evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Spojité deterministické modely I

Tento učební text vznikl za přispění Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR prostřednictvím Operačního programu Vzdělávání pro konkurenceschopnost v rámci projektu Univerzitní výuka matematiky v měnícím se světě (CZ.1.07/2.2.00/15.0203).

Text vznikal v podzimním semestru 2011 jako elektronický učební materiál k předmětu M5858, který je inovován v rámci tohoto projektu. V letech 2012–13 byl text rozšiřován a upravován.

Prosinec 2013 Zdeněk Pospíšil

Obsah

Následující text nemůže být považován za základní zdroj nahrazující standardní učební texty, z něhož by bylo možné se naučit problematice obyčejných diferenciálních rovnic a jejich aplikací. Představuje pouze podrobnou osnovu předmětu M5858 nebo poznámky z přednášky; sám o sobě bez komentářů během přednášky je málo srozumitelný až nesrozumitelný (aby byl s komentáři srozumitelný, je mým přáním a bude mou snahou).

V současnosti se stále jedná o polotovar; určitě obsahuje i nějaké nedůslednosti, formulační nedostatky, překlepy nebo dokonce chyby. Budu vděčný každému, kdo mě na ně upozorní.

Jako základní studijní k předmětu M5858 lze používat:

1. J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001 (druhé vydání), 212 stran.
   Teorie obyčejných diferenciálních rovnic probraná důkladněji, než je v sylabu předmětu M5858.

2. J. Diblík, M. Růžičková: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* EDIS, 2008.
   Úvod do studia základů teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Podrobně jsou probírány zejména lineární rovnice a systémy.

3. J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii.* MU, Brno 2001, 265 stran.
   Doplňky k teorii autonomních systémů, aplikace diferenciálních rovnic především v populační dynamice a teorii šíření epidemií.

4. M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MU, Brno 1998, 96 stran.
   Popis některých elementárních metod řešení explicitních obyčejných diferenciálních rovnic.

5. R. Plch: *Příklady z matematické analýzy. Diferenciální rovnice.* MU, Brno 1995, 29 stran.
   Sbírka úloh z elementárních metod řešení explicitních i implicitních obyčejných diferenciálních rovnic. Je doplněna stručným popisem potřebných metod.

Jako doplňující literaturu lze doporučit

- P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney, 1964.
  Klasická monografie o teorii obyčejných diferenciálních rovnic.

- J. Kaucký: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1952.
  Popis elementárních metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic, je obsáhlejší než skripta 4

- E. Kamke: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Band I, Gewöhliche Differentialgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1951.
  Důkladná příručka všech rovnic řešitelných elementárními metodami.

- P. N. V. Tu; *Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology.* Springer, 1995.
  Monografie o dynamických systémech (autonomní diferenciální a diferenční rovnice) s aplikacemi.

- N. F. Britton: *Essential Mathematical Biology.* Springer, London-Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-Milan-Paris-Tokio, 2003 (second printing).
  Učebnice deterministických modelů v biologii; první tři kapitoly obsahují aplikace probírané v rámci předmětu M5858.

- G. Gandolfo: *Economic Dynamic.* Springer, 2010.
  Obsahuje rozmanité matematické metody použitelné v dynamickou ekonomii, nejen diferenciální rovnice.

- R. J. Barro, X. Sala-i-Martin: *Economic growth.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts-London, England, 1999.
  Obsahuje aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v ekonomii vykládané jiným způsobem než v předchozí monografii.

Prolog

Nejprve se podíváme na několik zjednodušených modelů nějakých reálných procesů. Na nich potom ukážeme, čím se tento text, a tedy předmět M5858, zabývá.

Samočištění jezera

Představme si jezero, do kterého přitéká a ze kterého odtéká voda tak, že se jeho objem nemění. Přitom proudění je dostatečně rychlé, aby voda byla stále dokonale promíchaná. Odpařování vody z jezera a déšť mají na množství vody v jezeře zanedbatelný vliv.

V jistém okamžiku se do jezera dostane nějaké znečištění. Znečisťující látka (polutant) je ve vodě rozpustná nebo je tvořena malými částicemi, které mají zhruba stejnou hustotu jako voda. Za takové situace se látka v jezeře rovnoměrně rozptýlí, její koncentrace bude v každém okamžiku konstantní a postupně se z jezera odplaví. Chceme tento proces popsat kvantitativně.

Označme V objem jezera a v rychlost přítoku a odtoku vody; objem V budeme vyjadřovat v objemových jednotkách (např. m^3), rychlost v v objemových jednotkách za jednotku času (např. $\mathrm{m}^3\,/\,\mathrm{den}$). Předpokládejme, že na počátku, tj. v čase $t = 0$, se do jezera dostal polutant o celkové hmotnosti m; vyjádříme ji v nějakých jednotkách hmotnosti (např. g).

Dále označme $x(t)$ koncentraci polutantu v jezeře v čase t od okamžiku znečištění; koncentraci budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti na jednotku objemu vody (tedy např. $\mathrm{g}\,/\,\mathrm{m}^3$), čas vyjadřujeme ve stejných jednotkách, k nimž je vztažena rychlost v (tedy např. ve dnech).

Chceme znát koncentraci polutantu v libovolném čase od vzniku znečištění, hledáme tedy neznámou funkci x nezávisle proměnné t. Koncentrace polutantu na počátku procesu je rovna

$$x(0) = \frac{m}{V}. \tag{1}$$

Zvolme časový interval tak krátký, že se během něho koncentrace polutantu prakticky nezmění. Označme délku tohoto časového intervalu Δt. Za čas Δt od okamžiku t bude množství polutantu v jezeře rovno $Vx(t+\Delta t)$. Toto množství se rovná množství polutantu, které, které bylo v jezeře v čase t, tj. $Vx(t)$, zmenšené o množství, které za časový interval délky Δt odteklo. Za tento interval z jezera odteče voda o objemu $v\Delta t$ a v něm bylo zhruba $(v\Delta t)x(t)$ polutantu. Celkem dostáváme

$$Vx(t + \Delta t) = Vx(t) - vx(t)\Delta t, \tag{2}$$

nebo po snadné úpravě

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{v}{V}x(t).$$

Za předpokladu, že funkce x je diferencovatelná, můžeme v této rovnosti provést limitní přechod $\Delta t \to 0$ a dostaneme

$$x'(t) = \frac{v}{V}x(t). \tag{3}$$

Hledaná funkce x tedy splňuje rovnici (3), v níž je vázána hodnota neznámé funkce a její derivace. Dále funkce splňuje podmínku (1), v níž je dána hodnota funkce x na počátku procesu. Nyní můžeme snadno přímým výpočtem ověřit, že funkce daná předpisem

$$x(t) = \frac{m}{V}\mathrm{e}^{-\frac{v}{V}t}$$

splňuje rovnici (3) i podmínku (1). Je to klesající funkce, pro kterou platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Koncentrace znečisťující látky v jezeře tedy exponenciálně klesá; v libovolném čase od znečištění je však polutant v jezeře stále přítomný.

Růst populace

Představme si populaci nějakých organismů. Všechny jedince budeme považovat za stejné; je tedy přiměřenější si představovat bakterie než například obratlovce. Tyto organismy jednak umírají, jednak dávají vznik novým jedincům. Velikost populace v nějakém okamžiku, na počátku pozorování, považujeme za známou a budeme se snažit popsat, jak se její velikost vyvíjí v průběhu času.

Označme tedy $x(t)$ velikost populace v čase t. Tuto velikost můžeme vyjadřovat třeba v počtu jedinců, v počtu jedinců vztaženém k jednotkové ploše nebo objemu živného média (tedy jako populační hustotu) a podobně. Časová jednotka může být libovolná, je však vhodné ji volit tak, aby byla menší než délka života jedince z uvažované populace, ale řádově s ní srovnatelná. Zvolme nyní časový interval délky Δt tak krátký, že jedinec, který během něho vznikl (narodil se, oddělil se od jedince rodičovského), přežije jeho konec; dobu Δt tedy považujeme za mnohem kratší, než je doba života jedince. Velikost populace $x(t + \Delta t)$ za časový interval délky Δt od okamžiku t bude rovna velikosti populace v čase t zmenšené o uhynulé jedince a zvětšené o jedince nově vzniklé.

Je přirozené předpokládat, že že množství uhynulých jedinců za jednotku času je úměrné velikosti populace. Koeficient úměrnosti označíme d a nazveme ho úmrtnost (death rate). Tento koeficient lze také interpretovat, jako klasickou pravděpodobnost, že jedinec během jednotkového intervalu zemře; platí tedy $0 < d < 1$. Za časový interval délky Δt uhyne část populace o velikosti $dx(t)\Delta t$.

Poněvadž všechny jedince považujeme za stejné, předpokládáme také, že každý jedinec během jednotkového času vyprodukuje stejný počet potomků. To znamená, že množství nově vzniklých jedinců za jednotku času je úměrné velikosti populace. Příslušný koeficient úměrnosti označíme b a nazveme porodnost (birth rate). V živé populaci nějací noví jedinci vznikají, proto je $b > 0$. Velikost části populace tvořené jedinci, kteří nově vznikli v časovém intervalu délky Δt, vyjádříme tedy součinem $bx(t)\Delta t$.

