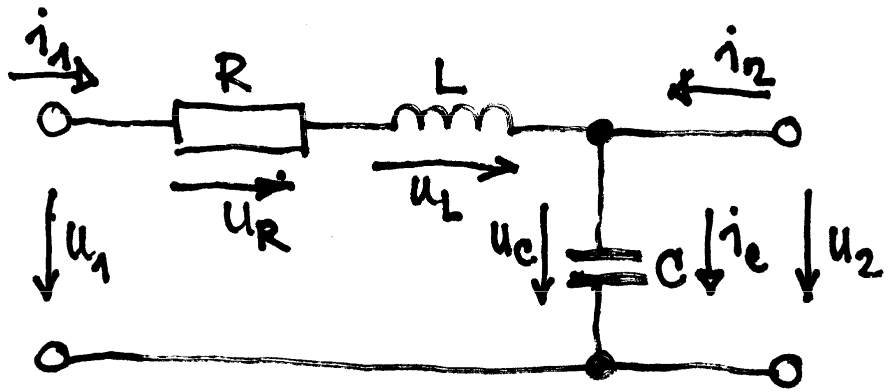
základními vlastnostmi biologických systémů jsou i:

- ☑ nestacionarita a neergodicita nedeterministického chování;
- ☑ předpoklady o linearitě představují velice hrubou a omezenou aproximaci;
- ☑ významné omezení počtu experimentů opakovatelných za dostatečně srovnatelných podmínek;
- ☑ významné omezení experimentů z hlediska prevence škod;
- ☑ experimenty na jedincích různého typu (člověk x zvířata) mohou přinášet různé výsledky jak z hlediska kvality, tak kvantity

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=u_1(t)$$

$$u_C=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C\,d\tau \quad \text{a} \quad i_L=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L\,d\tau$$

© Institut biostatistiky a analýz

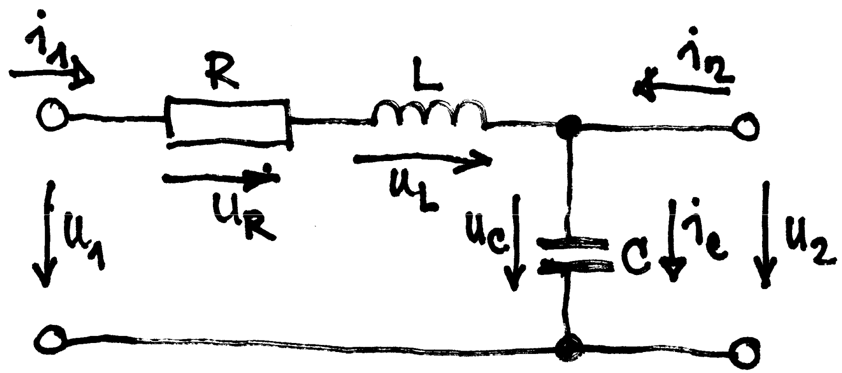
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

$$i_1 = i_C = i_L = C.\frac{du_C}{dt} \quad \text{a} \quad u_L = L.\frac{di_L}{dt} = L.\frac{di_1}{dt}$$

$$\text{a tedy} \quad i_1' = \frac{1}{L}u_L$$

Pak lze psát

$$R.i_1 + L.i_1' + u_C = u_1$$



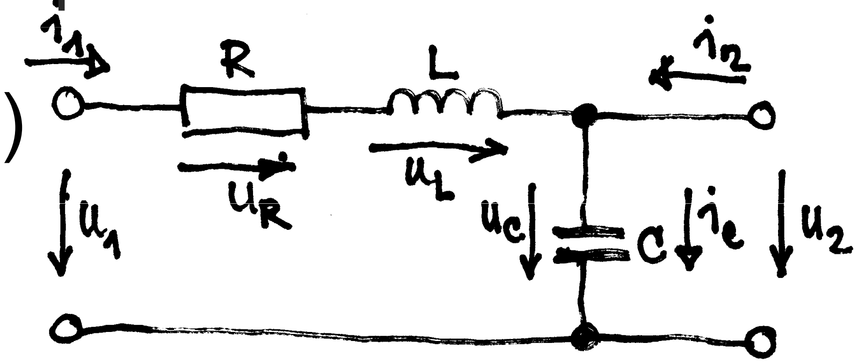
VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

