Domácí úloha z 29. listopadu 2013 (odevzdává se 6. prosince)

1. Řešte následující soustavu rovnic v $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 9 + 3xyz, \\ x + y + z &= 3, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 5. \end{aligned}$$

2. Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ označme

$$p_i = x_1^i + x_2^i + \cdots + x_n^i \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n].$$

Nechť dále $s_1, \ldots, s_n$ značí elementární symetrické polynomy n proměnných, doplňme tuto definici předpisem $s_0 = 1$ a $s_i = 0$ pro $i > n$. Dokažte, že platí Newtonův vzorec

$$\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j s_j p_{i-j} = (-1)^{i-1} i s_i \qquad \text{pro každé } i \in \mathbb{N},$$

neboli

$$\begin{aligned} p_1 &= s_1, \\ p_2 - s_1 p_1 &= -2s_2, \\ p_3 - s_1 p_2 + s_2 p_1 &= 3s_3, \\ &\vdots \\ p_i - s_1 p_{i-1} + s_2 p_{i-2} - \cdots + (-1)^{i-1} s_{i-1} p_1 &= (-1)^{i-1} i s_i, \\ &\vdots \end{aligned}$$

[Návod:

1. Přestože na levé straně třetí rovnice není symetrický polynom tří proměnných, pomocí symetrických polynomů z prvních dvou rovnic vypočtěte $x^2 + y^2 + z^2$ a výsledek porovnejte se třetí rovnicí.

2. Vysvětlete, proč pro každý člen $x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n}$, který se vyskytuje v některém ze sčítanců Newtonova vzorce s nenulovým koeficientem, platí, že $e_1 + \cdots + e_n = i$ a že nejvýše jeden index j splňuje $e_j > 1$. Nakonec porovnejte koeficienty takovýchto členů na obou stranách Newtonova vzorce.]