

# Sbírka příkladů pro univerzitní kurz F5170 Úvod do fyziky plazmatu

Jiří Šperka, Jan Voráč, Lenka Zajíčková

Ústav fyzikální elektroniky  
Přírodovědecká fakulta  
Masarykova univerzita

2014

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>5</b>
1.1 Teorie	5
1.2 Příklady	7
1.2.1 Odvození plazmové frekvence	7
1.2.2 Plazmová frekvence a Debyeova délka	8
1.2.3 Debye–Hückelův potenciál	8
<b>2 Pohyb částic v elektromagnetických polích</b>	<b>9</b>
2.1 Teorie	9
2.2 Příklady	10
2.2.1 Magnetické zrcadlo	10
2.2.2 Jinak konstruované magnetické zrcadlo	10
2.2.3 Elektron ve vakuu natřikrát	11
2.2.4 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift	11
2.2.5 Relativistická cyclotronová frekvence	12
2.2.6 Relativistická částice v elektromagnetickém poli	12
2.2.7 Zákon zachování náboje	12
2.2.8 Magnetostatické pole	12
2.2.9 Cyklotronová frekvence elektronu	12
2.2.10 Cyklotronová frekvence ionizovaného atomu vodíku	13
2.2.11 Magnetický moment	13
2.2.12 Magnetický moment 2	13
2.2.13 Lorentzova síla	13
<b>3 Základy kinetické teorie plazmatu</b>	<b>14</b>
3.1 Teorie	14
3.2 Příklady	15
3.2.1 Rozdělovací funkce rychlostí částic rovnoměrně rozdělených v prostoru	15
3.2.2 Lineární rozdělovací funkce velikosti rychlostí	15
3.2.3 Kvadratická rozdělovací funkce velikosti rychlostí	15
3.2.4 Sinusoidální rozdělovací funkce velikosti rychlostí	15
3.2.5 Boltzmannova kinetická rovnice	15

<b>4</b>	<b>Střední hodnoty a makroskopické veličiny</b>	<b>16</b>
4.1	Teorie . . . . .	16
4.2	Příklady . . . . .	17
4.2.1	RMS velikost rychlosti . . . . .	17
4.2.2	Střední rychlost sinusoidálního rozdělení . . . . .	17
4.2.3	Střední rychlost kvadratického rozdělení . . . . .	17
4.2.4	Rovnovážná teplota . . . . .	17
4.2.5	Hustota částic . . . . .	18
4.2.6	Nejpravděpodobnější rychlost lineárního rozdělení . . . . .	18
4.2.7	Nejpravděpodobnější rychlost sinusoidálního rozdělení . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Rovnovážný stav</b>	<b>19</b>
5.1	Teorie . . . . .	19
5.2	Příklady . . . . .	20
5.2.1	Gama funkce . . . . .	20
5.2.2	1D Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce . . . . .	20
5.2.3	Dvojměrná Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce . . . . .	21
5.2.4	Trojměrná Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce . . . . .	22
5.2.5	Exotická jednorozměrná rozdělovací funkce . . . . .	22
5.2.6	Účinný průřez . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Interakce částic v plazmatu</b>	<b>23</b>
6.1	Teorie . . . . .	23
6.2	Příklady . . . . .	24
6.2.1	Střední volná dráha iontů Xe . . . . .	24
6.2.2	Srážka tuhých koulí . . . . .	24
6.2.3	Celkový účinný průřez . . . . .	25
<b>7</b>	<b>Makroskopické transportní rovnice</b>	<b>26</b>
7.1	Teorie . . . . .	26
7.2	Příklady . . . . .	27
7.2.1	Dohasínání . . . . .	27
7.2.2	Makroskopický srážkový člen z podmínky zachování hybnosti . . . . .	27
7.2.3	Makroskopický srážkový člen z podmínky zachování hybnosti II . . . . .	28
7.2.4	Zjednodušená rovnice pro tepelný tok . . . . .	29
<b>8</b>	<b>Makroskopické rovnice pro vodivou tekutinu</b>	<b>30</b>
8.1	Teorie . . . . .	30
8.2	Příklady . . . . .	30
8.2.1	Hustota elektrického proudu . . . . .	30
8.2.2	Plně ionizované plazma . . . . .	31
8.2.3	Difúze kolmo na siločáry magnetického pole . . . . .	31

<b>9</b>	<b>Vodivost plazmatu a difúze</b>	<b>33</b>
9.1	Teorie . . . . .	33
9.2	Příklady . . . . .	34
9.2.1	Stejnoseměrná vodivost plazmatu . . . . .	34
9.2.2	Tenzor pohyblivosti elektronů v plazmatu za přítomnosti magnetického pole . . . . .	35
9.2.3	Ohmův zákon v přítomnosti magnetického pole . . . . .	35
9.2.4	Difúzní rovnice . . . . .	36
<b>10</b>	<b>Některé základní jevy v plazmatu</b>	<b>37</b>
10.1	Teorie . . . . .	37
10.2	Příklady . . . . .	38
10.2.1	Šíření vln v nemagnetizovaném plazmatu . . . . .	38
10.2.2	Plovoucí potenciál . . . . .	38
10.2.3	Bohmova rychlost . . . . .	38
10.2.4	Plazmová frekvence . . . . .	38
<b>11</b>	<b>Boltzmannův srážkový člen</b>	<b>40</b>
11.1	Teorie . . . . .	40
11.2	Příklady . . . . .	41
11.2.1	Srážky, Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce . . . . .	41
11.2.2	Srážky pro rozdílné rozdělovací funkce . . . . .	42
11.2.3	Srážky pro Druyvesteynovo rozdělení . . . . .	42

# Seznam obrázků

1.1	Ilustrace k příkladu č. 1.2.1. . . . .	7
2.1	Ilustrace k příkladu 2.2.3. . . . .	11
4.1	Graf k příkladu nejvyšší rovnovážné teploty 4.2.4. . . . .	17
4.2	Graf k příkladu nejvyšší hustoty částic 4.2.5. . . . .	18

# Předmluva

Tato sbírka procvičovacích příkladů k přednášce F5170 Úvod do fyziky plazmatu vznikla v rámci projektu FRVŠ 12/2013/G6. Nejdůležitějším zdrojem byla kniha Fundamentals of Plasma Physics od J. A. Bittencourta [4]. Autoři uvítají veškerá upozornění na případné chyby.

Aktuální verzi této sbírky je možno najít a zdarma stáhnout na adrese <http://physics.muni.cz/~sperka/exercises.html>.

## Kontakty

Jiří Šperka            jewel@mail.muni.cz  
Jan Voráč            vorac@mail.muni.cz  
Lenka Zajíčková    lenkaz@physics.muni.cz

## Fyzikální konstanty

Klidová hmotnost protonu	$m_p$	$1,67 \cdot 10^{-27}$ kg
Klidová hmotnost elektronu	$m_e$	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
Elementární náboj	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
Boltzmannova konstanta	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ J K <sup>-1</sup>
Permitivita vakua	$\varepsilon_0$	$8,854 \cdot 10^{-12}$ A <sup>2</sup> s <sup>4</sup> kg <sup>-1</sup> m <sup>-3</sup>

## Použité značení

Vektorové veličiny se značí tučně ( $\mathbf{v}$ ), skalární veličiny, včetně velikosti vektorů, kurzívou ( $v$ ). Tenzory se obvykle značí velkými kaligrafickými písmeny ( $\mathcal{P}$ ).

## Operátory

skalární součin	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
vektorový součin	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
$i$ -tá derivace podle $x$	$\frac{d^i}{dx^i}$
parciální derivace	$\frac{\partial}{\partial x}$
operátor nabla	$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
Laplaceův operátor	$\Delta = \nabla^2$
úplná derivace podle času	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$

## Fyzikální veličiny

koncentrace elektronů	$n_e$
teplota elektronů	$T_e$
elektronová plazmová frekvence	$\omega_{pe}$
Debyeova délka	$\lambda_D$
Larmorův poloměr	$r_c$
Larmorova frekvence	$\Omega_c$
magnetický moment	$\mathbf{m}$
síla	$\mathbf{F}$
intenzita elektrického pole	$\mathbf{E}$
indukce magnetického pole	$\mathbf{B}$
lib. veličina pro jeden druh částic	$\chi_\alpha$
rozdělovací funkce	$f(\chi_\alpha)$
průměrná rychlost	$\mathbf{u}$
hustota náboje	$\rho$
hustota hmotnosti	$\rho_m$
srážková frekvence	$\nu$
vznik a zánik částic v důsledku srážek	$S_\alpha$
skalární tlak	$p$
tenzor kinetického tlaku	$\mathcal{P}$
pohyblivost částic	$\mathcal{M}_\alpha$

# Kapitola 1

## Úvod

### 1.1 Teorie

Elektronová plazmová frekvence

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}} = \text{const} \sqrt{n_e} \quad (1.1)$$

popisuje typické elektrostatické kolektivní kmity elektronů v důsledku malé separace elektrického náboje. Podobným způsobem mohou být definovány plazmové frekvence jiných druhů částic, nicméně elektronová plazmová frekvence je díky velké pohyblivosti elektronů nejvýznamnější (poměr hmotnosti protonu a elektronu  $m_p/m_e$  je  $1.8 \times 10^3$ ).

Plazmové oscilace mohou být pozorovány jen tehdy, je-li systém zkoumán na časové škále delší než  $\omega_p^{-1}$  a nepůsobí-li na systém externí síly rychleji než s frekvencí  $\omega_p$ . Pozorování na délkové škále kratší, než je vzdálenost, kterou urazí typická částice v plazmatu během jedné plazmové periody, nepostřehne kolektivní chování plazmatu. Tato vzdálenost je prostorovým ekvivalentem plazmové periody a nazýváme ji Debyeovou délkou [10]:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k T_e}{m_e}} \omega_p^{-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_e}{n_e e^2}} = \text{const} \sqrt{T_e/n_e}. \quad (1.2)$$

Debyeova délka je nezávislá na hmotnosti, takže je srovnatelná pro různé druhy částic.