Po záměně pořadí členů na levé straně a po dosazení za proud i_1 a jeho derivaci ze vztahu mezi proudem a napětím na kapacitě je

$$LC.u_C''(t) + RC.u_C'(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

a protože napětí na kapacitě je současně i výstupním napětím, tj. $u_C(t) = u_2(t)$ lze psát matematický vztah mezi výstupním u_2 (t) a vstupním u_1(t) napětím obvodu

$$LC.u_2''(t) + RC.u_2'(t) + u_2(t) = u_1(t)$$



Vztah mezi vstupem a výstupem – jedna z forem vnějšího popisu

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS

obecně, spojitý systém n-tého řádu popisuje diferenciální rovnice n-tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \ldots + a_0 x \ ,$$

která je, za předpokladu že parametry $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ jsou konstantní, lineární;

prakticky nelze realizovat takové systémy, jejichž výstupní signál by byl přesně úměrný derivacím vstupního signálu, proto musí platit $m \le n$;

© Institut biostatistiky a analýz

LINEARITA

Systém je lineární, platí-li pro něj **princip superpozice**

Je-li y=f(x) převodní funkce systému, pak pro lineární systém musí platit

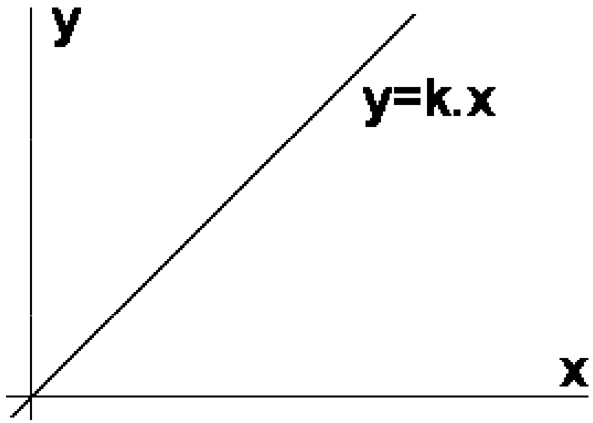
1) $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$;

2) $c.f(x) = f(c.x)$, c = konst.

© Institut biostatistiky a analýz

LINEARITA

A to je jen tehdy, je-li
$y=k.x$, kde k = konst.



1) $k.x_1 + k.x_2 = k.(x_1 + x_2)$

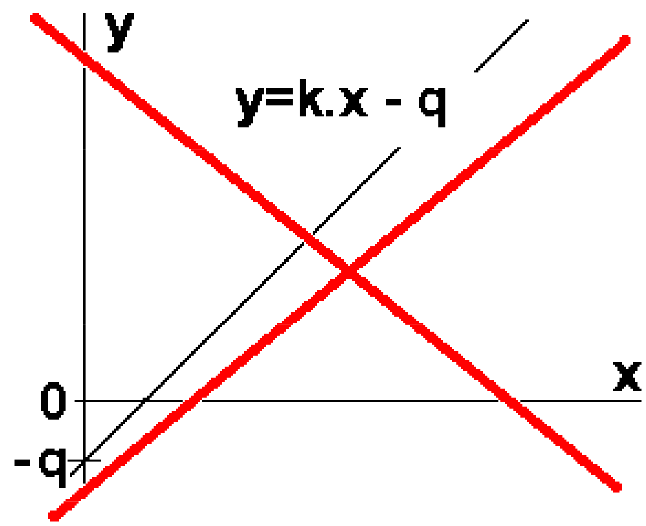
2) $c.k.x = k.c.x$

LINEARITA

A neplatí to ani, když

$y=k.x-q$, kde k,q = konst.,

protože



1) $(k.x_1-q)+(k.x_2-q) \neq k.(x_1+x_2)-q$

2) $c.(k.x-q) \neq (k.c.x-q)$

© Institut biostatistiky a analýz

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt} dt$$

kde p = σ+jω.

© Institut biostatistiky a analýz

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt$$

kde p = σ+jω.

Pamatujeme si ještě definiční vztah Fourierovy transformace?

© Institut biostatistiky a analýz

DEFINIČNÍ VZTAH

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt} dt$$

kde $p = \sigma + j\omega$.

Pamatujeme si ještě definiční vztah Fourierovy transformace?