Provedenými úvahami jsme dospěli k rovnosti

$$x(t + \Delta t) = x(t) + bx(t)\Delta t - dx(t)\Delta t,$$

kterou můžeme upravit na tvar

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=(b-d)x(t).$$

Budeme předpokládat, že funkce x je diferencovatelná. Tento předpoklad není realistický, funkce x nabývá hodnot celočíselných (pokud je velikost populace vyjádřena v počtech jedinců) nebo racionálních (pokud je velikost populace vyjádřena jako populační hustota). Pokud je ale populace „dostatečně velká“, lze diferencovatelnou funkci považovat za přijatelnou aproximaci velikosti populace měnící se v čase. Za tohoto předpokladu v předchozí rovnosti provedeme limitní přechod $\Delta t \to 0$ a dostaneme rovnici

$$x'(t)=(b-d)x(t). \tag{4}$$

Hledaná funkce tedy opět splňuje rovnici, v níž je vázána její hodnota a hodnota její derivace. Na počátku, v čase $t=0$, můžeme velikost populace považovat za známou; označíme ji x_0, tj.

$$x(0)=x_0. \tag{5}$$

Opět se snadno přímým výpočtem přesvědčíme, že funkce daná předpisem

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{(b-d)t}$$

splňuje rovnici (4) i podmínku (5). Tato funkce je pro $b>d$ (porodnost větší než úmrtnost) rostoucí, pro $b<d$ klesající a pro $b=d$ konstantní. Dále platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\begin{cases}\infty, & b>d,\\ x_0, & b=d,\\ 0, & b<d.\end{cases}$$

To znamená, že v případě $b>d$ velikost populace exponenciálně roste nade všechny meze[1]. Pokud je $b<d$, populace vymírá a jedině v mezním případě $b=d$ se velikost populace nemění, zůstává (dynamicky) stálá.

Růst populace v omezeném prostředí

Model růstu populace (4) má v případě $b>d$ (porodnost větší než úmrtnost) řešení, které exponenciálně roste do nekonečna. To není v konečném světě možné, populace musí narazit na nějaké „meze růstu“. Tyto meze si však nemusíme představovat jako nějakou tvrdou hranici, na kterou populace při svém růstu narazí. Spíše se jedná o vliv prostředí, o dostupnost zdrojů, které v něm jsou a podobně. Růst populace se tomuto prostředí nějak přizpůsobuje.

Rovnice (4) přepíšeme ve tvaru

$$\frac{x'(t)}{x(t)}=b-d. \tag{6}$$

Poněvadž derivace funkce x (velikosti populace) vyjadřuje její změnu, můžeme levou stranu předchozí rovnosti interpretovat jako relativní změnu velikosti populace. A ta je rovna rozdílu

[1] Tento výsledek zpopularizoval Thomas Malthus ve své slavné Eseji o principu populace z roku 1798. Nezískal ho však předvedeným výpočtem, ale empiricky — vyhodnocením údajů o velikosti osídlení nových území v Severní Americe.

porodnosti a úmrtnosti. V prostředí, které považujeme za neomezené, tj. v němž má každý jedinec dostatek zdrojů pro svůj život a reprodukci, jsou porodnost i úmrtnost konstantní, jedná se o vnitřní fyziologické charakteristiky populace.

V prostředí, v němž jsou některé zdroje vzácné, mohou porodnost i úmrtnost záviset na dostupnosti těchto zdrojů. A dostupnost zdrojů závisí na velikosti populace — čím je populace větší, tím je pravděpodobnost, že se jedinec dostane ke zdroji menší. Porodnost a úmrtnost populace budou tedy záviset na její velikosti, $b = b(x)$, $d = d(x)$. Označme $g(x) = b(x) - d(x)$. Pak rovnice (6) přejde na tvar

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = g\big(x(t)\big),$$

neboli

$$x'(t) = x(t)g\big(x(t)\big). \tag{7}$$

Výraz $g(x)$ vyjadřuje relativní přírůstek populace o velikosti x. Nazývá se růstový koeficient.

Je-li populace malá, zdrojů prostředí na jedince je dostatek a jedinec má dost energie pro reprodukci; porodnost je tedy velká. Je-li populace velká, zdrojů na jedince je málo a ten je proto schopen vyprodukovat jen málo potomků, pokud vůbec nějaké; porodnost je malá. Navíc velká populace produkuje mnoho zplodin svého metabolismu, tyto odpadní produkty bývají pro jedince toxické, proto je úmrtnost velká, může být i větší než porodnost. Z těchto úvah můžeme učinit závěr, že růstový koeficient malé populace je malý, dokonce záporný. Přesněji řečeno, funkce g definovaná na intervalu $[0, \infty)$ by měla mít vlastnosti

$$g(0) = r > 0, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) < 0.$$

Budeme-li funkci g navíc považovat za spojitou a monotonní, bude existovat taková hodnota $K > 0$, že $g(K) = 0$ a $(x - K)g(x) < 0$ (funkce g je na intervalu $[0, K)$ kladná a na intervalu (K, ∞) záporná).

Nejjednodušší funkce, která má tyto vlastnosti je funkce lineární

$$g(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

Rovnice (7) tak získá konkrétní tvar

$$x'(t) = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right). \tag{8}$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že funkce x daná předpisem

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)\mathrm{e}^{-rt}}$$

vyhovuje rovnici (8) i podmínce (5). Pokud je $x_0 < \frac{1}{2}K$, pak funkce x v pravém okolí nuly roste a je konvexní. V jistém čase t_1 populace dosáhne velikosti $\frac{1}{2}K$ a její růst se zpomalí, tj. funkce x bude na intervalu (t_1, ∞) konkávní.

Pokud je $x_0 > K$, pak funkce x je konvexní a klesající. V případě $x_0 = K$ je funkce x konstantní. V každém případě platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)\mathrm{e}^{-rt}} = K;$$

velikost populace se v průběhu času ustálí na hodnotě K, pokud tuto hodnotu nemá již od začátku. Veličinu K můžeme nazvat kapacita nebo úživnost prostředí.

Růst majetku

Představme si naivního člověka, který má nějaký majetek v penězích. Jeho naivita se projevuje představou, že v bance se budou jeho peníze nějak samovolně množit, proto je uloží. Úrok (podle reklamních materiálů výhodný) je stanovován podle aktuálního ceníku banky. Budeme chtít popsat, jak se v průběhu času hodnota uvažovaného majetku mění.

Označme proto $x = x(t)$ velikost majetku v čase t. Ta je vyjádřena v nějaké peněžní jednotce, čas budeme udávat v rocích. Počáteční velikost majetku označíme x_0, tedy

$$x(0) = x_0. \tag{9}$$

K uložené částce banka připisuje úrok. Jeho nominální velikost se mění, je určena aktuální situací na trhu bankovních služeb a úrokovou sazbou centrální banky, tedy výkonností ekonomiky. Reálná velikost úroku je oproti nominální menší o inflaci a bankovní poplatky. Označme reálnou úrokovou míru v čase t symbolem $p(t)$. Tato veličina bývá vyjádřena v procentech za rok. Úroková míra se nemění plynule, k její změně dochází jen v určitých časových okamžicích. Proto budeme funkci p nezávisle proměnné t považovat za funkci po částech konstantní. V bodech skoku funkce r nemusí být definována, z technických důvodů ji však budeme definovat tak, aby byla spojitá zprava v každém bodě svého definičního oboru, tj. intervalu $[0, \infty)$.

Po uplynutí časového intervalu s levým krajním bodem t, který má délku Δt tak malou, že se v jeho průběhu úroková míra nezmění, bude hodnota majetku rovna její hodnotě na začátku tohoto intervalu změněná o hodnotu reálného (nikoliv připsaného) úroku za tento časový interval, tj.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{p(t)}{100} x(t)\Delta t.$$

Tuto rovnost upravíme na tvar

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \tfrac{1}{100} p(t)x(t)$$

a provedeme limitní přechod $\Delta t \to 0$. Dostaneme rovnici

$$x'(t) = \tfrac{1}{100} p(t)x(t), \tag{10}$$

v níž je vázána hodnota derivace hledané funkce x a hodnota této funkce.

Přímým výpočtem se snadno přesvědčíme, že funkce x splňující rovnici (10) a podmínku (9) je dána výrazem

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\frac{1}{100} \int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

Ještě poznamenejme, že funkce po částech spojitá je integrabilní a tedy funkce x je zadána korektně.

Z vyjádření majetku x v čase t od začátku (od uložení do banky) vidíme, že za tento čas se majetek zvětší, resp. zmenší, pokud platí nerovnost

$$\int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau > 0, \quad \text{resp.} \quad \int_0^t p(\tau)\mathrm{d}\tau < 0,$$

tj. pokud nominální úroková míra je v průběhu času převážně větší, resp. menší, než inflace a poplatky; v reálné ekonomice patrně nastane druhý případ.

Chladnutí kávy

V místnosti je pokojová teplota. Uvaříme si kávu a nalijeme ji do hrnku, nebo v hrnku zalijeme mletou kávu vroucí vodou. Hrnek má tepelně izolované stěny i dno, neprobíhá přes ně žádná výměna tepla. Hrnek nemá žádnou pokličku, hladina kávy není od okolního prostředí nijak izolovaná. Za takové situace lze očekávat, že káva v hrnku bude chladnout. Navíc teplá káva (a kapalina obecně) má menší hustotu, než chladná a to znamená, že ochlazená káva od hladiny klesá a teplá káva ze dna stoupá k hladině. Tímto procesem se káva v hrnku promíchává, takže její teplotu můžeme považovat za stejnou v celém objemu.

Chceme popsat vývoj teploty kávy v průběhu času. Za tímto účelem označíme $x = x(t)$ teplotu kávy v čase t; čas je vhodné uvádět v minutách, teplotu ve stupních Celsia. Teplotu v místnosti označíme T a také ji budeme uvádět ve °C. Výměna tepla mezi kávou a prostředím probíhá přes hladinu. Označíme její obsah S; můžeme ho vyjádřit v cm^2.