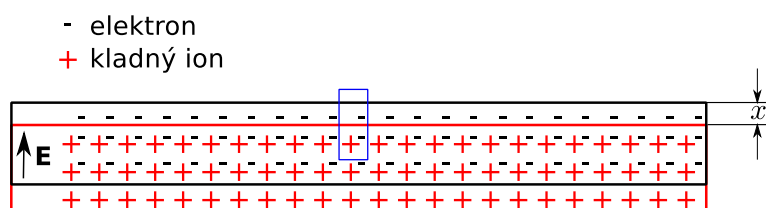
	$n_e$ [cm <sup>-3</sup> ]	$T_e$ [eV]	tlak [Pa]	Ref.
Plazmové obrazovky	$(2.5-3.7) \times 10^{11}$	0.8–1.8	$(20-50) \times 10^3$	[8]
	max $3 \times 10^{12}$		$(40-67) \times 10^3$	[23]
	$(0.2-3) \times 10^{13}$	1.6–3.4		[20]
Zemská ionosféra	max $10^6$	max 0.26		[6]
			$10^{-5}$	[2]
RF Magnetrony			0.5-10	[16]
	$1-8 \times 10^9$	2–9	0.3–2.6	[21]
Stejnoseměrné Magnetrony	$10^{18}$	1-5	0.5–2.5	[24]
RF Atmosferické plazma	$10^{13}-10^{14}$		$10^5$	[11]
		0.2–6	$10^5$	[13]
Mikrovlnné atmosferické plazma		1.2–1.9	$10^5$	[15]
	$3 \times 10^{14}$			[12]
Svařovací oblouk		1.5	$10^5$	[3]
	$1.5 \times 10^{17}$		$10^5$	[22]
	$1.6 \times 10^{17}$	1.3	$10^5$	[19]
Nízkotlaké kapacitně vázané plazma	$6 \times 10^8$		6–7	[25]
	$(0.5-4.5) \times 10^{10}$	1.4–1.6	4.7	[5]
Fluorescenční zářivky	$10^{10}-10^{11}$	1	$8 \times 10^3$	[7]

Tabulka 1.1: Přehled obvyklých hodnot nejdůležitějších parametrů plazmatu.

## 1.2 Příklady

### 1.2.1 Odvození plazmové frekvence

Uvažujme, že na počátku máme v prostoru rovnoměrně rozložené ionty, jejichž elektrický náboj je neutralizován stejným počtem elektronů. Zanedbejme tepelný pohyb částic a předpokládejme, že ionty jsou nepohyblivé. Ukažte, že malá výchylka skupiny elektronů vyvolá oscilační pohyb elektronů s plazmovou frekvencí podle vztahu (1.1).



Obrázek 1.1: Ilustrace k příkladu č. 1.2.1.

**Řešení** Situace je znázorněna na obrázku 1.1. Uvažujme, že elektrické pole v rovině kolmé na osu  $x$  je nulové (což odpovídá známému případu nekonečné nabitě roviny nebo kondenzátoru). Na uzavřenou válcovou plochu aplikujeme Gaussův zákon (na obrázku je znázorněna pouze hranice této plochy v rovině  $x-y$ ):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \left( \frac{Sn_e e}{\epsilon_0} \right) x, \quad (1.3)$$

kde  $S$  je plocha podstavy válce. Výsledné elektrické pole je tedy

$$E_x = \left( \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \right) x. \quad (1.4)$$

Po dosazení elektrického pole do pohybové rovnice pro jeden elektron dostaneme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left( \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right) x = 0. \quad (1.5)$$

To je rovnice harmonického oscilátoru s frekvencí

$$\omega_{pe} = \left( \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

### 1.2.2 Plazmová frekvence a Debyeova délka

Spočítejte plazmovou frekvenci a Debyeovu délku pro následující případy

- (a) Zemská ionosféra s hustotou elektronů  $n_e = 10^6 \text{ cm}^{-3}$  a jejich teplotou  $T_e = 0.2 \text{ eV}$ .  
 $[\omega_p = 5,6 \times 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 3,5 \times 10^8 \text{ Hz}, \lambda_D = 3,3 \text{ mm}]$
- (b) Buňka běžné plazmová obrazovky s koncentrací elektronů  $10^{13} \text{ cm}^{-3}$  a jejich teplotou  $1 \text{ eV}$ . Rozměr jedné buňky je okolo  $100 \mu\text{m}$ . Splňuje to podmínku, že rozměry systému by měly být mnohem větší než Debyeova délka?  
 $[\omega_{pe} = 1,79 \times 10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 28,4 \text{ GHz}, \lambda_D = 2,35 \mu\text{m}]$
- (c) Svařovací oblouk s koncentrací elektronů  $1,6 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  a jejich teplotou  $1,3 \text{ eV}$   
 $[\omega_{pe} = 2,3 \times 10^{13} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 3,6 \text{ THz}, \lambda_D = 21 \text{ nm}]$
- (d) Zářivka s koncentrací elektronů  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  a jejich teplotou  $1 \text{ eV}$   
 $[\omega_{pe} = 5,6 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,90 \text{ GHz}, \lambda_D = 74 \mu\text{m}]$

### 1.2.3 Debye–Hückelův potenciál

Ukažte, že Debye–Hückelův potenciál

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}{r} \quad (1.7)$$

je řešením rovnice

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(\mathbf{r})}{r_D^2} = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 k T_e} \varphi(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

kde  $r_D$  je Debye–Hückelův poloměr.

Poznámka: Debye–Hückelův potenciál je pojmenován po Pietru Debyeovi (1884-1966) a Erichu Hückelovi (1896-1980), kteří studovali polarizační jevy v elektrolytech [9].

**Řešení** Jednoduše vložte Debye–Hückelův potenciál do rovnice a řešte Laplaceův operátor

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.9)$$

## Kapitola 2

# Pohyb částic v elektromagnetických polích

### 2.1 Teorie

Lorentzova síla je kombinací elektrické a magnetické síly na bodový náboj díky elektromagnetickým polím. Pokud se částice s nábojem  $q$  pohybuje s rychlostí  $v$  v přítomnosti elektrického pole  $\mathbf{E}$  a magnetického pole  $\mathbf{B}$ , potom na ni působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.1)$$

Gyrační poloměr (známý také pod označením cyklotronový nebo Larmorův) je poloměr kruhového pohybu nabyté částice v homogenním magnetickém poli:

$$r_g = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}, \quad (2.2)$$

kde  $r_g$  je gyrační poloměr,  $m$  je hmotnost nabyté částice,  $v_{\perp}$  je složka rychlosti kolmá ke směru magnetického pole,  $q$  je náboj částice a  $B$  je velikost konstantního magnetického pole.

Podobně, frekvence rotačního pohybu, známá jako gyrofrekvence (známá také pod označením cyklotronová nebo Larmorova), je dána vztahem

$$\omega_g = \frac{|q|B}{m}. \quad (2.3)$$

*Poznámka: Cyklotron, jinak též cyklický vysokofrekvenční urychlovač, slouží k urychlování nabitých částic pomocí vysokofrekvenčního elektrického pole. Cyklotron byl vynalezen a patentován Ernestem Orlandem Lawrencem z Kalifornské univerzity v Berkeley, kde byl také cyklotron poprvé zprovozněn v roce 1932.*

## 2.2 Příklady

### 2.2.1 Magnetické zrcadlo

Magnetická zrcadla se používají k udržení nabitých částic ve vymezeném prostoru. V důsledku gradientu magnetického pole může dojít ke změně směru driftové rychlosti nabitě částice.

Mějme elektron v pozici  $z = 0$  s počáteční rychlostí  $v_0$ . Úhel mezi směrem počáteční rychlosti a indukcí magnetického pole je  $\vartheta$ . Velikost indukce magnetického pole závisí na  $z$  podle vztahu

$$B(z) = B_0 (1 + (\gamma z)^2). \quad (2.4)$$

Spočtěte v jaké vzdálenosti  $z_t$  dojde k otočení směru driftové rychlosti tohoto elektronu [14].

**Řešení** Vyjdeme z podmínky zachování kinetické energie a magnetického momentu elektronu. Ze zachování kinetické energie plyne

$$v_0^2 = v_t^2. \quad (2.5)$$

$z$ -ová složka rychlosti v bodě obratu musí být nulová, což hned využijeme v rovnici popisující zachování magnetického momentu

$$\begin{aligned} \frac{m_e v_0^2 \sin^2 \vartheta}{2 B_0} &= \frac{m_e v_t^2}{2 B_0 (1 + (\gamma z_t)^2)} \\ v_0^2 \sin^2 \vartheta (1 + (\gamma z_t)^2) &= v_t^2 \quad (= v_0^2) \\ \gamma^2 z_t^2 &= \frac{1 - \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \\ z_t &= \frac{1}{\gamma \tan \vartheta}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vidíme, že vzdálenost, v níž dojde k obratu, závisí pouze na gradientu magnetického pole a na úhlu mezi počáteční rychlostí a indukcí magnetického pole.

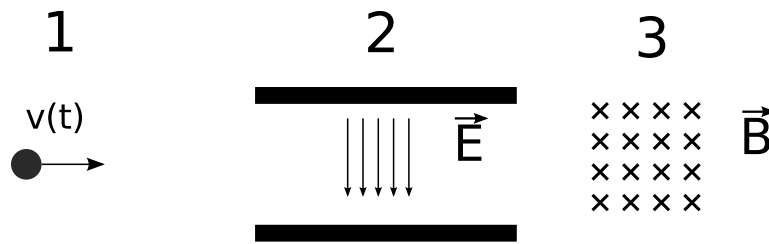
### 2.2.2 Jinak konstruované magnetické zrcadlo

Spočtěte bod obratu pro částici v magnetickém zrcadle s magnetickou indukcí danou vztahem

$$B(z) = B_0 (1 + (\gamma z)^4). \quad (2.7)$$

Úhel mezi směrem počáteční rychlosti a indukcí magnetického pole je  $\vartheta$ .

$$\left[ z_t = \left( \frac{1}{\gamma \tan \vartheta} \right)^{1/2} \right]$$



Obrázek 2.1: Ilustrace k příkladu 2.2.3.