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-j\omega t} dt$$

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

- spousta úžasných vlastností ekvivalentních vlastnostem Fourierovy transformace, navíc i něco co se neuvěřitelně hodí pro řešení diferenciálních rovnic (převádí diferenciální rovnice na mocninné algebraické)
- Laplacův obraz derivace:

$$f'(t) \sim p.F(p) - f(0)$$

$$f^{(n)}(t) \sim p^{n}.F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$LC.u_2''(t)+RC.u_2'(t)+u_2(t)=u_1(t)$$

Vyjádřeme nyní tuto rovnici pomocí Laplacových obrazů obou veličin. Za předpokladu nulových počátečních podmínek pro Laplacův obraz n-té derivace funkce y(t) platí

$$y^{(n)}(t)\approx p^n Y(p)+0$$

Do dosazení dostáváme

$$LC.p^2U_2(p)+RC.pU_2(p)+U_2(p)=U_1(p)$$

$$(LC.p^2+RC.p+1).U_2(p)=U_1(p)$$

© Institut biostatistiky a analýz

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pro poměr obrazů výstupní a vstupní veličiny můžeme psát

$$F(p)=\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{1}{LC.p^2+RC.p+1}=\frac{1}{LC}.\frac{1}{p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}}$$

Takto definovanou funkci za nulových počátečních podmínek (!!!!) nazýváme **obrazovou (operátorovou) přenosovou funkci** daného systému.

© Institut biostatistiky a analýz

PŘENOSOVÁ FUNKCE

pro obecnou diferenciální rovnici n-tého řádu

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y =$$
$$= a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x \,,$$

má přenosová funkce lineárního systému za předpokladu nulových počátečních podmínek tvar

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1}.p^{m-1} + a_{m-2}.p^{m-2} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \dots + b_1 p + b_0}$$

© Institut biostatistiky a analýz

PŘENOSOVÁ FUNKCE

polynom ve jmenovateli přenosové funkce

$$b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0$$

nazýváme charakteristickým polynomem systému a rovnici

$$b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0 = 0$$

nazýváme charakteristickou rovnicí systému

© Institut biostatistiky a analýz

PŘENOSOVÁ FUNKCE

řešením charakteristické rovnice

$$b_n p^n + b_{n-1}.p^{n-1} + b_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0 = 0$$

resp.

$$p^n + b'_{n-1}.p^{n-1} + b'_{n-2}.p^{n-2} + \ldots + b'_1 p + b'_0 = 0$$

dostaneme n jejích kořenů p_i, $i=1,\ldots,n$.

© Institut biostatistiky a analýz

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Podobně můžeme určit i kořeny z_j, j=1,…,m rovnice, která vznikne položením polynomu v čitateli přenosové funkce rovno nule, tj.

$$a_m p^m + a_{m-1}.p^{m-1} + a_{m-2}.p^{m-2} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Kořeny p_i i z_j mohou být obecně reálné i komplexní; za předpokladu, že koeficienty b_i, resp. a_j jsou reálné, pak kořeny p_i i z_j, jsou-li komplexní, jsou komplexně sdružené.

© Institut biostatistiky a analýz

PŘENOSOVÁ FUNKCE

Pomocí hodnot kořenů z_j a p_i můžeme psát přenosovou funkci ve tvaru

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = c_m . \frac{(p - z_1).(p - z_2). \ldots .(p - z_m)}{(p - p_1).(p - p_2). \ldots .(p - p_n)}$$

Kořeny z_j nazýváme nulové body přenosové funkce a kořeny p_i póly přenosové funkce F(p)

© Institut biostatistiky a analýz

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- proměnná p má obecně komplexní charakter a tedy nabývá tvaru $p = \sigma + j\omega$,

  kde σ je koeficient tlumení a $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence
- předpokládejme, že koeficient tlumení

  $$\sigma = 0,$$

  pak po dosazení za p v operátorové přenosové funkci dostáváme

  $$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \left|F(j\omega)\right|.e^{j\varphi(\omega)}$$

  což nazýváme frekvenční přenosovou funkcí systému

© Institut biostatistiky a analýz

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ frekvenční charakteristika je grafické vyjádření frekvenční přenosové funkce systému (geometrické místo koncových bodů vektoru přenosu pro frekvence, prakticky pouze v intervalu $0 \leq \omega < \infty$)

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- frekvenční charakteristiky vyjadřujeme zpravidla dvěma způsoby:
  - frekvenční charakteristika v komplexní rovině

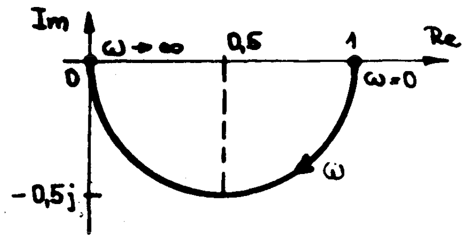
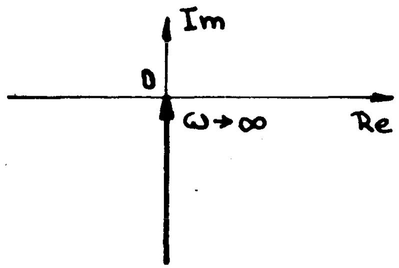
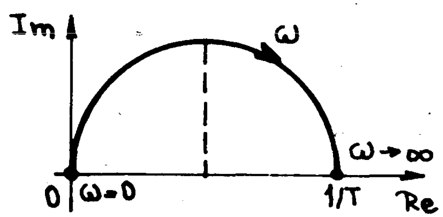
$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\,[F(j\omega)] + j.\mathrm{Im}\,[F(j\omega)]$$