Experimentálně byl ověřen Newtonův zákon chladnutí: zmenšení teploty za krátký časový interval je úměrné rozdílu teplot, obsahu plochy přes kterou výměna tepla probíhá a času, po který chladnutí probíhá. Příslušný koeficient označíme κ; při zvolených jednotkách bude mít rozměr $\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{min}^{-1}$. Označíme-li délku časového intervalu Δt, bude mít tento zákon tvar

$$x(t+\Delta t) - x(t) = \kappa S\big(x(t) - T\big)\Delta t.$$

Po vydělení výrazem Δt a limitním přechodu $\Delta t \to 0$ dostaneme rovnici

$$x'(t) = \kappa S\big(x(t) - T\big). \tag{11}$$

Opět se jedná o rovnici vyjadřující vztah funkční hodnoty a derivace hledané funkce.

Na začátku děje byla káva vařící, její teplota byla 100°C, tj.

$$x(0) = 100. \tag{12}$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že funkce daná předpisem

$$x(t) = T + (100 - T)\mathrm{e}^{-\kappa S t}$$

vyhovuje rovnici (11) i podmínce (12). Jedná se o funkci, která exponenciálně klesá od hodnoty 100°C k pokojové teplotě T. Teplota kávy se „velice rychle“ vyrovnává s teplotou místnosti, v konečném čase ale až na tuto teploty neklesne.

Dynamika mezd a zaměstnanosti

Richard M. Goodwin sestavil ve druhé polovině šedesátých let minulého století matematický model třídního boje. S použitím méně ideologické terminologie se jedná o model časového vývoje mezd a zaměstnanosti, ve kterém lze pozorovat vznik hospodářských cyklů. Jeho podrobné odvození bude uvedeno v 7.3, zde pouze naznačíme výsledek.

Jedna makroekonomická charakteristika, která v modelu vystupuje je relativní zaměstnanost l (práce, labor) vyjádřená jako podíl zaměstnaných v celkovém množství práceschopného obyvatelstva; jedná se tedy o bezrozměrnou veličinu. Druhá je průměrná mzda w (wage) vyjádřená v peněžních jednotkách. Obě tyto veličiny se v čase mění, tedy $l = l(t)$, $w = w(t)$; tyto funkce budeme považovat za diferencovatelné. Časová změna zaměstnanosti mezd je pak vyjádřena jako derivace těchto funkcí.

Jedním „ekonomickým zákonem“ je skutečnost, že při vysoké mzdě (tj. při vysoké garantované minimální mzdě) zaměstnanost klesá (zaměstnavatelům se nevyplatí zaměstnávat drahé pracovníky); naopak, při nízké průměrné mzdě zaměstnanost roste. Odtud plyne, že existuje nějaká „rovnovážná“ úroveň mezd, při níž se zaměstnanost nemění. Tuto myšlenku vyjádříme přesněji.

Za „změnu zaměstnanosti“ budeme považovat relativní změnu zaměstnanosti l, tedy hodnotu $l'(t)/l(t)$. Její pokles s růstem hladiny mezd budeme specifikovat zjednodušujícím předpokladem, že tato hodnota závisí na průměrné mzdě lineárně, přičemž tato lineární funkce je klesající, tedy

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = \gamma - \sigma w(t), \tag{13}$$

kde γ a σ jsou kladné parametry; σ vyjadřuje „citlivost“ změny zaměstnanosti na růst mezd, γ vyjadřuje relativní růst zaměstnanosti při hypoteticky nulové mzdě. Parametr γ má rozměr 1/čas, parametr σ má rozměr 1/(čas $\cdot$ peněžní jednotka), hodnota γ/σ je „rovnovážná“ hladina mezd.

William Phillips na základě údajů o nominální mzdě a zaměstnanosti v Británii v letech 1861–1957 vypozoroval závislost změny průměrné mzdy na zaměstnanosti; tato závislost není lineární, je vyjádřena známou Phillipsovou křivkou. S rostoucí zaměstnaností roste mzda (pokud chce hospodář při téměř úplné zaměstnanosti najít mezi práceschopným obyvatelstvem nějakého práceochotného, musí ho přeplatit), naopak při malé zaměstnanosti mzda klesá (mezi hladovějícími nezaměstnanými jsou lidé ochotní pracovat za alespoň nějakou mzdu). Přesněji, za změnu mzdy budeme považovat změnu relativní a vyjádříme ji rovností

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \varphi(l) - \alpha, \tag{14}$$

kde φ je rostoucí spojitá funkce definovaná na intervalu $(0,1)$, která má vlastnost

$$\lim_{l\to 0+} \varphi(l) < 0, \qquad \lim_{l\to 1-} \varphi(l) > 0;$$

limity připouštíme i nevlastní. Parametr α vyjadřuje hodnotu Phillipsovy křivky při „rovnovážné“ úrovni mezd. Veličiny α i φ mají rozměr „čas^{-1}“.

Rovnice (13) a (14) můžeme přepsat ve tvaru systému

$$\begin{aligned} l'(t) &= l(t)\big(\gamma - \sigma w(t)\big), \\ w'(t) &= w(t)\big(\varphi\big((l(t)\big) - \alpha\big), \end{aligned} \tag{15}$$

v němž jsou vzájemně provázány hodnoty derivace neznámých funkcí l, w a jejich funkční hodnoty.

Zákon síly

Isaac Newton definoval sílu pomocí jejího účinku na pohyb tělesa, její velikost zavedl jako součin hmotnosti tělesa a uděleného zrychlení. Tento postulát budeme precizovat pro velice jednoduchou situaci. Místo tělesa si budeme představovat abstraktní „hmotný bod“, tj. těleso o stejné nenulové hmotnosti m ale o nulovém objemu. Dále si budeme představovat, že tento hmotný bod se může pohybovat pouze po přímce. Tuto přímku prohlásíme za souřadnou osu, tj. zvolíme na ní počátek a orientaci. Polohu hmotného bodu pak vyjádříme jako jeho souřadnici x; přitom je x reálné číslo. Poněvadž hmotný bod se pohybuje, jeho poloha je v každém okamžiku jiná, souřadnice závisí na čase, $x = x(t)$. Rychlost pohybu je ve fyzice definována jako relativní změna polohy vztažená k času. Změnu polohy za krátký časový interval délky Δt vyjádříme rozdílem $x(t + \Delta t) - x(t)$, tedy rychlost v uvažovaném časovém intervalu je zhruba rovna

$$v(t) \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

a v limitě $\Delta t \to 0$ dostaneme přesně $v(t) = x'(t)$.

Zrychlení je analogicky definováno jako relativní změna rychlosti vzhledem k času, tedy zrychlení v uvažovaném krátkém časovém intervalu je zhruba rovno

$$a(t) \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

a v limitě $\Delta t \to 0$ přesně $a(t) = x''(t)$.

Na hmotný bod působí síla F, která nemusí být stejná v každém místě. Její velikost tedy závisí na poloze, tj. na souřadnici bodu, $F = F(x)$ nebo podrobněji $F = F\big(x(t)\big)$. Postulovaný vztah mezi hmotností m hmotného bodu, jeho zrychlením a a působící silou F je

$$F = ma,$$

se zahrnutím času

$$F\big(x(t)\big) = ma(t) = mx''(t),$$

takže

$$x''(t) = \frac{1}{m} F\big(x(t)\big). \tag{16}$$

Časově proměnná poloha bodu tedy splňuje rovnici, v níž je vázána její hodnota a hodnota její druhé derivace.

Shrnutí

Všechny matematické modely, které jsme výše sestavili, měly dvě společné vlastnosti:

- Ve všech jsme předpokládali, že čas plyne spojitě, je neomezeně dělitelný. Techničtěji vyjádřeno, časový okamžik t je prvkem intervalem $[0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ a je možné provádět limitní přechod $\Delta t \to 0$; přitom Δt reprezentuje časový krok, délku krátkého časového intervalu. Okamžik $t = 0$ v modelech označoval začátek procesu a v tomto okamžiku většinou byl znám stav procesu (1), (5), (9), (12); výjimkou jsou poslední dva modely, u kterých jsme však nenašli (ani nehledali) žádné řešení.

- Modelovaný proces byl vyjádřen nebo aproximován nějakou diferencovatelnou funkcí času $x = x(t)$ (v případě modelu změn mezd a zaměstnanosti dvojicí diferencovatelných funkcí $l = l(t)$, $w = w(t)$). Model představovala rovnice (nebo soustava rovnic) ve které byla vázána hodnota derivace hledané funkce (hledaných funkcí) podle času v jednom časovém okamžiku a její funkční hodnota v témže okamžiku; v modelech (3), (4), (7), (8), (10), (11), (15) byla derivace první, v modelu (16) druhá.

Rovnice, v nichž vystupuje neznámá funkce jedné reálné proměnné a její derivace, se nazývají diferenciální, podrobněji *obyčejné diferenciální rovnice.* Budou základním objektem, kterým se budeme zabývat. Jak ukazuje ekonomický model (15) nevystačíme s jednou rovnicí, a jak ukazuje fyzikální model (16) můžeme potřebovat i vyšší derivace, než první.

