Domácí úloha ze dne 18. října 2013 (odevzdává se 25. října)

Nechť $\varphi : R \to S$ je surjektivní homomorfismus okruhů. Nechť $\mathcal{I}_S$ značí množinu všech ideálů okruhu S a $\mathcal{I}_{R,\varphi}$ značí množinu všech ideálů I okruhu R splňujících $\ker \varphi \subseteq I$.

- Vysvětlete, proč $(\mathcal{I}_{R,\varphi}, \subseteq)$ a $(\mathcal{I}_S, \subseteq)$ jsou úplné svazy.
- Dokažte, že tyto svazy jsou izomorfní.

[Návod: O tom, že $(\mathcal{I}_S, \subseteq)$ je úplný svaz, jsme si povídali na přednášce. Zmiňte větu, ze které to snadno plyne. Analogicky odvoďte, že i $(\mathcal{I}_{R,\varphi}, \subseteq)$ je úplný svaz.

Ukažte, že předpis $\Phi(I) = \varphi(I)$ definuje zobrazení $\Phi : \mathcal{I}_{R,\varphi} \to \mathcal{I}_S$ a předpis $\Psi(J) = \varphi^{-1}(J)$ definuje zobrazení $\Psi : \mathcal{I}_S \to \mathcal{I}_{R,\varphi}$ (můžete použít nějakou větu z přednášky, najdete-li vhodnou). Dokažte, že Φ a Ψ jsou izotonní zobrazení splňující, že $\Phi \circ \Psi$ a $\Psi \circ \Phi$ jsou identity na příslušných množinách. S odvoláním na vhodnou větu z teorie svazů vysvětlete, že z toho plyne požadované.]