  - modulová (amplitudová) a fázová frekvenční charakteristika

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)}$$

FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA V KOMPLEXNÍ ROVINĚ

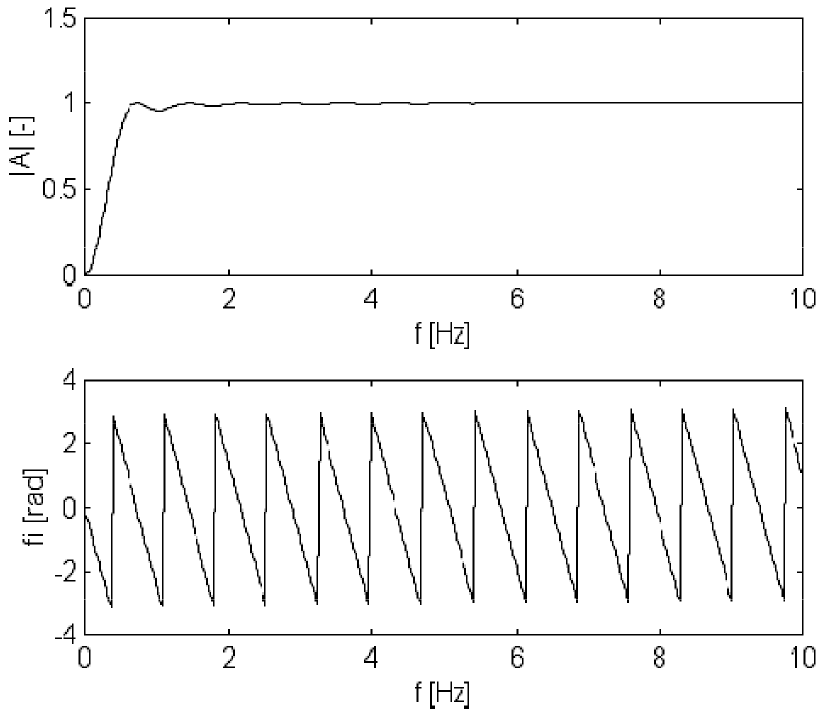
v tomto případě kreslíme frekvenční charakteristiku nejčastěji v komplexní rovině s osami, na které vynášíme reálnou a imaginární složku přenosu; frekvenční vlastnosti systému vyjadřuje křivka v komplexní rovině, jejímž parametrem je kruhová frekvence ω

přenos	F(jω)
$\frac{1}{Tp+1}$	
$\frac{1}{p}$	
$\frac{p}{Tp+1}$	

© Institut biostatistiky a analýz

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- vlastnosti systému určují dvě funkce – závislost modulu přenosu na frekvenci a závislost fáze na frekvenci;



© Institut biostatistiky a analýz

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA

- v některých případech se využívá pro znázornění těchto charakteristik logaritmické měřítko – amplitudu pak vyjadřujeme v decibelech

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20.\log |F(j\omega)|$$

Tento způsob popisu je výhodný v případech, kdy je přenosová funkce systému určena součinem dílčích přenosových funkcí