Název „diferenciální rovnice“ má původ v tradiční symbolice. Např. rovnici (2) můžeme přepsat ve tvaru

$$V\big(x(t+\Delta t) - x(t)\big) = -vx(t)\Delta t,$$

neboli

$$V\Delta x(t) = -vx(t)\Delta t,$$

v níž vystupuje konečný přírůstek hledané funkce x a přírůstek nezávisle proměnné t. Pokud přírůstky budeme považovat za infinitesimální, tj. za „nekonečně malé“, poslední rovnice dostane tvar

$$V\mathrm{d}x(t) = -vx(t)\mathrm{d}t,$$

což je rovnice, v níž vystupují diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$ hledané funkce a její nezávisle proměnné. Ještě můžeme připomenout, že obyčejnou derivaci v tradiční symbolice zapisujeme

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \quad \text{nebo stručně } x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t};$$

tento způsob zápisu je výhodný zejména v situacích, kdy ve formulích vystupuje hledaná funkce x, nikoliv její funkční hodnota $x(t)$ (což bude často), nezávisle proměnná v nich není explicitně uvedena, a přitom potřebujeme nějak označit nezávisle proměnnou.

Máme-li diferenciální rovnici, chceme znát její řešení, nejlépe v explicitním tvaru. Pro rovnice (3), (4), (8), (10) a (11) jsme takové řešení napsali. Hledání explicitních řešení diferenciálních rovnic je věnována kapitola 2.

Řešení v explicitním tvaru však nelze nalézt vždy, u systémů rovnic jsou dokonce explicitní řešení dosti vzácná. V takovém případě chceme alespoň znát, zda řešení dané nebo sestavené rovnice existuje, zda je jediné nebo jich je víc, případně na jakém intervalu je řešení definováno. Pokud rovnice má modelovat nějaký skutečný proces, nemůžeme znát úplně přesně hodnoty všech parametrů rovnice, stav procesu na počátku a podobně. V takovém případě je dobré vědět, zda drobná chyba v parametrech nebo počáteční podmínce řešení neznehodnotí. O této problematice pojednává kapitola 3.

V obecném modelu růstu populace v omezeném prostředí (7) neznáme konkrétní tvar pravé strany, postulujeme jen nějaké vlastnosti funkce g. Podobně u ekonomického modelu (15) také neznáme přesný tvar pravé strany druhé rovnice, známe jen nějaké vlastnosti funkce φ, která na ní vystupuje. A přesto potřebujeme i v těchto případech něco o průběhu řešení vědět. Nelze očekávat, že z „neurčité“ rovnice získáme přesné kvantitativní informace, ale můžeme se dozvědět alespoň nějaké vlastnosti řešení vyjádřené kvalitativně, např. zda je funkce x rostoucí, klesající, ohraničená, má limitu v nevlastním bodě a podobně. Některé základní poznatky z kvalitativní teorie diferenciálních rovnic jsou uvedeny v kapitole 5.

Podívejme se ještě jednou na rovnice (3), (4), (10) a (11). Všechny čtyři lze zapsat v jednotném tvaru

$$x'(t) = a(t)x(t) + c(t); \tag{17}$$

v rovnici (3) je funkce $a(t) \equiv r/V$, v rovnici (4) je $a(t) \equiv b-d$, v rovnici (10) je $a(t) = \frac{1}{100}p(t)$ a v rovnici (11) je $a(t) \equiv \kappa S$, v rovnici (11) je $c(t) \equiv \kappa ST$, v rovnicích (3), (4) a (10) je $c(t) \equiv 0$. Rovnice tvaru (17) se nazývají *lineární.* V rovnici (11) člen $c(t) = \kappa ST$ vyjadřoval vliv okolního prostředí na popisovaný proces (teplotu místnosti, v níž probíhá chladnutí kávy), ve zbývajících modelech jsme žádné „okolí“ popisovaného procesu neuvažovali. Proto se lineární rovnice s $c \equiv 0$ nazývají *homogenní* (stejnorodé; celý proces se „rodí“ z jednoho „zdroje“, nic ho neovlivňuje), rovnice s nenulovým členem c se nazývá *nehomogenní*.

Ve všech uvedených řešeních se vyskytovala přirozená exponenciální funkce. Později uvidíme, že množina řešení lineární rovnice (nebo systému lineárních rovnic) má také „pěkné“ algebraické vlastnosti — může tvořit konečněrozměrný vektorový prostor. Navíc se lineární rovnice často vyskytují v aplikacích, nebo bývají prvním přiblížením se k modelu zkoumaného procesu. Z těchto důvodů se lineárními rovnicemi zabývá samostatná kapitola 4.

Část I

Obyčejné diferenciální rovnice

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu

Převážně budeme pracovat s reálnými funkcemi jedné reálné proměnné, kterou označíme t. Je-li $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, budeme psát $x = x(t)$ nebo $x = x(\,\cdot\,)$. Obyčejnou derivaci funkce x v bodě t (v čase t) značíme $x'(t)$ nebo jako podíl diferenciálů, tedy

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Zápis $x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ označuje derivaci funkce x v obecném bodě. Můžeme tedy psát $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ a obecně pro n-tou derivaci

$$x^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$$

nebo stručně $^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$.

Diferenciální rovnice (podrobněji *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu*) je rovnice, v níž vystupuje neznámá funkce $x = x(t)$, její první derivace $x' = x'(t)$ a hodnota nezávisle proměnné t, tedy

$$F(t, x, x') = 0,$$

kde F je nějaká funkce tří proměnných. Řešením rovnice je funkce x, která ji splňuje; podrobněji diferencovatelná funkce x definovaná na nějakém intervalu J, přičemž pro každé $t \in J$ je $\big(t, x(t), x'(t)\big)$ v definičním oboru funkce F a platí $F\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0$.

Uvedená rovnice se nazývá *implicitní* nebo *nerozřešená vzhledem k derivaci.* Pokud se podaří derivaci x' z rovnice vyjádřit, dostaneme *explicitní* rovnici nebo rovnici *rozřešenou vzhledem k derivaci.*

Definice 1. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^2$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci.* *Řešením* této rovnice se rozumí diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, která splňuje podmínky

$$\big(t, x(t)\big) \in G, \;\; x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \text{ pro každé } t \in J.$$

Graf řešení rovnice (1.1) se nazývá *integrální křivka.*

Příklad: $G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \ f(t, x) = \dfrac{x}{t}$.
Funkce $x(t) = kt$, kde $k \in \mathbb{R}$ je řešením rovnice

$$x' = \frac{x}{t} \tag{1.2}$$

na intervalu $J = (0, \infty)$. ■

Diferenciální rovnice může mít více řešení.

Definice 2. Nechť G, f mají stejný význam jako v definici 1 a nechť $(t_0, x_0) \in G$ je libovolný bod. Úloha najít řešení rovnice (1.1), které splňuje podmínku

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova úloha*, podmínka (1.3) se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova podmínka*.

Příklad: Nechť $t_0 > 0, \ x_0 \in \mathbb{R}$. Funkce $x(t) = \dfrac{x_0}{t_0} t$ je řešením úlohy

$$x' = \frac{x}{t}, \qquad x(t_0) = x_0$$

na intervalu $J = (0, \infty)$. ■

Definice 3. Nechť $x = x(t)$ je řešením úlohy (1.1), (1.3) na intervalu J a $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je řešením úlohy (1.1), (1.3) na intervalu $\tilde{J}$, $t_0 \in J \cap \tilde{J}$. Jestliže $\tilde{J} \subseteq J$ a pro každé $t \in \tilde{J}$ je $x(t) = \tilde{x}(t)$, řekneme, že řešení $x = x(t)$ je *prodloužením řešení* $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ a že řešení $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je *zúžením řešení* $x = x(t)$. Jestliže řešení $x = x(t)$ úlohy (1.1), (1.3) není zúžením žádného jiného řešení této úlohy, řekneme, že $x = x(t)$ je *úplným* (*neprodloužitelným*) *řešením* úlohy (1.1), (1.3).

V dalším budeme pod pojmem „řešení“ rozumět úplné řešení.

Příklad: Počáteční úloha

$$x' = 3\sqrt[3]{x^2}, \qquad x(0) = 0 \tag{1.4}$$

má více různých úplných řešení, např.

$$x(t) \equiv 0, \ x(t) = t^3, \ x(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ (t-a)^3, & t \geq a \end{cases},$$

kde $a \geq 0$ je libovolné číslo. ■

Definice 4. Buď $g = g(t, C)$ funkce dvou proměnných. Řekneme, že g je *obecným řešením rovnice* (1.1), jestliže ke každému $(t_0, x_0) \in G$ existuje $C_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x = x(t) = g(t, C_0)$ je řešením úlohy (1.1), (1.3).
Řešení úlohy (1.1), (1.3) se nazývá *partikulární řešení rovnice* (1.1).

Proměnnou t funkce g v předchozí definici považujeme za nezávisle proměnnou reálné funkce $g(\,\cdot\,, C)$ jedné reálné proměnné; proměnnou C považujeme za parametr.

Příklad:
$x = Ct$ je obecným řešením rovnice (1.2).
Diferenciální rovnice v úloze (1.2) nemá obecné řešení. ■

1.1.1 Geometrická interpretace

Rovnice (1.1) přiřazuje každému bodu z G právě jednu hodnotu $x' = f(t,x)$, tedy každému bodu $(t_0, x_0) \in G$ lze přiřadit směrový vektor tečny k integrální křivce v bodě (t_0, x_0), tj. přímky $x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$. Tento vektor má souřadnice $\big(1, f(t_0, x_0)\big)$. To znamená, že rovnice (1.1) definuje na G vektorové pole[1]. Toto pole se nazývá *směrové pole rovnice* (1.1).