### 2.2.3 Elektron ve vakuu natřikrát

- (a) Časovou závislost polohy elektronu  $x(t)$  v prvním úseku popisuje funkce  $x(t) = \frac{1}{8}t^4 + \pi$ , elektron se na tomto 1. úseku pohybuje po dobu jedné sekundy. Spočítejte velikost rychlosti  $v_x$ , kterou bude mít elektron na konci prvního úseku.  
 [0,5 m/s]
- (b) Poté elektron vstoupí rychlostí  $v_x$  do vychylujícího homogenního elektrického pole  $\vec{E}$  o velikosti  $10^{-10} \text{ V m}^{-1}$ . Toto pole na elektron působí mezi deskami kondenzátoru, které mají délku  $d = 1 \text{ m}$ . Jaká je svislá odchylka elektronu od původního směru na úrovni konce desek kondenzátoru? Řešte nejprve obecně. (Tíhová síla působící na elektron je malá vzhledem k elektrostatické síle a můžeme ji zanedbat.)  
 [35,2 m]
- (c) Nakonec vlétne elektron do homogenního magnetického pole  $\vec{B}$  o velikosti  $20,6 \mu\text{T}$  (tato hodnota je stejná, jako velikost horizontální složky magnetické indukce geomagnetického pole v Brně). Spočítejte Larmorův poloměr, cyklotronovou frekvenci a velikost magnetického momentu rotujícího elektronu.  
 [ $r_c = 9,72 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\Omega_c = 3,6 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $|\mathbf{m}| = 2,7 \times 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ ]
- (d) Jak by se výsledek lišil pro proton, neutron a pozitron? Pro ilustraci vizte obr. 2.1.

### 2.2.4 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift

Mějme vakuovou komoru s elektrickým polem  $E = 1 \text{ kV m}^{-1}$  kolmým na magnetické pole  $B = 1 \text{ mT}$ . Spočítejte velikost rychlosti  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  driftu pro elektron v této komoře.

$$\left[\frac{E}{B}\right]$$

### 2.2.5 Relativistická cyclotronová frekvence

Jaká je relativistická cyclotronová frekvence elektronu s velikostí rychlosti  $0.8c$  ( $c$  značí rychlost světla)?

$$[\omega = \frac{6}{10} e B/m]$$

### 2.2.6 Relativistická částice v elektromagnetickém poli

Odvoďte gyrační radius, gyrační frekvenci  $\Omega_c^{\text{rel}}$  a energii relativistické částice s velikostí rychlosti  $v$  a nábojem  $q$  v homogenním magnetickém poli s velikostí magnetické indukce  $B$ .

**Řešení** Gyrační radius:

$$r = \frac{\gamma\beta m_0 c}{qB} \quad (2.8)$$

Gyrační frekvence:

$$\Omega_c^{\text{rel}} = \frac{|q|B}{\gamma m_0} = \frac{\Omega_c}{\gamma} = \Omega_c \sqrt{1 - \beta^2} = \Omega_c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (2.9)$$

Energie:

$$E_k = m\gamma c^2 - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \quad (2.10)$$

### 2.2.7 Zákon zachování náboje

Z Maxwellových rovnic odvoďte rovnici pro zachování náboje.

$$\left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \right]$$

### 2.2.8 Magnetostatické pole

Dokažte, že v magnetostatickém poli je celková kinetická energie nabitě částice  $W_k$  konstantní.

### 2.2.9 Cyclotronová frekvence elektronu

Jaká je cyclotronová frekvence (v Hz) elektronu v homogenním magnetostatickém poli:

a)  $|\vec{B}| = 0.01 \text{ T}$

b)  $|\vec{B}| = 0.1 \text{ T}$

c)  $|\vec{B}| = 1 \text{ T}$

d)  $|\vec{B}| = 5 \text{ T}$

[a) 0.28 GHz ; b) 2.8 GHz; c) 28 GHz d) 140 GHz]

**2.2.10 Cyklotronová frekvence ionizovaného atomu vodíku**

Jaká je cyklotronová frekvence (v Hz) ionizovaného atomu vodíku v homogenním magnetostatickém poli:

a)  $|\vec{B}| = 0.01 \text{ T}$

b)  $|\vec{B}| = 0.1 \text{ T}$

c)  $|\vec{B}| = 1 \text{ T}$

d)  $|\vec{B}| = 5 \text{ T}$

[a) 0.15 MHz ; b) 1.5 MHz; c) 15 MHz d) 76 MHz]

**2.2.11 Magnetický moment**

Předpokládejte, že rovinnou uzavřenou kruhovou proudovou smyčkou o ploše  $|S| = 10^{-3} \text{ m}^2$  protéká elektrický proud o velikosti:

a)  $I = 1 \text{ A}$

b)  $I = 2 \text{ A}$

c)  $I = 8 \text{ A}$

Spočtete velikost jejího magnetického momentu  $|m|$ .

[a)  $|m| = 10^{-3} \text{ A m}^2$ ; b)  $|m| = 2 \times 10^{-3} \text{ A m}^2$ ; c)  $|m| = 8 \times 10^{-3} \text{ A m}^2$  ]

**2.2.12 Magnetický moment 2**

Jak může být zapsána velikost magnetického momentu  $|\vec{m}|$ , která je spojena s cirkulačním proudem nabitě částice (náboj  $q$ , kruhová frekvence  $\vec{\Omega}_c$ , hmotnost  $m$ ) v homogenním magnetickém poli  $\vec{B}$ ?

$$[|\vec{m}| = \frac{|q| |\vec{\Omega}_c|}{2\pi} \pi r_c^2; |\vec{\Omega}_c| = \frac{|q| |\vec{B}|}{m}]$$

**2.2.13 Lorentzova síla**

Předpokládejte magnetostatické pole  $\vec{B} = (1, 2, 0) \text{ T}$ . Elektron má rychlost  $\vec{v} = (0, 2, 1) \text{ m s}^{-1}$ . Spočtete Lorentzovu sílu.

$$[\vec{F} = -e \cdot (-2, 1, -2) \text{ N}]$$



## Kapitola 3

# Základy kinetické teorie plazmatu

### 3.1 Teorie

- Fázový prostor definuje šest souřadnic  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ .
- Dynamický stav částice je definován jediným bodem ve fázovém prostoru.
- Rozdělovací funkce je definována jako hustota bodů ve fázovém prostoru, takže

$$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = N_\alpha^6(\vec{r}, \vec{v}, t) / (d^3r d^3v). \quad (3.1)$$

- Rozdělovací funkce je tudíž normována na hustotu částic

$$n_\alpha(\vec{r}, t) = \int_{\vec{v}} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (3.2)$$

- Závislost rozdělovací funkce na nezávislých proměnných  $\vec{r}, \vec{v}, t$  se řídí Boltzmannovou kinetickou (transportní) rovnicí, tato rovnice je základní rovnicí statistiky nerovnovážných procesů

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \vec{a} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} \Big|_{\text{srazk.}} \quad (3.3)$$

## 3.2 Příklady

### 3.2.1 Rozdělovací funkce rychlostí částic rovnoměrně rozdělených v prostoru

Uvažujme systém částic rovnoměrně rozdělený v prostoru s konstantní hustotou částic  $n$ , který je charakterizován jednorozměrnou rozdělovací funkcí velikosti rychlostí  $F(v)$  definovanou takto:

$$\begin{aligned} F(v) &= C \quad \text{pro } v \leq v_0 \\ F(v) &= 0 \quad \text{jinak,} \end{aligned}$$

kde  $C$  je nenulová kladná konstanta. Určete hodnotu  $C$  pomocí  $n$  a  $v_0$ .

[Řešení: Integrací  $n = C \int_0^{v_0} dv$  získáme výsledek ve tvaru  $C = \frac{n}{v_0}$ .]

### 3.2.2 Lineární rozdělovací funkce velikosti rychlostí

Jaká je normovací konstanta  $C$  následující jednorozměrné rozdělovací funkce velikosti rychlostí  $F(v)$ ?

$$F(v) = C v \quad \text{pro } v \in \langle 0, 1 \rangle \text{ a } F(v) = 0 \text{ jinak.}$$

[ $C = 2n$  ( $n$  je hustota částic)]

### 3.2.3 Kvadratická rozdělovací funkce velikosti rychlostí

Jaká je normovací konstanta  $C$  následující jednorozměrné rozdělovací funkce velikosti rychlostí  $F(v)$ ?

$$F(v) = C v^2 \quad \text{pro } v \in \langle 0, 3 \rangle \text{ a } F(v) = 0 \text{ jinak.}$$

[ $C = n/9$  ( $n$  je hustota částic)]

### 3.2.4 Sinusoidální rozdělovací funkce velikosti rychlostí

Jaká je normovací konstanta  $C$  následující jednorozměrné rozdělovací funkce velikosti rychlostí  $F(v)$ ?

$$F(v) = C \sin(v) \quad \text{pro } v \in \langle 0, \pi \rangle \text{ a } F(v) = 0 \text{ jinak.}$$

[ $C = n/2$  ( $n$  je hustota částic)]

### 3.2.5 Boltzmannova kinetická rovnice

Uvažujte pohyb nabitých částic v jedné dimenzi, v přítomnosti elektrického potenciálu  $\varphi(x)$ . Ukažte přímou substitucí, že funkce tvaru

$$f = f\left(\frac{1}{2} m v^2 + q \varphi(x)\right)$$

je řešením Boltzmannovi kinetické rovnice za rovnovážných podmínek.