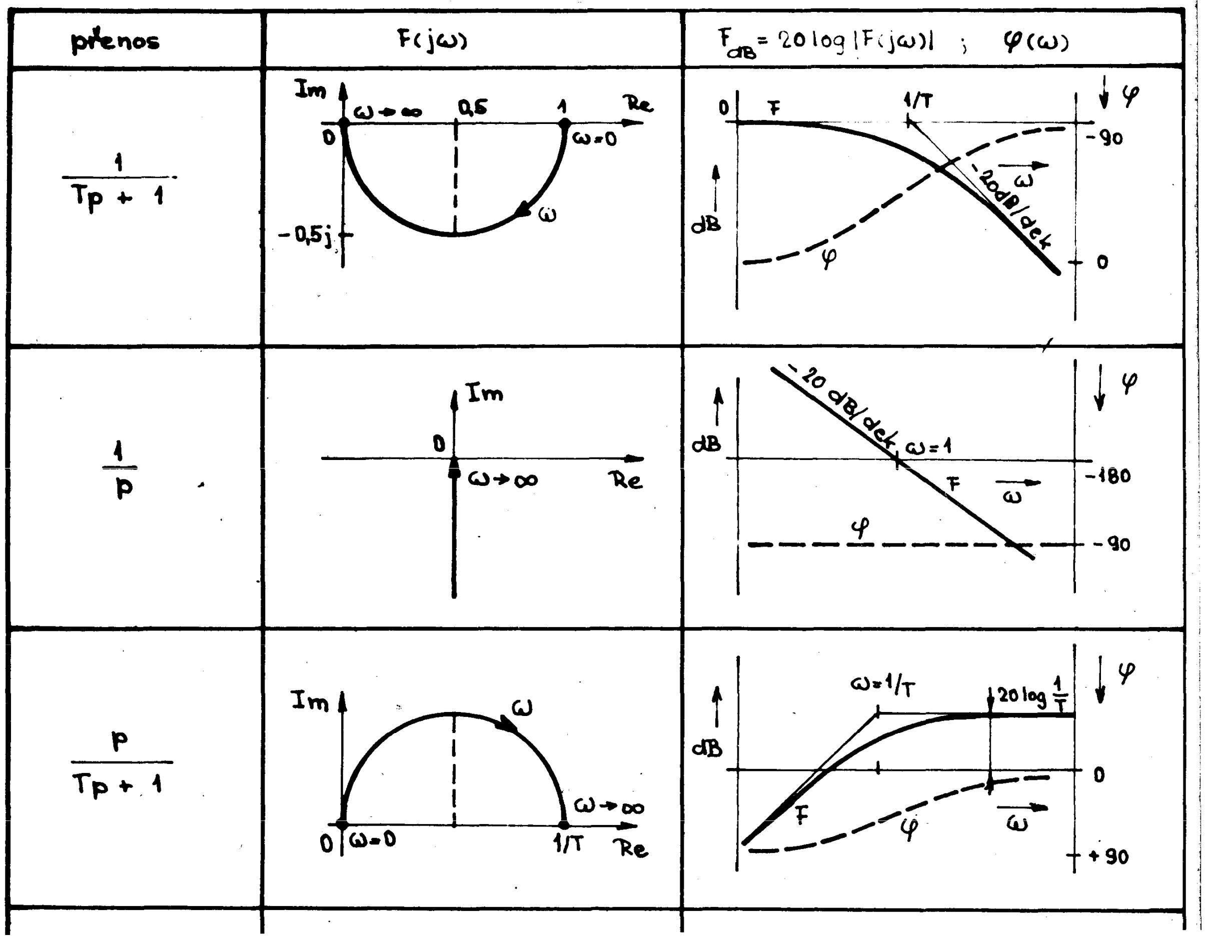
$$F(j\omega) = F_1(j\omega).\ F_2(j\omega).\ \ldots\ .\ F_k(j\omega);$$

pak platí

$$|F(j\omega)|.e^{j\varphi(\omega)} = |F_1(j\omega)|.\ |F_2(j\omega)| \ldots\ |F_k(j\omega)|.e^{j(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k)}$$