Každá integrální křivka rovnice (1.1) je *vektorovou čárou*[2] směrového pole. Směrové pole tedy poskytuje představu o průběhu řešení rovnice (1.1).

Vrstevnice funkce f, (tj. křivky zadané rovnicí $f(t,x) = c$) se nazývají *izokliny rovnice* (1.1). Jsou to křivky, na nichž mají vektory ze směrového pole stejný směr.

1.2 Vektorové a maticové funkce

Reálný n-rozměrný vektor $\boldsymbol{x}$ je prvkem prostoru $\mathbb{R}^n$. *Složky (standardní souřadnice) vektoru* $\boldsymbol{x}$ budeme značit $x_1, x_2, \dots, x_n$ nebo $(\boldsymbol{x})_1, (\boldsymbol{x})_2, \dots, (\boldsymbol{x})_n$.

Matice A *o m řádcích a n sloupcích* je prvkem prostoru $\mathbb{R}^{mn}$. Její složku na i-tém řádku a v j-tém sloupci budeme značit a_{ij} nebo $(\mathsf{A})_{ij}$. Vektor z prostoru $\mathbb{R}^n$ budeme chápat jako matici o n řádcích a jednom sloupci.

Je-li tedy $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{mn}$, můžeme psát

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{x})_i = x_i, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (\mathsf{A})_{ij} = a_{ij}, \quad (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k.$$

1.2.1 Normy vektorů a matic

Normu vektoru $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, podrobněji *vektorovou 1-normu* nebo *součtovou normu* definujeme předpisem

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Normu matice $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, podrobněji *maticovou 1-normu* nebo *součtovou normu* definujeme předpisem

$$\|\mathsf{A}\| = \|\mathsf{A}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

---

[1] Vektorové pole na množině G je zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ množiny G do (konečně rozměrného reálného) vektorového prostoru, tj. $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathbb{R}^n$; v našem případě je $n = 2$.

[2] Vektorová čára vektorového pole $\boldsymbol{\varphi} : G \to \mathbb{R}^2$ je křivka v $\mathbb{R}^n$ taková, že vektor $\boldsymbol{\varphi}(t, x)$ je tečným vektorem k této křivce v bodě (t, x).

Na množině vektorů zavádíme metriku $\varrho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$, na množině matic zavádíme metriku $\varrho(\mathsf{A},\mathsf{B}) = \|\mathsf{A}-\mathsf{B}\|$. Jedná se o součtovou neboli taxíkářskou metrikou, sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, I.1.1.2.iii.

• Platí: $\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\| \le \|\mathsf{A}\|\ \|\boldsymbol{x}\|$. Této vlastnosti se říká, že *maticová norma je souhlasná s vektorovou normou.*

Důkaz: Pro libovolné $i,k\in\{1,2,\dots,n\}$ je $|a_{ik}| \le \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$. Odtud plyne

$$\|\mathsf{A}\boldsymbol{x}\| = \sum_{i=1}^{m}|(\mathsf{A}\boldsymbol{x})_1| = \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\,|x_k| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(|x_k|\sum_{i=1}^{m}|a_{ik}|\right) \le \sum_{k=1}^{n}\left(|x_k|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right).\ \square$$

1.2.2 Spojitost, derivace a integrál vektorových a maticových funkcí

Vektorová funkce, podrobnněji n-vektorová funkce, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je zobrazení $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, maticová funkce, podrobněji čtvercová n-rozměrná maticová funkce, $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ je zobrazení $\mathsf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}.$$

Na množině $\mathbb{R}$ uvažujeme přirozenou metriku, na množině R^n, resp. R^{n^2}, uvažujeme příslušnou součtovou metriku. Spojitost vektorové, resp. maticové, funkce chápeme jako spojitost příslušného zobrazení metrických prostorů. Podrobněji: vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ (resp. maticová funkce A) je spojitá v bodě t_0 svého definičního oboru, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna t z definičního oboru funkce $\boldsymbol{x}$ z nerovnosti $|t-t_0| < \delta$ plyne nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)\| < \varepsilon$ (resp. $\|\mathsf{A}(t)-\mathsf{A}(t_0)\| < \varepsilon$). Vektorová (resp. maticová) funkce je spojitá právě tehdy, když všechny její složky jsou spojité.

Limitu v bodě t_0, derivaci v obecném bodě t a integrál v mezích od t do t_0 vektorové, resp. maticové, funkce definujeme vztahy (v uvedeném pořadí)

$$\left(\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{x}(t)\right)_i = \lim_{t\to t_0}x_i(t), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)\right)_i = \big(\boldsymbol{x}'(t)\big)_1 = \big(x_i'(t)\big), \quad \left(\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)_i = \int_{t_0}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s,$$

$$\left(\lim_{t\to t_0}\mathsf{A}(t)\right)_{ij} = \lim_{t\to t_0}a_{ij}(t), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\mathsf{A}}{\mathrm{d}t}(t)\right)_{ij} = \big(\mathsf{A}'(t)\big)_{ij} = a_{ij}'(t), \quad \left(\int_{t_0}^{t}\mathsf{A}(s)\mathrm{d}s\right)_{ij} = \int_{t_0}^{t}a_{ij}(s)\mathrm{d}s.$$

1.3 Systémy diferenciálních rovnic a rovnice vyššího řádu

Definice 5. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množina s neprázdným vnitřkem, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$. Rovnice

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{1.5}$$

se nazývá *systém n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu* nebo *n-vektorová obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu.*

Vektorovou rovnici můžeme rozepsat do složek

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Počáteční podmínku k rovnici (1.5) zadáváme ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0} = \big((x_0)_1, (x_0)_2, \dots, (x_0)_n\big) = \big(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\big). \tag{1.6}$$

Pojmy řešení, obecné řešení, partikulární řešení, úplné řešení rovnice (1.5) jsou analogiemi těchto pojmů z jednorozměrného případu. Obecné řešení závisí na n parametrech.

Definice 6. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}\right) \tag{1.7}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci.* *Řešením* této rovnice se rozumí n-krát diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, která splňuje podmínky

$$\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right) \in G,\ \ x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right)$$
$$\text{pro každé } t \in J.$$

Počáteční (Cauchyovu) podmínku pro rovnici (1.7) zadáváme ve tvaru

$$x(t_0) = x_0,\ \ x'(t_0) = x_{0,1},\ \ x''(t_0) = x_{0,2}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}, \tag{1.8}$$

kde $(t_0, x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n-1}) \in G$.

Úplné řešení, obecné řešení, partikulární řešení rovnice (1.7) definujeme analogicky jako u rovnic prvního řádu. Obecné řešení závisí na n parametrech.

Tvrzení 1. Řešení počáteční úlohy (1.7), (1.8) je ekvivalentní s řešením počátečního problému pro systém n diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$x_1(t_0) = x_0,\ x_2(t_0) = x_{2,0},\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_{0,n-1}, \tag{1.10}$$

v tomto smyslu: Je-li $x = x(t)$ řešením úlohy (1.7), (1.8), pak n-tice funkcí $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$, $\ldots$, $x_n = x^{(n-1)}$ je řešením úlohy (1.9), (1.10) a je-li n-tice funkcí $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $\ldots$, $x_n = x_n(t)$ řešením úlohy (1.9), (1.10), pak je funkce $x = x(t) = x_1(t)$ řešením úlohy (1.7), (1.8).

Kapitola 2

Elementární metody řešení

2.1 Exaktní rovnice

$$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)}\,, \quad \text{přičemž} \quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = -\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}$$

Tuto rovnici lze přepsat na tvar $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{f(t,x)}{g(t,x)}$, neboli

$$0 = f(t,x)\mathrm{d}t - g(t,x)\mathrm{d}x\,.$$

Za uvedených podmínek je $f(t,x)\mathrm{d}t - g(t,x)\mathrm{d}x$ totálním diferenciálem nějaké funkce F dvou proměnných (sr. např. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, kap. 4), přičemž platí $\mathrm{d}F(t,x) = 0$. Obecné řešení dané rovnice je tedy implicitně zadáno rovností $F(t,x) = C$, kde C je reálná konstanta.

2.2 Separovatelné rovnice

2.2.1 Rovnice typu $x' = f(t)$

Jedná se v podstatě o rovnost, jíž je definována primitivní funkce k dané funkci f. Obecné řešení této rovnice tedy je

$$x(t) = \int f(t)\mathrm{d}t$$

a partikulární řešení splňující počáteční podmínku (1.3) je

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

samozřejmě za předpokladu, že příslušná primitivní funkce nebo určitý integrál existují.

Příklady na užití rovnice tohoto typu jsou 6.1 a 6.2.

2.2.2 Rovnice se separovanými proměnnými $x' = f(t)g(x)$

Tuto rovnici můžeme pomocí diferenciálů zapsat ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t)g(x).$$

Za předpokladu $g(x) \neq 0$ můžeme rovnici formálně přepsat na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = f(t)\mathrm{d}t$$

a po integraci obou stran dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Touto rovností je implicitně zadáno nějaké řešení dané rovnice.

Rovností $g(x) = 0$ je implicitně zadáno *singulární* (konstantní) řešení. Poznamenejme, že singulární řešení může, ale nemusí, být zahrnuto v řešení (2.1) pro nějakou volbu integrační konstanty. Pokud je singulární řešení zahrnuto ve formuli (2.1), pak je rovností (2.1) implicitně zadáno obecné řešení dané rovnice.

Rovností

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

je implicitně zadáno partikulární řešení dané rovnice, které splňuje počáteční podmínku (1.3) takovou, že $g(x_0) \neq 0$. Pokud $g(x_0) = 0$, pak řešením dané rovnice s počáteční podmínkou (1.3) je konstantní funkce $x(t) \equiv x_0$.