## Kapitola 4

# Střední hodnoty a makroskopické veličiny

### 4.1 Teorie

- Makroskopické veličiny, jako je hustota částic, driftová rychlost, kinetický tlak, tok tepelné energie, mohou být považovány za střední hodnoty fyzikálních veličin, které berou v potaz kolektivní chování velkého množství částic. Tyto makroskopické veličiny jsou spojeny s různými momenty rozdělovací funkce.
- Každé částici v plazmatu můžeme přiřadit nějakou její vlastnost  $\chi_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ . Touto vlastností může být například hmotnost, rychlost, hybnost, nebo energie částice.
- Střední hodnota veličiny  $\chi_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$  pro částice druhu  $\alpha$  je definována jako

$$\langle \chi_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int_{\vec{v}} \chi_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (4.1)$$

- Například, střední (driftová) rychlos  $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)$  pro částice druhu  $\alpha$  je definována následovně

$$\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \langle v_\alpha(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int_{\vec{v}} \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v. \quad (4.2)$$

## 4.2 Příklady

### 4.2.1 RMS velikost rychlosti

Jaká je rms rychlost následujících tří elektronů ( $|v_1| = 1$ ,  $|v_2| = 2$  and  $|v_3| = 5$ )?  
 $[\sqrt{10}]$

### 4.2.2 Střední rychlost sinusoidálního rozdělení

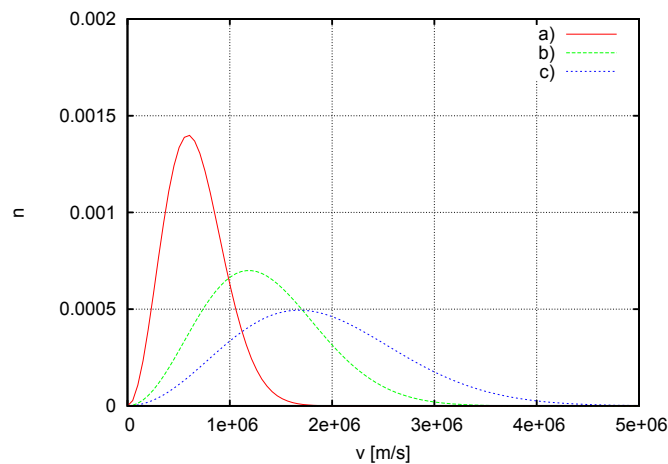
Jaká je střední rychlost následující rozdělovací funkce velikosti rychlostí?  
 $f(v) = \frac{n}{2} \sin(v)$  pro  $v \in \langle 0, \pi \rangle$  a  $f(v) = 0$  jinak.  $n$  značí hustotu částic.  
 $[1]$

### 4.2.3 Střední rychlost kvadratického rozdělení

Jaká je střední rychlost následující rozdělovací funkce velikosti rychlostí?  
 $f(v) = 3nv^2$  pro  $v \in \langle 0, 1 \rangle$  a  $f(v) = 0$  jinak.  $n$  značí hustotu částic.  
 $[3/4]$

### 4.2.4 Rovnovážná teplota

Uvažujte Maxwell-Boltzmannova rozdělení na Obr. 4.1. Které z nich má nejvyšší rovnovážnou teplotu?  
 $[c]$

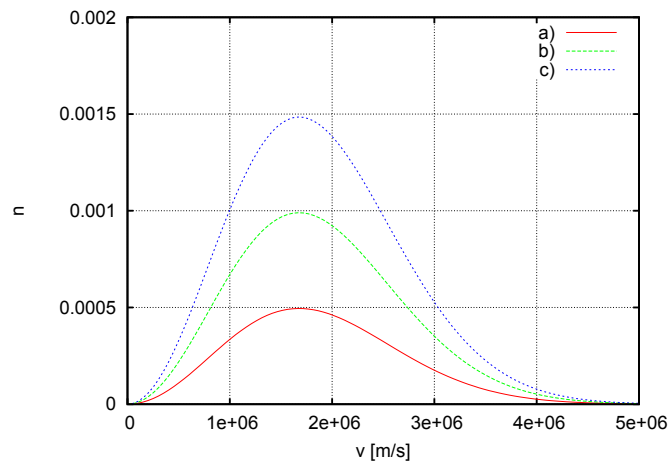


Obrázek 4.1: Graf k příkladu nejvyšší rovnovážné teploty 4.2.4.

### 4.2.5 Hustota částic

Uvažujte Maxwell-Boltzmannova rozdělení na Obr. 4.2. Které z nich má nejvyšší hustotu částic?

[c]



Obrázek 4.2: Graf k příkladu nejvyšší hustoty částic 4.2.5.

### 4.2.6 Nejpravděpodobnější rychlost lineárního rozdělení

Uvažujte následující rozdělovací funkci velikosti rychlostí  $f(v) = nv$  pro  $v \in \langle 0, 1 \rangle$  a  $f(v) = 0$  jinak.

Jaká je nejpravděpodobnější rychlost tohoto rozdělení?

[1]

### 4.2.7 Nejpravděpodobnější rychlost sinusoidálního rozdělení

Uvažujte následující rozdělovací funkci velikosti rychlostí  $f(v) = \frac{1}{2} \sin(v)$  pro  $v \in \langle 0, \pi \rangle$  a  $f(v) = 0$  jinak.

Jaká je nejpravděpodobnější rychlost tohoto rozdělení?

$[\frac{\pi}{2}]$

## Kapitola 5

# Rovnovážný stav

### 5.1 Teorie

- Rozdělovací funkce v rovnovážném stavu  $f_{\alpha}^{Eq}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  je časově nezávislým řešením Boltzmannovi kinetické rovnice v nepřítomnosti vnějších sil.
- V rovnovážném stavu nezpůsobují interakce částic žádné časové změny v  $f_{\alpha}^{Eq}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  a neexistují žádné prostorové gradienty hustoty částic.
- $f_{\alpha}^{Eq}(\vec{r}, \vec{v}, t)$  je známa jako Maxwell–Boltzmannovo rozdělení, nebo také Maxwelllovo rozdělení (viz příklady 5.2.2–5.2.4).

#### Matematika pro výpočty

Gaussov integrál je integrál Gaussovy funkce  $e^{-x^2}$  přes celý reálný prostor. Je pojmenován po německém matematikovi a fyzikovi Carl Friedrich Gaussovi. Takto integrál vypadá ( $a, b$  jsou konstanty):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}; \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (5.1)$$

Gama funkce  $\Gamma(n)$  je zobecněním faktoriálu pro obor komplexních čísel. Pokud je  $n$  kladné celé číslo, pak platí:

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad (5.2)$$

Jiné užitečné vztahy:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2 a^{\frac{n+1}{2}}}; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (5.3)$$

## 5.2 Příklady

### 5.2.1 Gama funkce

Z definice Gamma funkce ukažte, že pokud je  $n$  přirozené číslo, tak platí

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

**Návod:** Nejprve pomocí integrace  $\Gamma(n + 1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$  per partes ukažte, že

$$\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a).$$

Poté stačí dokázat, že  $\Gamma(1) = 1$ .

### 5.2.2 1D Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce

Plyn, který je tvořen částicemi jednoho druhu a v němž je pohyb částic omezen pouze na jeden rozměr  $x$ , je charakterizován následující homogenní, izotropní, jednorozměrnou Maxwell-Boltzmannovou rozdělovací funkcí:

$$f(v_x) = C \cdot \exp \left[ -\frac{m v_x^2}{2kT} \right]. \quad (5.4)$$

- Určete konstantu  $C$ .
- Ze znalosti Maxwell-Boltzmannovi rozdělovací funkce rychlostí určete Maxwell-Boltzmannovu rozdělovací funkci velikosti rychlostí.
- Vypočtěte nejpravděpodobnější velikost rychlosti.
- Vypočtěte střední velikost rychlosti.
- Odvod'te vztah pro počet částic procházející jednotkovou délkou za jednotku času z jedné strany ( $\Rightarrow$  tok částic z jedné strany).

### Řešení

- Zintegrujeme rozdělovací funkci přes celý rychlostní prostor. Z podmínky, že integrál se musí rovnat koncentraci částic  $n$  dostaneme výraz pro konstantu  $C$

$$n = C \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m v_x^2}{2kT} \right] dv_x = C \sqrt{\frac{2kT\pi}{m}}. \quad (5.5)$$

$$C = n \sqrt{\frac{m}{2kT\pi}} \quad (5.6)$$

- (b) Rozdělení velikosti rychlosti částic  $F(v)$  v jednorozměrném případě získáme sumací přes oba možné směry

$$F(v) = 2n \sqrt{\frac{m}{2kT\pi}} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] \quad (5.7)$$

- (c) Z podmínky, že derivace rozdělení  $F(v)$  musí být rovna nule, dostaneme

$$0 = v \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right] \quad (5.8)$$

Nejpravděpodobnější velikost rychlost se tedy rovná nule.

- (d)

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} \quad (5.9)$$

- (e)

$$\Gamma = \int_0^{\infty} v_x f(v_x) dv_x = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \quad (5.10)$$

### 5.2.3 Dvojměrná Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce

Řešte předchozí zadání pro dvojměrnou Maxwell-Boltzmannovu rozdělovací funkci.

$$f(v_x, v_y) = C \cdot \exp\left[-\frac{m(v_x^2 + v_y^2)}{2kT}\right]. \quad (5.11)$$

Výsledky:

(a)  $C = \frac{mn}{2\pi kT}$

(b)  $F(v) = 2\pi v f(v) = \frac{nm}{kT} v \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right]$

(c) Nejpravděpodobnější rychlost  $v = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ .

(d) Střední rychlost  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{kT\pi}{2m}}$ .

(e)  $\Gamma = n \sqrt{\frac{kT}{2m\pi}}$



### 5.2.4 Trojrozměrná Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce

Řešte předchozí zadání pro trojrozměrnou Maxwell-Boltzmannovu rozdělovací funkci.

$$f(v_x, v_y, v_z) = C \cdot \exp \left[ -\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right]. \quad (5.12)$$

Výsledky:

(a)  $C = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$

(b)  $F(v) = 4\pi n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left[ -\frac{mv^2}{2kT} \right]$

(c) Nejpravděpodobnější rychlost  $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ .

(d) Střední rychlost  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ .

(e)  $\Gamma = n \sqrt{\frac{kT}{2m\pi}}$

### 5.2.5 Exotická jednorozměrná rozdělovací funkce

Plyn, který je tvořen částicemi jednoho druhu a v němž je pohyb částic omezen pouze na jeden rozměr  $x$ , je charakterizován následující homogenní, izotropní, jednorozměrnou rozdělovací funkcí (Cauchyho/Lorentzovo rozdělení):

$$f(v) = \frac{C}{v^2 + \frac{kT}{m}}. \quad (5.13)$$

Řešte stejné úkoly, jako v předchozím příkladě.

