CVIČENÍ LINEÁRNÍ STATISTICKÉ MODELY I – PODZIM 2013 – ZADÁNÍ 1. SÉRIE ÚLOH

Příklad 1. *(volně dle [1])*
Cestu z univerzity na letiště je možné uskutečnit dvěma trasami. Obě trasy byly dosud použity čtyřikrát, tabulka uvádí zjištěné dojezdové časy v minutách:

trasa X	X_i	34,5	35,0	34,0	34,5
trasa Y	Y_i	33,0	32,0	19,0	34,0

Dojezdové časy obou tras považujte za náhodné veličiny s normálním rozdělením. Současný host se potřebuje dostat na letiště do 35 minut. Pokuste se mu doporučit jednu z tras, a to na základě dvou různých přístupů:

(a) Proveďte test hypotézy, že trasy mají stejné střední dojezdové doby, proti alternativě, že jedna (která?) trasa je v průměru rychlejší. Uveďte nulovou a alternativní hypotézu, testovací statistiku a počet stupňů volnosti, její hodnotu a hodnotu potřebného kvantilu. Uvažujte hladinu významnosti $\alpha = 5\,\%$. *(Pozor! Nezapomeňte na kontrolu rozptylů a správnou volbu testovací statistiky!)*

(b) Pro každou trasu odhadněte (využijte přitom normality) pravděpodobnost, že jednotlivá cesta na letiště bude trvat 35 minut nebo méně. Kterou trasu byste hostu doporučili tímto přístupem?

Příklad 2.
Uvažujte trojici stochasticky nezávislých náhodných veličin X_1, X_2, X_3 se standardizovaným normálním rozdělením. Pomocí vhodné transformace náhodného vektoru $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ spočítejte následující číselné charakteristiky:

(a) $\mathrm{E}(X_1 + X_2 - 2X_3)$
(b) $\mathrm{D}(X_1 + X_2 - 2X_3)$
(c) $\mathrm{R}(X_1 + X_2 - 2X_3,\ X_1 + X_2 + X_3)$
(d) $\mathrm{E}\big[(X_1 + X_2 - 2X_3)^2 - 2(X_1 + X_2 + X_3)(X_1 - X_2)\big]$

Příklad 3.
Uvažujte náhodný výběr $(X_1, \dots, X_n)'$ z rozdělení pravděpodobnosti s hustotou závisející na parametru $s > 0$:

$$f(x; s) = C\,\mathrm{e}^{-2s|x|},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

(a) dopočítejte konstantu C tak, aby $f(x; s)$ byla hustotou pravděpodobnosti
(b) odvoďte maximálně věrohodný odhad parametru s
(c) odvoďte momentový odhad parametru s *(Musíte spočítat jeden z momentů, který bude obsahovat parametr s.)*
(d) oba odhady pak vyčíslete pro konkrétní náhodný výběr $(2, -1, 0, 1, 0, -1)'$

(e) nepovinná část k zamyšlení: Uvažujte jiný tvar hustoty závisející na parametru $\theta \in \mathbb{R}$:

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x-\theta|},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Nalezněte (navrhněte) maximálně věrohodný odhad parametru θ, vysvětlete svoji myšlenku. *(Klasický přístup přes nalezení stacionárního bodu log-věrohodnostní funkce tu nebude úspěšný, uvědomte si proč. Pro nalezení maxima log-věrohodnostní funkce, a tedy odvození hledaného odhadu, může pomoci geometrická úvaha, např. vyzkoušením na náhodných výběrech malých rozsahů a zobecněním myšlenky.)*

---

[1] Anděl, Jiří. *Matematika náhody.* MATFYZPRESS, Praha, 2007.