Povšimněme si, že rovnici typu 2.2.1 bez hledané funkce na pravé straně lze považovat za zvláštní případ rovnice se separovanými proměnnými pro $g(x) \equiv 1$. Jiným speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými je *rovnice autonomní*

$$x' = g(x)$$

pro $f(t) \equiv 1$.

Příklad na užití rovnice se separovanými proměnnými je uveden v 6.5.

2.2.3 Homogenní rovnice $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$

Zavedeme funkci $u = u(t) = \dfrac{x(t)}{t}$. Pak $x(t) = tu(t)$, $x' = u + tu'$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$u' = \frac{f(u) - u}{t},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

Příkladem na užití homogenní rovnice je Archimédova úloha 6.3.

2.2.4 Rovnice typu $x' = f\left(\dfrac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)$

1. $c = \gamma = 0$. Pak $f\left(\dfrac{at + bx}{\alpha t + \beta x}\right) = f\left(\dfrac{a + b\frac{x}{t}}{\alpha + \beta\frac{x}{t}}\right)$ a daná rovnice je homogenní.

2. $c^2 + \gamma^2 \neq 0,\ \dfrac{\alpha}{a} = \dfrac{\beta}{b} = k.$
   Zavedeme funkci $u = u(t) = at + bx$. Pak $u' = a + bx'$ a tedy $x' = \dfrac{u' - a}{b}$. Dosazením do původní rovnice dostaneme
$$u' = a + bf\left(\frac{u + c}{ku + \gamma}\right),$$
   což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

3. $c^2 + \gamma^2 \neq 0,\ a\beta \neq b\alpha.$
   Nechť m a n jsou řešením soustavy lineárních algebraických rovnic
$$\begin{aligned} am + bn &= -c \\ \alpha m + \beta n &= -\gamma . \end{aligned}$$
   Zavedeme funkce $u = u(t) = t - m$
   $v = v(t) = x - n.$
   Pak $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}v,$
   $at + bx + c = a(u+m) + b(v+n) + c = au + bv + (am+bn) + c = au + bv,$
   $\alpha t + \beta x + \gamma = \alpha(u+m) + \beta(v+n) + \gamma = \alpha u + \beta v + (\alpha m + bn) + \gamma = \alpha u + \beta v$
   Daná rovnice přejde na tvar
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right),$$
   což je rovnice typu 1. pro neznámou funkci $v = v(u)$.

2.3 Lineární a Bernoulliova rovnice

2.3.1 Lineární rovnice $x' = a(t)x + b(t)$

1. $b(t) \equiv 0$ (homogenní rovnice)
   Je to rovnice se separovanými proměnnými. Partikulární řešení počátečního problému (s podmínkou (1.3)) je:
$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \ln x - \ln x_0 &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\ x &= x_0 \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$
   Obecné řešení homogenní lineární rovnice lze tedy zapsat
$$x = C \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

2. $b(t) \not\equiv 0$ (nehomogenní rovnice)
   Řešení hledáme ve tvaru

$$x(t) = C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(*metoda variace konstanty*). Pak $x' = (C'(t) + a(t)C(t)) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$. Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
\big(C'(t) + a(t)C(t)\big) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau &= a(t)C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau + b(t) \\
C'(t) &= b(t) \exp \int_{t}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\
C(t) - C(t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice tedy je

$$x(t) = \left[const + \int_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.$$

Partikulární řešení splňující počáteční podmínku (1.3) je

$$x(t) = \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.$$

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, pak

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{B}{A} \right) \mathrm{e}^{A(t-t_0)} - \frac{B}{A} \,.$$

Jiný postup při řešení nehomogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
x' - a(t)x &= b(t) && / \ \mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x'\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} - a(t)x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \right) &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
x &= \mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t} \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Příklad na užití lineární rovnice je 6.6.

2.3.2 Bernoulliova rovnice $x' = a(t)x + b(t)x^r,\ r \in \mathbb{R}$

Zavedeme funkci $u = u(t) = x(t)^{1-r}$. Pak $x = u^{\frac{1}{1-r}},\ x' = \frac{1}{1-r}u^{\frac{1}{1-r}-1}u'$. Dosadíme do dané rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-r}u^{\frac{r}{1-r}}u' &= a(t)u^{\frac{1}{1-r}} + b(t)u^{\frac{r}{1-r}} \qquad / \ (1-r)u^{\frac{r}{r-1}} \\
u' &= (1-r)a(t)u + (1-r)b(t)\,.
\end{aligned}$$

To je lineární rovnice pro neznámou funkci u.

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, lze použít substituci

$$x = \left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}}.$$

pak

$$x' = -\frac{1}{r-1}\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}-1} y'$$

a tedy

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r-1}\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}-1} y' &= \left(A + B\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-1}\right)\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}} \\
-\frac{1}{r-1}y' &= \left(A + B\frac{A}{Ay-B}\right)\frac{Ay-B}{A} \\
\frac{1}{1-r}y' &= \frac{A^2y - AB + AB}{Ay-B}\,\frac{Ay-B}{A} \\
y' &= (1-r)Ay,
\end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice.

Příklad na užití Bernoulliovy rovnice je 6.6.

2.4 Rovnice nerozřešené vzhledem k derivaci

Tyto rovnice nazýváme také *implicitní diferenciální rovnice.* Jedná se o rovnice tvaru

$$F(t, x, x') = 0.$$

Při řešení těchto rovnic zavádíme funkci $p = p(t) = x'(t)$.

1. Rovnice autonomní $\quad F(x, x') = 0$
   Rovnicí $F(x,p) = 0$ může být implicitně zadána funkce $p = p(x)$. Rovnici $F(x, p(x)) = 0$ derivujeme podle proměnné x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,p) + \frac{\partial F}{\partial p}(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,p)}{\frac{\partial F}{\partial p}(x,p)}\,,
\end{aligned}$$

což je rovnice pro neznámou funkci p nezávisle proměnné x rozřešená vzhledem k derivaci. Je-li $p = p(x)$ řešením poslední rovnice, pak rovnice se separovanými proměnnými $x' = p(x)$ je řešením původní rovnice; její obecné řešení je tedy implicitně zadáno rovnicí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = t + const\,.$$

2. Rovnice nezávisející na neznámé funkci $\quad F(t, x') = 0$.
   Rovnici $F(t, p) = 0$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,p) + \frac{\partial F}{\partial p}(t,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}(t,p)}{\frac{\partial F}{\partial p}(t,p)}\,, \end{aligned}$$

   což je rovnice pro neznámou funkci $p = p(t)$ rozřešená vzhledem k derivaci. Je-li $p = p(t)$ řešením poslední rovnice, je funkce $x = x(t) = \int p(t)\mathrm{d}t$ obecným řešením dané rovnice.

2.4.1 Clairautova rovnice $x = tx' + g(x')$

Rovnici $x = tp + g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= p + t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= \big(t + g'(p)\big)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Musí tedy být $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = 0$ nebo $t = -g'(p)$.
Z první rovnosti a dané rovnice dostaneme obecné řešení

$$x(t) = ct + g(c),$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta; z druhé rovnice dostaneme parametrické vyjádření singulárního řešení

$$\begin{aligned} t &= -g'(p) \\ x &= -pg'(p) + g(p)\,, \end{aligned}$$

kde p je parametr.

2.4.2 Lagrangeova rovnice $x = tf(x') + g(x')$

Rovnici $x = tf(p) + g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= f(p) + tf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ p - f(p) &= \big(tf'(p) + g'(p)\big)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Má-li rovnice $p - f(p) = 0$ řešení $p \equiv c$, pak $x(t) = ct + c_1$ je singulárním řešením dané rovnice. Konstantu c_1 určíme dosazením do dané rovnice:

$$\begin{aligned} ct + c_1 &= tf(c) + g(c) \\ c_1 &= t\big(f(c) - c\big) + g(c) \end{aligned}$$

a poněvadž $f(c) = c$, je $c_1 = g(c)$. Singulární řešení Lagrangeovy rovnice tedy je

$$x(t) = ct + g(c)\,,$$

kde c je řešením rovnice $c = f(c)$ (je pevným bodem funkce f).
Pro $p \neq f(p)$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = \frac{tf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}\,,$$

což je lineární rovnice pro neznámou funkci t nezávisle proměnné p. Označíme-li její řešení $t = t(p) = \Phi(p)$, pak

$$\begin{aligned} t &= \Phi(p) \\ x &= f(p)\Phi(p) + g(p) \end{aligned}$$

je parametrickým vyjádřením obecného řešení Lagrangeovy rovnice.

2.5 Rovnice vyššího řádu, u nichž lze řád snížit

2.5.1 Autonomní rovnice druhého řádu $x'' = f(x)$

Rovnici vynásobíme $2x'$:

$$\begin{aligned} 2x'x'' &= 2x'f(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x'^2\right) &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \end{aligned}$$

Položíme-li $p = x'$, máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^2 &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x} &= 2f(x) \\ p^2 &= 2\int f(x)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Položíme dále $F(x) = 2\int f(x)\mathrm{d}x$ a dostaneme

$$\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{F(x)} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{F(x)}\,, \end{aligned}$$

což je rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.

Příklad na použití rovnice tohoto typu je model expandujícího Vesmíru 6.8.

2.5.2 Rovnice typu $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0,\ \ k \in \{1, \dots, n-1\}$

Položíme $y = y(t) = x^{(k)}(t)$ a dostaneme rovnici

$$F\big(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-k)}\big) \;=\; 0\,,$$

což je rovnice řádu o k nižšího, než daná rovnice.