Výsledky:

(a)  $C = n \sqrt{\frac{kT}{m\pi^2}}$

(b)  $F(v) = 2n \sqrt{\frac{kT}{m\pi^2}} \frac{1}{v^2 + \frac{kT}{m}}$

(c) Nejpravděpodobnější rychlost  $v = 0$ .

(d) Střední rychlost  $v$  není definována, [1] viz Cauchyho rozdělení.

(e) Není definován.

### 5.2.6 Účinný průřez

Diferenciální účinný průřez je zadán vztahem

$$\sigma(\chi) = \frac{1}{2} \sigma_0 (3 \cos^2 \chi + 1) \quad (5.14)$$

Spočítejte celkový účinný průřez.

# Kapitola 6

## Interakce částic v plazmatu

### 6.1 Teorie

Srážky dělíme na

- *elastické, tj. pružné* - platí zákon zachování hmotnosti, hybnosti a energie takovým způsobem, že nedochází ke změnám vnitřních stavů částic, ani jejich vzniku či zániku.
- *neelastické, tj. nepružné* - probíhá změna vnitřního stavu několika, nebo všech zúčastněných částic, některé částice mohou nově vznikat, jiné zanikat. Nabitě částice mohou rekombinovat za vzniku neutrální částice. Může proběhnout záchyt nabitě částice částicí neutrální, elektrony v atomu mohou být excitovány do vyšších stavů, nebo mohou být dokonce odděleny od atomu - ionizace.

Celkový účinný průřez můžeme získat integrací  $\sigma(\chi, \varepsilon)d\Omega$  přes prostorový úhel takto:

$$\sigma_t = \int_{\Omega} \sigma(\chi, \varepsilon)d\Omega. \quad (6.1)$$

Ve speciálním případě, kdy je interakční potenciál izotropní (např. Coulombovský), dostáváme pro celkový účinný průřez:

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\chi) \sin \chi d\chi. \quad (6.2)$$

Pro stejný případ, kdy je interakční potenciál izotropní, můžeme vyjádřit účinný průřez pro přenos hybnosti ve tvaru:

$$\sigma_m = 2\pi \int_0^{\pi} (1 - \cos \chi) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi. \quad (6.3)$$

## 6.2 Příklady

### 6.2.1 Střední volná dráha iontů Xe

Účinný průřez  $\sigma$  pro elastické srážky iontů  $\text{Xe}^+$  s atomy Xe je přibližně nezávislý na jejich energii s účinným průřezem  $\sigma = 10^{-14} \text{ cm}^2$ .

A) Spočítejte střední volnou dráhu  $l$  iontů  $\text{Xe}^+$  pro elastické srážky ve slabě ionizovaném plazmatu v xenonové atmosféře při pokojové teplotě ( $20^\circ\text{C}$ ) za tlaku:

- a) 1000 Pa
- b) 10 Pa
- c) 0.1 Pa

B) Jak dlouhá doba uplyne mezi dvěma srážkami, je-li střední teplota iontů  $T = 1000 \text{ K}$ ?

**Řešení:**

A) Pro střední volnou dráhu platí

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma}.$$

Hustotu částic spočítáme ze stavové rovnice  $p = n k T$ , takže

$$\lambda = \frac{k T}{p \sigma}.$$

Po dosazení zadaných tlaků dostaneme výsledky:

- a)  $4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  b)  $4 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  c)  $4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

B) Pro tepelnou rychlost iontů platí  $v = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$ . Hmotnost iontu Xe je přibližně 131 amu ( $1 \text{ amu} = 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ). Doba mezi dvěma srážkami je rovna podílu střední volné dráhy a tepelné rychlosti:

$$\tau = \lambda \sqrt{\frac{m}{3kT}}.$$

Po dosazení dostaneme výsledky: a)  $17 \cdot 10^{-9} \text{ s}$  b)  $17 \cdot 10^{-7} \text{ s}$  c)  $17 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ .

### 6.2.2 Srážka tuhých koulí

Jaký je celkový účinný průřez pro rozptyl při srážce dvou perfektně elastických koulí o poloměrech  $R_1$  a  $R_2$ ?

$$[\pi (R_1 + R_2)^2]$$

### 6.2.3 Celkový účinný průřez

Diferenciální účinný průřez je zadán vztahem

$$\sigma(\chi) = \frac{1}{2} \sigma_0 (3 \cos^2 \chi + 1) \quad (6.4)$$

Spočítejte celkový účinný průřez a účinný průřez pro přenos hybnosti.  
[ $4 \pi \sigma_0$ ,  $4 \pi \sigma_0$ ]

## Kapitola 7

# Makroskopické transportní rovnice

### 7.1 Teorie

Z různých momentů Boltzmannovy rovnice je možno odvodit následující makroskopické transportní rovnice:

- Z podmínky zachování hmotnosti rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \mathbf{u}_\alpha) = S_\alpha, \quad (7.1)$$

kde  $\rho_{m\alpha}$  je hustota hmotnosti částic typu  $\alpha$  a  $S_\alpha$  popisuje vznik a zánik částic v důsledku srážek (ionizace, rekombinace apod.).

- Z podmínky zachování hybnosti rovnici pro přenos hybnosti

$$\rho_{m\alpha} \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \rho_{m\alpha} \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathcal{P}_\alpha + \mathbf{A}_\alpha - \mathbf{u}_\alpha S_\alpha \quad (7.2)$$

$\mathbf{u}_\alpha$  je průměrná rychlost,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla$  je operátor úplné časové derivace,  $n_\alpha$  je koncentrace částic,  $q_\alpha$  je elektrický náboj jedné částice,  $\mathbf{E}$  a  $\mathbf{B}$  jsou vektory elektrického a magnetického pole,  $\mathbf{g}$  je gravitační zrychlení,  $\mathcal{P}_\alpha$  je tenzor kinetického tlaku,

$$\mathbf{A}_\alpha = -\rho_{m\alpha} \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \quad (7.3)$$

je srážkový člen a  $\nu_{\alpha\beta}$  je srážková frekvence pro přenos hybnosti mezi částicemi  $\alpha$  a  $\beta$ . Ze zachování hybnosti během jedné srážky plyne

$$\rho_{m\alpha} \nu_{\alpha\beta} = \rho_{m\beta} \nu_{\beta\alpha}. \quad (7.4)$$

- Ze zachování energie rovnici pro přenos energie

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{3p_\alpha}{2} \right) + \frac{3p_\alpha}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + (\mathcal{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = \\ = M_\alpha - \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha, \end{aligned} \quad (7.5)$$

kde  $p_\alpha$  je skalární tlak,  $\mathbf{q}_\alpha$  je vektor tepelného toku  $M_\alpha$  je rychlost změny hustoty energie v důsledku srážek.

## 7.2 Příklady

### 7.2.1 Dohasínání

Mějme dohasínající plazma sestávající z elektronů a jednoho druhu kladných iontů s jednotkovým nábojem. Rovnice kontinuity v tomto případě je

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -k_r n_e n_i, \quad (7.6)$$

kde  $k_r$  je rychlostní konstanta pro rekombinaci. Prostorové derivace jsou nulové, protože směs je homogenní. Koncentrace elektronů v čase  $t = 0$  je  $n_0$ . Spočtete  $n_e(t > 0)$ . Nezapomeňte na podmínku kvazineutrality.

$$\left[ n_e(t) = \frac{n_0}{n_0 k_r t + 1} \right]$$

### 7.2.2 Makroskopický srážkový člen z podmínky zachování hybnosti

Uvažujte homogenní směs dvou rozdílných tekutin (prostorové derivace jsou nulové), bez působení vnějších sil, takže pohybová rovnice pro částice typu  $\alpha$  se redukuje na

$$\frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} = -\nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta). \quad (7.7)$$

Předpokládejte, že  $\rho_{m\beta} \gg \rho_{m\alpha}$  a změnu rychlosti  $\mathbf{u}_\beta$  tedy můžete zanedbat. Pověšimněte si, že v rovnovážném stavu ( $d\mathbf{u}_\alpha/dt = 0$ ) jsou rychlosti všech druhů částic stejné.

**Řešení** Situace je identická ve všech třech osách. Ukážeme tedy řešení pouze ve směru  $x$ .

$$\frac{du_{\alpha x}(t)}{dt} + \nu_{\alpha\beta} u_{\alpha x}(t) = \nu_{\alpha\beta} u_{\beta x} \quad (7.8)$$

Tuto diferenciální rovnici budeme řešit metodou variace konstanty. Nejprve najdeme partikulární řešení homogenní rovnice

$$\frac{du_{\alpha x,p}(t)}{dt} + \nu_{\alpha\beta} u_{\alpha x,p}(t) = 0, \quad (7.9)$$

což je

$$u_{\alpha x,p}(t) = C e^{-\nu_{\alpha\beta} t} \quad (7.10)$$

Nyní předpokládáme, že konstanta  $C$  závisí na čase ( $C = C(t)$ ) a spočteme derivaci

$$\frac{du_{\alpha x}(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt} e^{-\nu_{\alpha\beta} t} - C(t) \nu_{\alpha\beta} e^{-\nu_{\alpha\beta} t}. \quad (7.11)$$

Dosazením do původní rovnice (7.8) získáváme

$$\frac{dC(t)}{dt} e^{-\nu_{\alpha\beta} t} = \nu_{\alpha\beta} u_{\beta x}$$

Z čehož integrací získáme

$$C(t) = u_{\beta x} e^{\nu_{\alpha\beta} t} + K$$

kde  $K$  je libovolná integrační konstanta. Řešení je tedy

$$u_{\alpha x}(t) = u_{\beta x} + K e^{-\nu_{\alpha\beta} t} \quad (7.12)$$

A podobně pro všechny tři prostorové složky. Rychlost  $\mathbf{u}_\alpha$  se bude exponenciálně blížit k rychlosti  $\mathbf{u}_\beta$  rychlostí danou srážkovou frekvencí pro přenos hybnosti  $\nu_{\alpha\beta}$ .