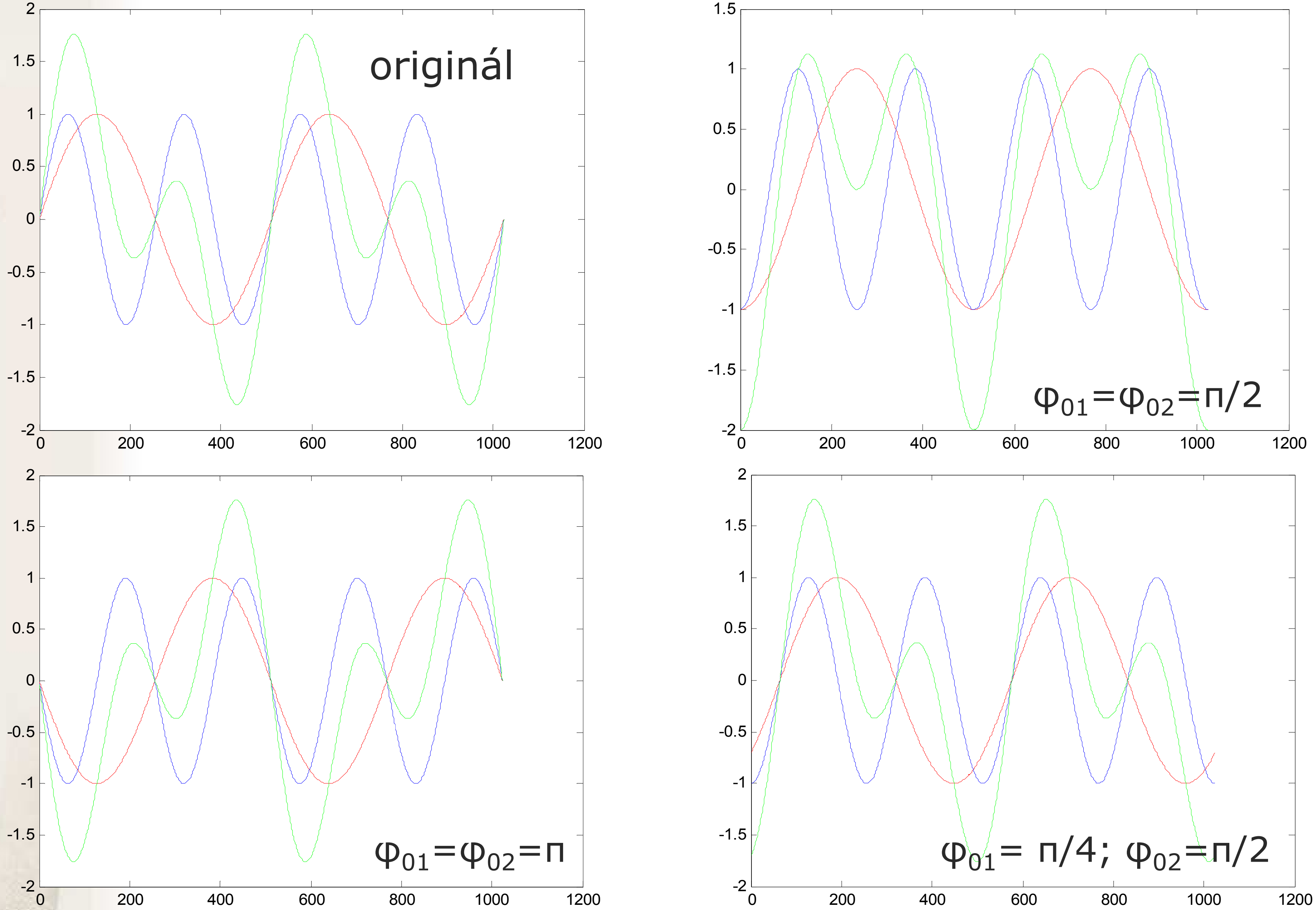
© Institut biostatistiky a analýz

MODULOVÁ A FÁZOVÁ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKA



© Institut biostatistiky a analýz

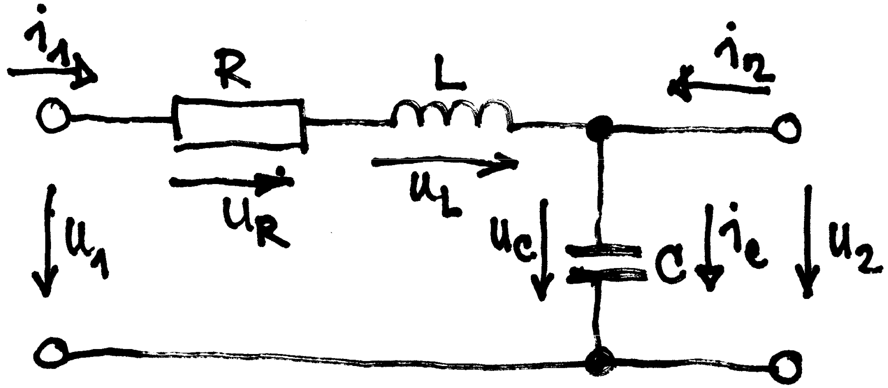
HRÁTKY S POČÁTEČNÍ FÁZÍ



© Institut biostatistiky a analýz

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru



$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)} \int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

© Institut biostatistiky a analýz

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u_L = L.\frac{di_L}{dt} = L.\frac{di_1}{dt} \quad \text{a tedy} \quad i'_1 = \frac{1}{L}u_L$$

a tedy i

$$R.i_1 + L.i'_1 + u_C = u_1$$

Pak se poněkud komplikuje určení $i_1 = i_C$ ze vztahu

$$u_C = \frac{1}{C(u_C)}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau$$