Řešením rovnice tohoto typu je například „psí křivka“ uvedená v 6.5.

2.5.3 Autonomní rovnice typu $F\left(x, x', x'', \dots, x^{(n)}\right) \;=\; 0$

Položíme $p = p(t) = x'(t)$. Pak

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\ x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2 + p\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right)p\,. \end{aligned}$$

Postupujeme-li tak dále, vidíme, že

$$x^{(k)} \;=\; f_k\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}p}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right)$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. (f_k je nějaká funkce k proměnných.) Dosazením do původní rovnice tedy dostaneme

$$F\left(x, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, f_3\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right), \dots, f_n\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\right) \;=\; 0\,,$$

neboli

$$G\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \dots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) \;=\; 0\,,$$

což je rovnice řádu o jedna nižšího, než daná rovnice.

Ještě si povšimněme, že rovnice tvaru 2.5.1 je speciálním případem dané rovnice.

2.5.4 Rovnice homogenní v $x, x', x'', \dots, x^{(n)}$

Nechť F je funkce $n+2$ proměnných splňující podmínky:

$$(t, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \operatorname{Dom} F \;\Rightarrow\; (t, cz_0, cz_1, cz_2, \dots, cz_n) \in \operatorname{Dom} F,$$

$$F(t, cz_0, cz_1, cz_2, \dots, cz_n) \;=\; c^\alpha F(t, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \tag{2.2}$$

pro každou kladnou konstantu c, každou $(n+2)$-tici $(t, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n) \in \operatorname{Dom} F$ a nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Řešení implicitní diferenciální rovnice n-tého řádu

$$F\big(t, x, x', x'' \dots, x^{(n)}\big) \;=\; 0 \tag{2.3}$$

lze hledat ve tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}, \tag{2.4}$$

kde $y = y(t)$ je nová neznámá funkce. Je totiž

$$\begin{aligned}
x' &= y\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\
x'' &= y'\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + y^2\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y' + y^2)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\
x''' &= (y'' + 2yy')\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + (y' + y^2)y\,\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y'' + 3yy' + y^3)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dosadíme-li pravé strany těchto rovností do dané rovnice, vypadne vzhledem k podmínce (2.2) faktor $\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}$ a dostaneme rovnici řádu o jedna nižšího, než byla daná rovnice.

V lineární homogenní rovnici prvního řádu

$$x' = a(t)x,$$

řešené v 2.3.1.1 je $F(t, x, x') = x' - a(t)x$. Tato funkce splňuje podmínku (2.2) s $\alpha = 1$. Substitucí (2.4) převedeme lineární homogenní diferenciální rovnici na tvar

$$y(t)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = a(t)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}.$$

Výsledná rovnice není diferenciální; v rovnici stupně nula se neobjevuje derivace hledané funkce. Proto můžeme bezprostředně vyjádřit $y(t) = a(t)$. Řešení lineární homogenní diferenciální rovnice je tedy tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t}$$

v souladu s výsledkem 2.3.1.1.

Poznámka 1. Slovo „homogenní" bez přívlastku se objevilo již u rovnice tvaru 2.2.3, rovnice (2.3) však není jejím speciálním případem. Terminologie vychází z pojmu „homogenní funkce":

Řekneme, že funkce $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je *homogenní řádu* $\alpha \in \mathbb{R}$, jestliže pro každou konstantu $c > 0$ platí

$$G(cx_1, cx_2, \ldots, cx_m) = c^\alpha G(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Ve funkci F na levé straně rovnice (2.3) můžeme proměnnou t (čas) považovat za parametr a podmínka (2.2) pak říká, že taková funkce je pro každou hodnotu parametru homogenní řádu 1.

Funkce $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$G(t, x) = f\left(\frac{x}{t}\right),$$

kde f je nějaká funkce jedné proměnné, je homogenní řádu 0, neboť platí

$$G(ct, cx) = f\left(\frac{cx}{ct}\right) = f\left(\frac{x}{t}\right) = c^0 f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Používaná terminologie je tedy opodstatněná.

2.6 Ekvidimensionální rovnice

Řekneme, že implicitní diferenciální rovnice n-tého řádu

$$F\big(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\big) = 0$$

je *ekvidimensionální v nezávisle proměnné*, jestliže změna měřítka nezávisle proměnné $t \mapsto at$ pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nezmění její tvar. Transformace $t = \mathrm{e}^\tau$ převede danou rovnici na rovnici autonomní (typ 2.5.3).

Uvažujme například lineární homogenní rovnici tvaru

$$x' = \frac{\alpha}{t}x, \quad \text{tj.} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha}{t}x. \tag{2.5}$$

Zavedeme novou nezávisle proměnnou s vztahem $s = at$, kde a je nějaká reálná konstanta. Hledanou funkci x budeme chápat jako funkci proměnné s, která sama je funkcí proměnné t. Vzorec pro derivaci složené funkce dává vyjádření

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}a.$$

Dosazením do rovnice dostaneme

$$a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{a\alpha}{s}x, \quad \text{tj.} \ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha}{s}x,$$

což je rovnice stejného tvaru jako (2.5), takže tato rovnice je ekvidimensionální v nezávisle proměnné. Její transformace $t = \mathrm{e}^\tau$ převede rovnici (2.5) na tvar

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(\frac{\alpha}{t}x\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\alpha}{\mathrm{e}^\tau}x\mathrm{e}^\tau = \alpha x,$$

tedy na rovnici autonomní

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \alpha x.$$

Významným případem ekvidimensionální rovnice je rovnice Eulerova vyšetřovaná v 4.4.5.

2.7 Cvičení

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

1) $2t(2x-3)\mathrm{d}t + (t^2+1)\mathrm{d}x = 0$

2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{t-x}$

3) $t\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \dfrac{t^2+1}{x}\mathrm{d}t = 0$

4) $\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}x + \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}t = 0$

5) $t^2\mathrm{d}x + (x^2 - tx)\mathrm{d}t = 0$

6) $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t+x}{x-t}$

7) $\left(t\sin\dfrac{x}{t} - x\cos\dfrac{x}{t}\right)\mathrm{d}t + t\cos\dfrac{x}{t}\,\mathrm{d}x = 0$

8) $2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x = \mathrm{e}^{t/2}$

9) $t\mathrm{d}x + x\mathrm{d}t = \sin t\mathrm{d}t$

10) $(t-1)^3x' + 4(t-1)^2x = t+1$

11) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}t + 2(t\mathrm{e}^{2x} - x)\mathrm{d}x = 0$

12) $(x^2+1)\mathrm{d}t + (2tx+1)\mathrm{d}x = 0$

13) $(t+x)\mathrm{d}t + (t+x^2)\mathrm{d}x = 0$

14) $t\mathrm{d}x - x\mathrm{d}t + t^3\mathrm{d}t = 0$

15) $(t^2+t-x)\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x = 0$

16) $(\cos t + x\cos t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}x = 0;\ x(\pi/2) = 0$

17) $x' + 2x = t;\ x(0) = 2$

18) $(t+2x)\mathrm{d}t + (x+2t)\mathrm{d}x = 0;\ x(1) = 1$

19) Určete konstanty a, b, c tak, aby rovnice $(at^2+bx^2)\mathrm{d}t + ctx\,\mathrm{d}x = 0$ byla exaktní a vyřešte ji.

20) Řešte počáteční úlohu pro implicitní rovnici druhého řádu

$$x\,x'' = t\left(x'\right)^2, \quad x(1) = 1,\ x'(1) = -1.$$

Výsledky:

1) $x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{C}{(t^2+1)^2}$ **2)** $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^t + C$ **3)** $\mathrm{e}^x(x-1) + \dfrac{t^2}{2} + \ln|t| = C$ **4)** $(x+\sqrt{x^2-1}\,)(t+\sqrt{t^2+1}\,) = C$ **5)** $x = \dfrac{t}{\ln|t| + C}$ **6)** $\dfrac{1}{2}\ln(t^2+x^2) + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{t} = C$ **7)** $x = t \arcsin\dfrac{C}{t}$ **8)** $x = \dfrac{t+C}{2}\mathrm{e}^{t/2}$ **9)** $x = \dfrac{C - \cos t}{t}$ **10)** $x = \dfrac{t^3 - 3t + C}{3(t-1)^4}$ **11)** $t = \dfrac{x^2+C}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ **12)** $t = \dfrac{C-x}{x^2+1}$ **13)** $\dfrac{t^2}{2} + tx + \dfrac{x^3}{3} = C$ **14)** $x = Ct - \dfrac{t^3}{2}$ **15)** $x = Ct - t^2 - t\ln|t|$ **16)** $x = \mathrm{e}^{1-\sin t} - 1$ **17)** $x = \dfrac{t}{2} + \dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-2t} - \dfrac{1}{4}$ **18)** $x = \sqrt{3t^2+6} - 2t$ **19)** $c = 2b$; $\dfrac{at^3}{3} + btx^2 = C$ **20)** $x = \exp\left(\sqrt[3]{2}\,\operatorname{arctg}\dfrac{1-t}{\sqrt[3]{2}}\right)$

Kapitola 3

Obecné vlastnosti diferenciálních rovnic

3.1 Existence a jednoznačnost řešení systému ODR

V tomto oddílu se budeme zabývat počáteční úlohou (1.5), (1.6) pro vektorovou diferenciální rovnici.