### 7.2.3 Makroskopický srážkový člen z podmínky zachování hybnosti II

Řešte předchozí zadání bez zjednodušujícího předpokladu  $\mathbf{u}_\beta = \text{const.}$  V tomto případě budou rychlosti  $\mathbf{u}_\alpha$ ,  $\mathbf{u}_\beta$  popsány dvojicí diferenciálních rovnic

$$\frac{d\mathbf{u}_\alpha(t)}{dt} = -\nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha(t) - \mathbf{u}_\beta(t)). \quad (7.13)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\beta(t)}{dt} = -\frac{\rho_{m\alpha}}{\rho_{m\beta}} \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\beta(t) - \mathbf{u}_\alpha(t)), \quad (7.14)$$

kde  $\rho_{m\alpha}$ ,  $\rho_{m\beta}$  jsou hustoty částic  $\alpha$ ,  $\beta$ . Předpokládejte, že  $\mathbf{u}_\alpha$  a  $\mathbf{u}_\beta$  jsou rovnoběžné a  $u_\alpha(t=0) = 2u_\beta(t=0)$ .

(a) Spočtete časovou závislost rozdílu  $u = u_\alpha - u_\beta$ .

(b) Spočtete  $u_\alpha(t)$  a  $u_\beta(t)$ .

**Výsledky:**

$$(a) \quad u(t) = u_\alpha(0) \cdot \exp \left[ \left( 1 + \frac{\rho_{m\alpha}}{\rho_{m\beta}} \right) t \right]$$

$$(b) \quad u_\alpha(t) = \frac{u_\alpha(0)}{\rho_{m\alpha} + \rho_{m\beta}} \left( \rho_{m\beta} \cdot \exp \left[ -\nu_{\alpha\beta} \left( 1 + \frac{\rho_{m\alpha}}{\rho_{m\beta}} \right) t \right] + \rho_{m\alpha} \right)$$

$$u_\beta(t) = u(t) + u_\alpha(t)$$

### 7.2.4 Zjednodušená rovnice pro tepelný tok

Uvažte zjednodušenou rovnici tepelného toku pro stacionární elektronový plyn

$$\frac{5 p_e}{2} \nabla \left( \frac{p_e}{\rho_{me}} \right) + \Omega_{ce} (\mathbf{q}_e \times \mathbf{B}) = \left( \frac{\delta \mathbf{q}_e}{\delta t} \right)_{\text{coll}}. \quad (7.15)$$

Předpokládejte srážkový člen daný relaxačním modelem

$$\left( \frac{\delta \mathbf{q}_e}{\delta t} \right)_{\text{coll}} = -\nu (f_e - f_{e0}) \quad (7.16)$$

a stavovou rovnicí ideálního plynu  $p_e = n_e k T_e$ . Ukažte, že rovnice tepelného toku se dá napsat jako

$$\frac{\Omega_{ce}}{\nu} (\mathbf{q}_e \times \mathbf{B}) = -K_0 \nabla T_e + (f_e - f_{e0}), \quad (7.17)$$

kde

$$K_0 = \frac{5 k p_e}{2 m_e \nu} \quad (7.18)$$

je tepelná vodivost.



## Kapitola 8

# Makroskopické rovnice pro vodivou tekutinu

### 8.1 Teorie

Rovnice, podle nichž se řídí důležité fyzikální veličiny v plazmatu, můžeme získat sčítáním rovnic pro jednotlivé druhy částic. Po uplatnění několika zjednodušujících předpokladů obdržíme tzv. magnetohydrodynamické (MHD) rovnice:

- Rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \quad (8.1)$$

- Rovnici pro hybnost

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (8.2)$$

- Zobecněný Ohmův zákon

$$\mathbf{J} = \sigma_0(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\sigma_0}{n e} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (8.3)$$

Elektrické a magnetické pole jsou navíc svázány Maxwellovými rovnicemi. Ve zde uvedených MHD rovnicích se zanedbává viskozita a tepelná vodivost.

### 8.2 Příklady

#### 8.2.1 Hustota elektrického proudu

Průměrná driftová rychlost plazmatu je definována jako vážený průměr driftových rychlostí jeho jednotlivých složek

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha} \frac{\rho_{m\alpha}}{\rho_m} \mathbf{u}_{\alpha} \quad (8.4)$$

kde  $\rho_m$  je celková hustota plazmatu. Každá složka plazmatu má svoji koncentraci  $n_\alpha$ , náboj  $q_\alpha$  a tzv. difúzní rychlost  $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}$ . Spočtete celkovou hustotu elektrického proudu  $\mathbf{J}$  a vyjádřete ji pomocí celkové hustoty elektrického náboje  $\rho$ , hustot jednotlivých složek a jejich difúzních rychlostí. Všimněte si, že v důsledku definice průměrné driftové rychlosti plazmatu je výsledek o něco složitější než  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u}$ .

$$\left[ \mathbf{J} = \rho \mathbf{u} + \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \right]$$

### 8.2.2 Plně ionizované plazma

Z rovnic pro hustotu elektrického proudu v plně ionizovaném plazmatu sestávajícího z elektronů a kladných iontů s nábojem  $e$

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \quad (8.5)$$

a z rovnice pro průměrnou driftovou rychlost plazmatu

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_m} (\rho_{me} \mathbf{u}_e + \rho_{mi} \mathbf{u}_i) \quad (8.6)$$

odvoďte vztahy pro driftové rychlosti  $\mathbf{u}_i$  a  $\mathbf{u}_e$ .

$$\left[ \mathbf{u}_i = \frac{\mu}{\rho_{mi}} \left( \frac{\rho_m \mathbf{u}}{m_e} + \frac{\mathbf{J}}{e} \right), \quad \mathbf{u}_e = \frac{\mu}{\rho_{me}} \left( \frac{\rho_m \mathbf{u}}{m_i} - \frac{\mathbf{J}}{e} \right), \quad \mu = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} \right]$$

### 8.2.3 Difúze kolmo na siločáry magnetického pole

Z rovnice pro zachování hybnosti pro MHD přiblížení

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (8.7)$$

A zobecněného Ohmova zákona ve zjednodušeném tvaru a se zanedbáním členu pro Hallův jev

$$\mathbf{J} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (8.8)$$

Odvoďte rovnici pro rychlost tekutiny  $\mathbf{u}$ .

Předpokládejte  $E = 0$  a  $p = \text{konst.}$  a spočtete složku rychlosti kolmou na magnetické pole  $\mathbf{B}$ .

**Řešení** Rovnice pro  $\mathbf{u}$  je

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \sigma_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \sigma_0 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p. \quad (8.9)$$

Předpokládáme-li  $E = 0$  a  $p = \text{konst.}$ , rovnice se redukuje na

$$\rho_m \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \sigma_0 (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (8.10)$$

## KAPITOLA 8. MAKROSKOPICKÉ ROVNICE PRO VODIVOU TEKUTINU 34

Abychom mohli spočítat vektor  $(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ , definujme souřadnicový systém tak, že osa  $z$  je rovnoběžná s magnetickým polem. V těchto souřadnicích vektorový součin vychází takto:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (-u_x B^2, -u_y B^2, 0). \quad (8.11)$$

Rovnice pro  $x$ -ovou a  $y$ -ovou složku rychlosti mají tedy stejný tvar. Píšeme tedy pouze rovnici pro  $u_x$

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{-\sigma_0 B^2}{\rho_m} u_x, \quad (8.12)$$

jejímž řešením je

$$u_x(t) = u_x(0) \exp\left(-\frac{\sigma_0 B^2}{\rho_m} t\right). \quad (8.13)$$

Podobně pro  $u_y$ , takže časová závislost složky kolmé na magnetické pole  $u_\perp = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  je

$$u_\perp(t) = u_\perp(0) \exp(-t/\tau), \quad (8.14)$$

kde

$$\tau = \frac{\rho_m}{\sigma_0 B^2} \quad (8.15)$$

je doba charakteristická pro difúzi kolmo na siločáry magnetického pole.

## Kapitola 9

# Vodivost plazmatu a difúze

### 9.1 Teorie

Ve slabě ionizovaném chladném plazmatu má pohybová rovnice pro elektrony formu tzv. Langevinovy rovnice

$$m_e \frac{D\mathbf{u}_e}{Dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nu_c m_e \mathbf{u}_e, \quad (9.1)$$

kde  $\nu_c$  je srážková frekvence pro přenos hybnosti mezi elektrony a těžkými částicemi.

Není-li přítomno vnější magnetické pole, je hustota elektrického proudu tvořená pohybujícími se elektrony

$$\mathbf{J} = -e n_e \mathbf{u}_e \quad (9.2)$$

a stejnosměrná vodivost

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c} \quad (9.3)$$

a pohyblivost elektronů

$$\mathcal{M}_e = -\frac{e}{m_e \nu_c} = -\frac{\sigma_0}{n_e e}. \quad (9.4)$$

Je-li přítomno vnější magnetické pole, plazma přestává být izotropním a stejnosměrná vodivost a pohyblivost elektronů musí být popsány pomocí tenzorů (vizte příklad 9.2.2).

Ve slabě ionizovaném plazmatu s relativně vysokou koncentrací neutrálních částic má difúzní rovnice pro nabitě částice  $\alpha$  následující tvar

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = D \nabla^2 n_\alpha. \quad (9.5)$$

Koeficient  $D_e$  volné difúze elektronů v izotropním plazmatu bez přítomnosti interního elektrického pole je

$$D_e = \frac{k T_e}{m_e \nu_c}. \quad (9.6)$$

V plazmatu za přítomnosti vnějšího magnetického pole je  $D_e$  dán tenzorem, podobně jako stejnosměrná vodivost a pohyblivost elektronů.

Elektrony v plazmatu obvykle difundují rychleji než ionty, protože mají mnohem nižší hmotnost a vyšší pohyblivost. Následkem toho se v plazmatu vytváří vnitřní elektrické pole, které zpomaluje difúzi elektronů a urychluje difúzi iontů. Tento jev se nazývá ambipolární difúze.

Je-li vztah mezi koncentracemi iontů  $n_i$  a elektronů  $n_e$

$$n_i = C n_e \quad (9.7)$$

kde  $C$  je konstanta, pak pro koeficient ambipolární difúze  $D_a$  platí

$$D_a = \frac{k(T_e + C T_i)}{m_e \nu_{ce} + C m_i \nu_{ci}}, \quad (9.8)$$

kde  $\nu_{ci}$ ,  $\nu_{ce}$  jsou srážkové frekvence pro přenos hybnosti mezi neutrálními částicemi a ionty/elektrony.