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

Platí, že

$$\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = C(u_C).u_C$$

Potom pro i_C platí

$$i_C = [C(u_C).u_C]' = C'(u_C).u'_C.u_C + C(u_C).u'_C$$

Pro jednoduchost, nechť je $C(u_2) = k.u_2$ a tedy $C‘(u_2) = k$; pak

$$i_1 = i_C = k.u'_C.u_C + k.u_C.u'_C = 2k.u_C.u'_C$$

$$i'_1 = i'_C = [2k.u_C.u'_C]' = 2k.(u'_C.u'_C + u_C.u''_C) = 2k.(u'_C)^2 + 2k.u_C.u''_C$$

© Institut biostatistiky a analýz

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

A po dosazení dostáváme

$$2k.R.u_C.u'_C + 2k.L.(u'_C)^2 + 2k.L.u_C.u''_C + u_C = u_1$$

Protože $C(u_C) = k.u_C$, můžeme psát

$$2R.C(u_C).u'_C + 2L.C'(u_C).u'_C.u'_C + 2L.C(u_C).u''_C + u_C = u_1$$

$$2L.C(u_C).u''_C + \left(2R.C(u_C) + 2L.C'(u_C).u'_C\right).u'_C + u_C = u_1$$

A tedy obecně

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \ldots + b_0(\bullet).y =$$
$$= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \ldots + a_0(\bullet).x$$

© Institut biostatistiky a analýz

VSTUPNÍ/VÝSTUPNÍ POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$b_n(\bullet).y^{(n)} + b_{n-1}(\bullet).y^{(n-1)} + \ldots + b_0(\bullet).y =$$
$$= a_m(\bullet).x^{(m)} + a_{m-1}(\bullet).x^{(m-1)} + \ldots + a_0(\bullet).x$$

(•) znamená závislost na určité (dané, zvolené) proměnné popisující chování systému – její průběh, ale obecně závisí na vstupním signálu

$$\Downarrow$$

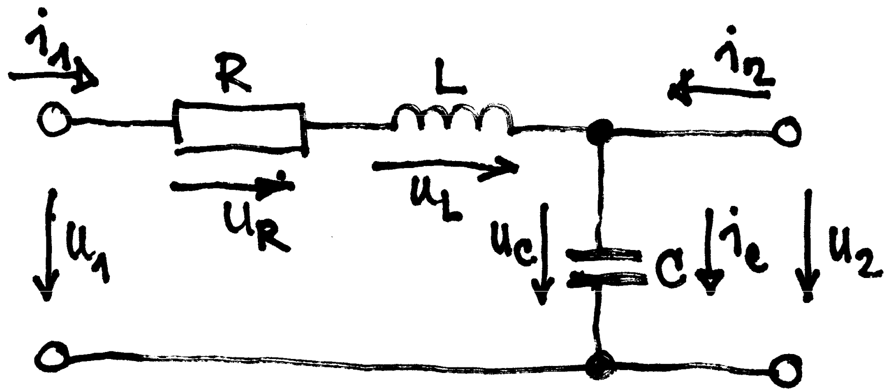
(1)Vlastnosti nelineárního systému nezávisí jen na systému samém, nýbrž i na jeho vstupu (buzení)

(2) Laplacovu transformaci součinu funkce a derivace proměnné lze počítat (zda-li) jen pro konkrétní případ a tedy nelze obecně stanovit tvar operátorové přenosové funkce nelineárního systému

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

předpokládejme konstantní parametry prvků R, L, C obvodu



$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C d\tau \quad \text{a} \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L d\tau$$

$$u'_2 = \frac{1}{C} i_1$$

$$u'_2 = 0.u_2 + \frac{1}{C} i_1 + 0.u_1$$

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = u_1(t)$$

$$R.i_1 + L.i'_1 + u_2 = u_1$$

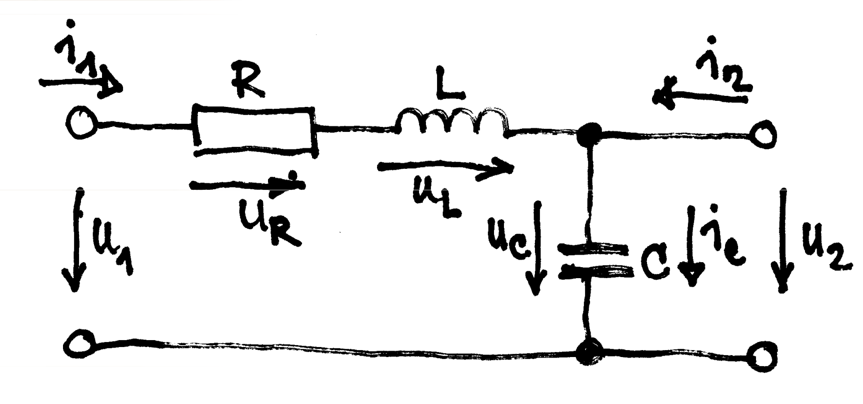
$$i'_1 = -\frac{1}{L} u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L} u_1$$