## 9.2 Příklady

### 9.2.1 Stejnosměrná vodivost plazmatu

Odvoďte vztah pro stejnosměrnou vodivost plazmatu z Langevinovy rovnice pro ustálený stav bez přítomnosti magnetického pole

$$-e \mathbf{E} - m_e \nu_c \mathbf{u}_e = 0. \quad (9.9)$$

**Řešení** Hustota elektrického proudu je definována jako

$$\mathbf{J} = -e n_e \mathbf{u}_e \quad (9.10)$$

Dosadíme-li toto do Langevinovy rovnice (9.9), dostaneme výraz pro hustotu elektrického proudu  $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c} \mathbf{E} \quad (9.11)$$

Ohmův zákon má tvar

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E} \quad (9.12)$$

a stejnosměrná vodivost je dána následujícím vztahem

$$\sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c}. \quad (9.13)$$

### 9.2.2 Tenzor pohyblivosti elektronů v plazmatu za přítomnosti magnetického pole

V přítomnosti magnetického pole má Ohmův zákon tvar

$$\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E} \quad (9.14)$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\perp} & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

kde pro jednotlivé složky tenzoru stejnosměrné vodivosti  $\mathcal{S}$  platí

$$\sigma_{\perp} = \frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2} \sigma_0 \quad (9.15)$$

$$\sigma_H = \frac{\nu_c \Omega_{ce}}{\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2} \sigma_0 \quad (9.16)$$

$$\sigma_{\parallel} = \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c}, \quad (9.17)$$

kde  $\Omega_{ce}$  je elektronová cyklotronová frekvence dána vnějším magnetickým polem. Určete složky tenzoru pohyblivosti elektronů  $\mathcal{M}_e$  definovaného jako

$$\mathbf{u}_e = \mathcal{M}_e \cdot \mathbf{E}. \quad (9.18)$$

**Výsledky:**

$$\mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\perp} & -\mathcal{M}_H & 0 \\ \mathcal{M}_H & \mathcal{M}_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{\parallel} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\perp} = -\frac{\nu_c e}{m_e (\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \quad (9.19)$$

$$\mathcal{M}_H = -\frac{\Omega_{ce} e}{m_e (\nu_c^2 + \Omega_{ce}^2)} \quad (9.20)$$

$$\mathcal{M}_{\parallel} = -\frac{e}{m_e \nu_c} \quad (9.21)$$

### 9.2.3 Ohmův zákon v přítomnosti magnetického pole

Uvažte rovnici  $\mathbf{J} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{E}$  jako v předchozím příkladu. Předpokládejte, že  $\mathbf{E} = (E_{\perp}, 0, E_{\parallel})$  a  $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ . Spočítejte  $\mathbf{J}$ . Všimněte si, že proud teče i ve směru  $y$ , kam nemíří žádné pole.

$$[\mathbf{J} = (\sigma_{\perp} E_{\perp}, \sigma_H E_{\perp}, \sigma_{\parallel} E_{\parallel})]$$

### 9.2.4 Difúzní rovnice

Řešte jednorozměrnou difúzní rovnici

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \quad (9.22)$$

separací proměnných. Předpokládejte

$$n(x, t) = S(x) T(t). \quad (9.23)$$

**Výsledky:**

- $T_k(t) = T_0 \exp(-D k^2 t)$
- $S(x) = c(k) \exp(i k x)$ ,  $k$  je separační konstanta
- $n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) \exp(-i k x - D k^2 t) dk$

## Kapitola 10

# Některé základní jevy v plazmatu

### 10.1 Teorie

Americký chemik a fyzik Irving Langmuir v článku z roku 1923 píše, že elektrony jsou odpuzovány od negativní elektrody, zatímco pozitivní ionty jsou přitahovány směrem k ní. Langmuir z toho vyvozuje, že okolo každé negativní elektrody je vrstva (sheath) dané tloušťky obsahující pouze kladné ionty a neutrální atomy. Dále si Langmuir všimá, že i skleněná stěna výbojové trubice se záporně nabíjí a odpuzuje (nebo odráží) téměř všechny elektrony, které se k ní pohybují [17].

Fakt, že se izolované předměty vložené do plazmatu nabíjí na (vzhledem k plazmatu) záporný tzv. plovoucí potenciál, vysvětlujeme tím, že se elektrony pohybují mnohem rychleji než ionty. Tepelná rychlost elektronů  $(k_B T_e / m_e)^{1/2}$  je nejméně stokrát vyšší než tepelná rychlost iontů  $(k_B T_i / M_i)^{1/2}$  [18]. Prvním důvodem rozdílných rychlostí iontů a elektronů je větší hmotnost iontů. Pokud uvažujeme samotný proton (tedy nejlehčí kladný iont, který se v plazmatu může vyskytovat), pak poměr hmotností protonu a elektronu  $m_p / m_e$  je 1836. Tento poměr přibližně odpovídá poměru hmotností těžké bowlingové koule (5 kg) a pingpongového míčku (2,7 gramů). Druhým důvodem větší tepelné rychlosti elektronů v nízkoteplotním plazmatu je jejich výrazně vyšší teplota oproti iontům.

Nejmenší možnou rychlost iontů při vstupu do sheathu nazýváme Bohmovou rychlostí  $u_B$ . Ionty jsou urychlovány v kvazineutrálním presheathu, v kterém na ně působí slabé elektrické pole. Toto Bohmovo kritérium stěnové vrstvy popisuje následující rovnice

$$u_s(0) \geq u_B = \sqrt{\frac{k_B T_e}{M_i}} . \quad (10.1)$$



## 10.2 Příklady

### 10.2.1 Šíření vln v nemagnetizovaném plazmatu

Uvažujte rádiové vlny, které se odráží od tzv. E vrstvy ionosféry. Tato vrstva má koncentraci elektronů  $10^5 \text{ cm}^{-3}$  a je ve výšce okolo 100 km.

- Jaké elektromagnetické vlny se mohou odrážet od této vrstvy?
- Spočtete dielektrickou konstantu plazmatu pro vlny o frekvenci 100 Mhz a 1000 Hz.
- Spočtete hloubku vniku (skin depth) vlny o frekvenci 1000 Hz.

**Řešení:**

- Odráží se všechny vlny s frekvencí menší, než je plazmová frekvence (2 839 725 Hz).

- Dielektrická konstanta je definována

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Pro 100 MHz  $\varepsilon = 0.9991$  (kladná hodnota, elmag. vlna se šíří), pro 1000 Hz  $\varepsilon = -8064037$  (záporná hodnota, imaginární index lomu, odraz).

- Hloubka vniku  $\delta$  je přibližně  $c/\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$ , kde  $c$  je rychlost světla. Po dosazení hodnot pro 1000 Hz vychází hloubka vniku 16.8 m.

### 10.2.2 Plovoucí potenciál

Vysvětlete, proč izolovaný objekt vložený do plazmatu získává záporný potenciál vzhledem k plazmatu.

### 10.2.3 Bohmova rychlost

Spočtete Bohmovu rychlost pro iont vodíku v plazmatu s teplotou elektronů  $T_e = 1 \text{ eV}$ .

[9787.2 m/s]

### 10.2.4 Plazmová frekvence

Pokud je makroskopická neutralita plazmatu z vnějšku narušena, elektrony se chovají takovým způsobem, že dají vzniknout oscilacím o elektronové plazmové frekvenci. Uvažujte tyto oscilace, ale do výpočtu zahrňte také pohyb iontů. Odpod'te přirozenou frekvenci těchto oscilací prostorově rozloženého náboje v tomto případě. Využijte linearizovanou rovnici kontinuity a hybnosti a Poissonovu rovnici, za předpokladu působení elektrické síly díky

vnitřní separaci náboje.

$$[\omega = (\omega_e^2 + \omega_i^2)^{1/2}, \text{ where } \omega_i = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 M_i}}]$$

# Kapitola 11

## Boltzmannův srážkový člen

### 11.1 Teorie

Předpokládáme-li homogenní a izotropní rozdělovací funkci rychlosti elektronů a molekulární chaos, uvažujeme-li jen dvojně srážky a zanedbáme-li působení vnějších sil, můžeme odvodit tzv. Boltzmannův srážkový člen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \iint g \sigma(g, \Omega) [f_e(\mathbf{v}') f_1(\mathbf{v}'_1) - f_e(\mathbf{v}) f_1(\mathbf{v}_1)] d\Omega d^3\mathbf{v}. \quad (11.1)$$

$g = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|$  je velikost relativní rychlosti elektronu a částice, s níž se sráží,  $\sigma(g, \Omega)$  je diferenciální účinný průřez pro tento druh srážky. Vystupují zde dvě různé rozdělovací funkce – elektronová  $f_e(\mathbf{v})$  a rozdělení rychlosti toho druhu částic, který uvažujeme,  $f_1(\mathbf{v}_1)$ . Je-li třeba započítat srážky s několika druhy částic, má srážkový člen podobu součtu členů stejného typu, jako rovnice (11.1).

První člen rozdílu popisuje množství elektronů s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}'$ , které se sráží s částicí o rychlosti  $\mathbf{v}'_1$ . Po srážce mají elektrony rychlost  $\mathbf{v}$  a jejich srážkoví partneři mají rychlost  $\mathbf{v}_1$ , jedná se tedy o přírůstek rozdělovací funkce elektronů v oblasti rychlosti  $\mathbf{v}$ . Druhý člen popisuje inverzní srážky, které vedou ke úbytku elektronů o rychlosti  $\mathbf{v}$ , proto je záporný.

Uvažujeme-li jen srážky vedoucí k malým odchylkám, což je rozumný předpoklad pro Coulombovské interakce, můžeme odvodit tzv. Fokker-Planckův srážkový člen.

$$\left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t}\right)_{\text{coll}} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial v_i} (f_\alpha \langle \Delta v_i \rangle_{av}) + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (f_\alpha \langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av}), \quad (11.2)$$

kde

$$\langle \Delta v_i \rangle_{av} = \int_{\Omega} \int_{v_1} \Delta v_i g \sigma(\Omega) d\Omega f_{\beta 1} d^3 v_1 \quad (11.3)$$

$$\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle_{av} = \int_{\Omega} \int_{v_1} \Delta v_i \Delta v_j g \sigma(\Omega) d\Omega f_{\beta 1} d^3 v_1 \quad (11.4)$$

jsou koeficienty dynamického tření a difúze v rychlostním prostoru.

## 11.2 Příklady

### 11.2.1 Srážky, Maxwell-Boltzmannova rozdělovací funkce

Uvažujme plazma, v němž jsou elektrony a ionty charakterizovány rozdělovacími funkcemi  $f_e, f_i$ :

$$f_e = n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_e(\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2}{2k T_e} \right] \quad (11.5)$$

$$f_i = n_0 \left( \frac{m_i}{2\pi k T_i} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_i(\mathbf{v} - \mathbf{u}_i)^2}{2k T_i} \right] \quad (11.6)$$

- (a) Spočítejte rozdíl  $(f_e(\mathbf{v}') f_i(\mathbf{v}'_1) - f_e(\mathbf{v}) f_i(\mathbf{v}_1))$ .
- (b) Ukažte, že toto plazma sestávající z elektronů a iontů bude v rovnovážném stavu, tj. rozdíl  $(f_e(\mathbf{v}') f_i(\mathbf{v}'_1) - f_e(\mathbf{v}) f_i(\mathbf{v}_1))$  bude roven nule právě tehdy, když  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$  a  $T_e = T_i$ .

### Řešení

(a)

$$\begin{aligned} (f_e(\mathbf{v}') f_i(\mathbf{v}'_1) - f_e(\mathbf{v}) f_i(\mathbf{v}_1)) &= n_0^2 \left( \frac{1}{2\pi k} \right)^3 \left( \frac{m_e m_i}{T_e T_i} \right)^{3/2} \times \\ &\times \left( \exp \left[ -\frac{m_e(\mathbf{v}' - \mathbf{u}_e)^2}{2k T_e} - \frac{m_i(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{u}_i)^2}{2k T_i} \right] - \right. \\ &\left. - \exp \left[ -\frac{m_e(\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^2}{2k T_e} - \frac{m_i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_i)^2}{2k T_i} \right] \right) \end{aligned} \quad (11.7)$$

- (b) Uzávorkovaná část musí být rovna nule. To nastane tehdy, když si argumenty exponenciálních funkcí budou rovny. Po úpravě a s vypuštěním společného faktoru  $-(2k)^{-1}$  můžeme tyto argumenty napsat jako:

$$\frac{m_e}{T_e} (v'^2 - 2\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}_e + u_e^2) + \frac{m_i}{T_i} (v_1'^2 - 2\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{u}_i + u_i^2) \quad (11.8)$$

$$\frac{m_e}{T_e} (v^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_e + u_e^2) + \frac{m_i}{T_i} (v_1^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_i + u_i^2) \quad (11.9)$$

Při odvozování Boltzmannova srážkového členu jsou  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$  brány jako rychlosti před a po dvojně pružné srážce. Jsou tedy svázány zákony zachování kinetické energie a hybnosti:

$$\frac{m_e v^2 + m_i v_1^2}{2} = \frac{m_e v'^2 + m_i v_1'^2}{2} \quad (11.10)$$

$$m_e \mathbf{v} + m_i \mathbf{v}_1 = m_e \mathbf{v}' + m_i \mathbf{v}'_1 \quad (11.11)$$

Z posledních čtyř vztahů je zřejmé, že srážkový člen bude roven nule právě tehdy, když  $T_e = T_i$  a  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$ . Jinými slovy, rozdělovací funkce  $f_e$  se bude v důsledku srážek měnit pouze tehdy, když plazma nebude v rovnovážném stavu. Srážkové procesy tedy vedou k tomu, že plazma se dostává do rovnováhy.

### 11.2.2 Srážky pro rozdílné rozdělovací funkce

Řešte část (a) předchozího zadání pro elektronovou rozdělovací funkci Druyvesteynova typu a Maxwell-Boltzmannovské rozdělení rychlostí iontů ( $C_e$ ,  $a_e$  and  $C_i$  jsou konstanty)

$$f_e = C_e \exp[-a_e m_e^2 (\mathbf{v} - \mathbf{u}_e)^4] \quad (11.12)$$

$$f_i = C_i \exp\left[-\frac{m_i (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{u}_i)^2}{2 k T_i}\right] \quad (11.13)$$

Bude rozdíl  $(f_e(\mathbf{v}') f_i(\mathbf{v}'_1) - f_e(\mathbf{v}) f_i(\mathbf{v}_1))$  roven nule pro  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$ ?

### 11.2.3 Srážky pro Druyvesteynovo rozdělení

Řešte předchozí zadání s rozdělením Druyvesteynova typu (vizte 11.12) pro elektrony i ionty. Může se srážkový člen rovnat nule pro  $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$ ? Je možné najít rovnovážný stav plazmatu popsaného Boltzmannovou kinetickou rovnicí s Boltzmannovým srážkovým členem popsaný rozdělovací funkcí Druyvesteynova typu?

# Literatura

- [1] Cauchy distribution. [http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy_distribution). Accessed: 2013-04-10.
- [2] Msis-e-90 atmosphere model. [http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/msis\\_vitmo.html](http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/msis_vitmo.html). Accessed: 2013-08-15.
- [3] B Bachmann, R Kozakov, G Gött, K Ekkert, J-P Bachmann, J-L Marques, H Schöpp, D Uhrlandt, and J Schein. Power dissipation, gas temperatures and electron densities of cold atmospheric pressure helium and argon rf plasma jets. *Plasma Sources Science and Technology*, 46(12):125203, 2013.
- [4] José A Bittencourt. *Fundamentals of plasma physics*. Springer, 2004.
- [5] B Bora, H Bhuyan, M Favre, E Wyndham, and H Chuaqui. Diagnostic of capacitively coupled low pressure radio frequency plasma: An approach through electrical discharge characteristic.
- [6] L Campbell and MJ Brunger. Modelling of plasma processes in cometary and planetary atmospheres. *Plasma Sources Science and Technology*, 22(1):013002, 2012.
- [7] Guangsup Cho and John V Verboncoeur. Plasma wave propagation with light emission in a long positive column discharge.
- [8] Eun Ha Choi, Jeong Chull Ahn, Min Wook Moon, Jin Goo Kim, Myung Chul Choi, Choon Gon Ryu, Sung Hyuk Choi, Tae Seung Cho, Yoon Jung, Guang Sup Cho, et al. Electron temperature and plasma density in surface-discharged alternating-current plasma display panels. *Plasma Science, IEEE Transactions on*, 30(6):2160–2164, 2002.
- [9] P Debye and E Hückel. De la theorie des electrolytes. i. abaissement du point de congelation et phenomenes associes. *Physikalische Zeitschrift*, 24(9):185–206, 1923.
- [10] Richard Fitzpatrick. Introduction to plasma physics. *The University of Texas at Austin: sn*, page 242, 2008.

- [11] S Hofmann, AFH van Gessel, T Verreycken, and P Bruggeman. Power dissipation, gas temperatures and electron densities of cold atmospheric pressure helium and argon rf plasma jets. *Plasma Sources Science and Technology*, 20(6):065010, 2011.
- [12] J Hubert, M Moisan, and A Ricard. A new microwave plasma at atmospheric pressure. *Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy*, 34(1):1–10, 1979.
- [13] Zdeněk Hubička. The low temperature plasma jet sputtering systems applied for the deposition of thin films. 2012.
- [14] Umran S Inan and Marek Gołkowski. *Principles of plasma physics for engineers and scientists*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] Jae Duk Kim, Young Ho Na, Young June Hong, Han Sup Uhm, Eun Ha Choi, et al. Microwave plasma jet system development at atmospheric pressure using a 2.45 ghz gan hemt devices. In *Plasma Science (ICOPS), 2011 Abstracts IEEE International Conference on*, pages 1–1. IEEE, 2011.
- [16] SB Krupanidhi and M Sayer. Position and pressure effects in rf magnetron reactive sputter deposition of piezoelectric zinc oxide. *Journal of applied physics*, 56(11):3308–3318, 1984.
- [17] I. Langmuir. Positive Ion Currents from the Positive Column of Mercury Arcs. *Science*, 58:290–291, October 1923.
- [18] M.A. Lieberman and A.J. Lichtenberg. Principles of plasma discharges and materials processing. *Published by A Wiley-Interscience Publication*, page 388, 1994.
- [19] Liming Liu, Ruisheng Huang, Gang Song, and Xinfeng Hao. Behavior and spectrum analysis of welding arc in low-power yag-laser-mag hybrid-welding process. *Plasma Science, IEEE Transactions on*, 36(4):1937–1943, 2008.
- [20] Yasuyuki Noguchi, Akira Matsuoka, Kiichiro Uchino, and Katsunori Muraoka. Direct measurement of electron density and temperature distributions in a micro-discharge plasma for a plasma display panel. *Journal of applied physics*, 91(2):613–616, 2002.
- [21] Kunio Okimura, Akira Shibata, Naohiro Maeda, Kunihide Tachibana, Youichiro Noguchi, and Kouzou Tsuchida. Preparation of rutile tio2 films by rf magnetron sputtering. *JAPANESE JOURNAL OF APPLIED PHYSICS PART 1 REGULAR PAPERS SHORT NOTES AND REVIEW PAPERS*, 34:4950–4950, 1995.

- [22] Cheng-gang PAN, Xue-ming HUA, Wang ZHANG, Fang LI, and Xiao XIAO. Calculating the stark broadening of welding arc spectra by fourier transform method. 32(7), 2012.
- [23] Shahid Rauf and Mark J Kushner. Optimization of a plasma display panel cell. In *APS Annual Gaseous Electronics Meeting Abstracts*, volume 1, 1998.
- [24] P Sigurjonsson and JT Gudmundsson. Plasma parameters in a planar dc magnetron sputtering discharge of argon and krypton. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 100, page 062018. IOP Publishing, 2008.
- [25] Žemlička R. In situ studium růstu a leptání tenkých vrstev v nízkotlakých vysokofrekvenčních kapacitně vázaných výbojích. 2012.