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C \, d\tau \quad a \quad i_1 = i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L \, d\tau$$

u_2 a i_1 jsou **stavové veličiny**; z jejich hodnot, resp. jejich derivací a parametrů systému jsme schopni spočítat hodnoty všech dalších veličin popisujících chování daného systému



$$u_R = R.i_1; \quad u_L = L.i'_1; \quad u_C = u_2$$

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u'_2 = 0.u_2 + \frac{1}{C} i_1 + 0.u_1 \qquad i'_1 = -\frac{1}{L} u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L} u_1$$

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} . [u_1]$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}.\mathbf{s} + \mathbf{B}.\mathbf{x}$$

rovnice dynamiky

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

$$u_2 = u_2 = u_2 + 0.i_1 + 0.u_1$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}.\mathbf{s} + \mathbf{D}.\mathbf{x}$$

výstupní rovnice

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS

A - matice vnitřních vazeb systému (též systémová matice nebo matice zpětných vazeb);
rozměr: n x n

B - matice vazeb systému na vstup (též vstupní matice); rozměr: m x n

C - matice vazeb výstupu na stav (výstupní matice); rozměr: n x r (r je počet výstupů)

D - matice přímých vazeb výstupů na vstupy; rozměr: m x n (z hlediska zkoumání vlastností lineárních dynamických systémů nejsou tyto vazby podstatné a často je tato matice nulová)

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

nyní opět předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru; pak

$$u_2.C(u_2) = u_C.C(u_C) = \int_{-\infty}^{t} i_C d\tau = \int_{-\infty}^{t} i_1 d\tau$$

$$u'_2.C(u_2) + u_2.C'(u_2).u'_2 = i_1$$

$$u'_2 = \frac{1}{C(u_2) + u_2.C'(u_2)}.i_1 = \frac{1}{\Gamma(u_2)}.i_1$$

$$i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

© Institut biostatistiky a analýz

VNITŘNÍ (STAVOVÝ) POPIS NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

$$u'_2 = \frac{1}{\Gamma(u_2)}.i_1 \qquad i'_1 = -\frac{1}{L}u_2 - \frac{R}{L}.i_1 + \frac{1}{L}u_1$$

$$\begin{bmatrix} u'_2 \\ i'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\Gamma(u_2) \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} . [u_1]$$

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

1. diferenciální rovnice;
2. operátorová přenosová funkce (Laplacova transformace);
3. rozložení nul a pólů;
4. frekvenční přenosová funkce;
5. frekvenční charakteristiky – v komplexní rovině; amplitudová, fázová;

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

1. diferenciální rovnice;
2. operátorová přenosová funkce (Laplacova transformace);
3. rozložení nul a pólů;
4. frekvenční přenosová funkce;
5. frekvenční charakteristiky – v komplexní rovině; amplitudová, fázová;
6. impulsní charakteristika;
7. přechodová charakteristika;

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$$H(p) = Y(p)/X(p)$$

$$Y(p) = H(p).X(p)$$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).\mathcal{L}(\delta(t))) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).1)$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t)*\delta(t)) = \mathcal{L}(h(t)*\mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenosová funkce tvoří transformační pár Fourierovy transformace.

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li přiveden na vstup signálu přiveden Diracův impulz, má systém reagovat na dvě nekonečně velké změny úrovně signálu v nekonečně krátkém intervalu;
- ☑ čím užší signál, tím širší spektrum – jednotkový impulz má nekonečně široké konstantní spektrum, takže přivedeme-li na vstup systému Diracův impulz, je situace ekvivalentní současnému přivedení úplné rovnoměrné směsi harmonických signálů o frekvencích od 0 do ∞ Hz;
- ☑ takový signál není reálný systém schopen přenést bez deformace;
- ☑ impulsové charakteristice lze tedy rozumět jako systémem zdeformovaný Diracův impulz. Podle vlastností deformovaného výstupního signálu můžeme usuzovat na vlastnosti systému;

© Institut biostatistiky a analýz

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$,
  hovoříme o systému s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);
- ☑ není-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$,
  resp. je-li $h(t) \neq 0$ pro $t < \infty$,
  hovoříme o systému s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$

$Y(p) = G(p) = H(p).\mathcal{L}(\sigma(t)) = H(p).1/p = H(p)/p$

Příprava nových učebních materiálů
pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF
č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE"

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

© Institut biostatistiky a analýz