Lemma 1. *Buď funkce $\boldsymbol{f}$ spojitá na $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešením úlohy (1.5), (1.6) na intervalu J právě tehdy, když pro každé $t \in J$ je $\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big) \in G$ a*

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \boldsymbol{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,. \tag{3.1}$$

Důkaz:

„$\Rightarrow$“ Nechť $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešením úlohy (1.5), (1.6) na J. Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{x}(s) \;=\; \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)$$

na J. Integrací této rovnosti podle s v mezích $[t_0, t]$ dostaneme:

$$[\boldsymbol{x}(s)]_{s=t_0}^{t} = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t_0) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s$$

a vzhledem k (1.6) funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ splňuje (3.1).

„$\Leftarrow$“ Nechť funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ splňuje (3.1). Pak $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t_0} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s = \boldsymbol{x_0}$, tedy je splněna podmínka (1.6). Derivováním (3.1) podle t dostaneme (1.5). $\square$

Nechť $C^1(J)$ je množina (vektorových) funkcí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ diferencovatelných na uzavřeném intervalu J takových, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$. Na této množině zavedeme metriku

$$\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| : t \in J\}$$

(metrika stejnoměrné konvergence). Prostor $\big(C^1(J), \varrho\big)$ je úplný (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, I.1.1.2.iv a III.1.3.6.i). Dále definujme zobrazení $F : C^1(J) \to C^1(J)$ předpisem:

$$F(\boldsymbol{x})(t) \;=\; \boldsymbol{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,. \tag{3.2}$$

Řešení úlohy (1.5), (1.6), tedy funkce, která splňuje integrální rovnici (3.1), je zřejmě pevným bodem zobrazení F.

Podaří-li se tedy ukázat, že F je kontrakce úplného metrického prostoru $\big(C^1(J), \varrho\big)$, z Banachovy věty vyplyne, že existuje jediný pevný bod tohoto zobrazení, tedy že existuje jediné diferencovatelné řešení úlohy (1.5), (1.6) (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, IV.2. a V.1.).

Věta 1 (Picard (1856–1941)–Lindelöf (1870–1946))**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Označme*

$$\tilde{J} = [t_0, t_0 + a], \quad D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \le b\}, \tag{3.3}$$

$$m = \max\{\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| : (t, \boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\}, \quad \delta = \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}.$$

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a vzhledem k $\boldsymbol{x}$ Lipschitzovská (tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \le L\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ pro všechna $t \in \tilde{J}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$). Pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (1.5), (1.6) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.

Toto řešení je (stejnoměrnou) limitou posloupnosti funkcí $\{\boldsymbol{x_n}(t)\}_{n=0}^{\infty}$; tato posloupnost je definována rekurentně vztahem

$$\boldsymbol{x_{k+1}}(t) = \boldsymbol{x_0} + \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}_k(s)\big)\mathrm{d}s, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Důkaz: Je-li funkce $\boldsymbol{x}$ diferencovatelná, pak je spojitá (sr. V. Novák: *Diferenciální počet v R.* MU, Brno 1997, kap. V, věta 1.2). Proto je funkce $\boldsymbol{y}(t) = F(\boldsymbol{x})(t)$ diferencovatelná a pro její derivaci platí $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$ (sr. V. Novák: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$. MU, Brno 2001, 2.4, věta 4.2). To znamená, že zobrazení F definované vztahem (3.2) zobrazuje množinu $C^1(J)$ do sebe. Buď $K > L$. Na $C^1(J)$ zavedeme metriku ϱ^* vztahem

$$\varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\left\{\mathrm{e}^{-K(t-t_0)}\, \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| : t \in J\right\}.$$

Tato metrika je na $C^1(J)$ ekvivalentní s metrikou stejnoměrné konvergence ϱ, neboť

$$\mathrm{e}^{-K\delta}\varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le \varrho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,.$$

Prostor $\big(C^1(J), \varrho^*\big)$ je tedy úplný.

Položme $P = \{\boldsymbol{x} \in C^1(J) : \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_0}\| \le b$ pro každé $t \in J\}$. Poněvadž $\overline{P}$ je uzavřená podmnožina množiny $C^1(J)$, je prostor $(\overline{P}, \varrho^*)$ úplný (sr. sc Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, III.1.3.3). Zobrazení F zobrazuje množinu $\overline{P}$ do sebe, neboť pro každou funkci $\boldsymbol{x} \in P$ platí

$$\|F(\boldsymbol{x})(t) - \boldsymbol{x}^0\| \;=\; \left\|\int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\right\| \;\le\; \int\limits_{t_0}^{t} \big\|\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\big\|\,\mathrm{d}s \;\le (t - t_0)m \le \delta m \;\le b\,.$$

Ukážeme, že F je kontrakcí prostoru $(\overline{P}, \varrho^*)$: Pro každé $t \in J$ platí

$$
\begin{aligned}
\varrho^*\big(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})\big) &\leq \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \|F(\boldsymbol{x})(t) - F(\boldsymbol{y})(t)\| = \\
&= \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \left\| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{y}(s)\big) \mathrm{d}s \right\| \leq \\
&\leq \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \big\|\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) - \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{y}(s)\big)\big\| \,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L \|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\| \,\mathrm{d}s = \\
&= L \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)} \mathrm{e}^{-K(s-t_0)} \|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)\| \,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)} \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}s = \\
&= L \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left[\frac{1}{K} \mathrm{e}^{-K(t-s)}\right]_{s=t_0}^{t} = \\
&= \frac{L}{K} \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left(1 - \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}\right) \leq \\
&\leq \frac{L}{K} \varrho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \,.
\end{aligned}
$$

Poněvadž $L < K$, je $\dfrac{L}{K} < 1$, což znamená, že F je kontrakce. □

Poznámka 2. Posloupnost funkcí zavedená ve větě 1 se nazývá *Picardova posloupnost postupných aproximací.*

Poznámka 3. Analogické tvrzení platí, nahradíme-li ve větě 1 interval $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a]$ intervalem $[t_0 - a, t_0]$ nebo intervalem $[t_0 - a, t_0 + a]$.

Poznámka 4. Má-li funkce

$$
\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}
$$

ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ na množině $\tilde{J} \times D$ (zavedené rovností (3.3)), pak jsou předpoklady Picardovy-Lindelöfovy věty splněny.

Důkaz: Množina $\tilde{J} \times D$ jakožto uzavřená a ohraničená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ je kompaktní (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, III.3.3.16). Z ohraničenosti parciálních derivací funkce $\boldsymbol{f}$ plyne existence čísla

$$
M = \max \left\{ \frac{\partial f_i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_j} : i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n,\ (t, \boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D \right\} .
$$

Podle věty o střední hodnotě pro funkce více proměnných (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 3.4) pro všechna $t \in \tilde{J}$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$ existují čísla ξ_k ležící mezi x_k a y_k, $k = 1, 2, \dots, n$ taková, že

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\| &= \sum_{i=1}^{n} |f_i(t,\boldsymbol{x}) - f_i(t,\boldsymbol{y})| = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \dots, y_n)(x_k - y_k) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \right| |x_k - y_k| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M|x_k - y_k| = \sum_{i=1}^{n} M \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = nM \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| ,
\end{aligned}$$

takže funkce $\boldsymbol{f}$ je vzhledem k $\boldsymbol{x}$ Lipschitzovská s konstantou nM. □

Důsledek 1. *Má-li (vektorová) funkce*

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ *v jistém okolí bodu* $(t_0, \boldsymbol{x_0})$*, pak počáteční problém* (1.5), (1.6) *má v okolí* t_0 *jediné řešení.*

Důsledek 2. *Má-li (skalární) funkce* $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ohraničené parciální derivace podle každé z proměnných* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *v jistém okolí bodu* $(t_0, x_0, x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$*, pak počáteční problém* (1.7), (1.8) *má v okolí* t_0 *jediné řešení.*

Věta 2 (Peano 1890)**.** *Buďte* $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. *Označme*

$$\tilde{J} = [t_0, t_0 + a], \quad D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\right\| \leq b\},$$

$$m = \max\{\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\| : (t,\boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\}, \quad \delta = \min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}.$$

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá. Pak existuje alespoň jedno řešení počátečního problému* (1.5), (1.6) *definované na intervalu* $J = [t_0, t_0 + \delta]$.

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 67–70. □

3.2 Globální vlastnosti řešení systému ODR

Věta 3 (o existenci úplného řešení)**.** *Nechť funkce* $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá na otevřené množině* $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. *Je-li* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ *řešení rovnice* (1.5)*, pak je toto řešení buď úplné, nebo existuje úplné řešení* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$*, které je prodloužením řešení* $\boldsymbol{x}$.

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 73–76. Důkaz využívá věty 2. □

Definice 7. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je *lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\boldsymbol{x}$*, jestliže ke každému $(\tau, \boldsymbol{a}) \in G$ existuje okolí $\mathcal{O}_{\tau,\boldsymbol{a}} \subseteq G$ a číslo $L_{\tau,\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{O}_{\tau,\boldsymbol{a}}$ platí $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})\| \leq L_{\tau,\boldsymbol{a}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Věta 4 (o globální jednoznačnosti)**.** *Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\boldsymbol{x}$ a nechť funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ jsou dvě řešení rovnice* (1.5)*. Jestliže existuje t_0 takové, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0)$, pak $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ pro všechna t, v nichž jsou řešení $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ definována.*

Důkaz: Připusťme, že existuje $b > t_0$ takové, že $\boldsymbol{x}(b) \neq \boldsymbol{y}(b)$. Označme $c = \inf\{t : \boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{y}(t)\}$.
Funkce $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou spojité (poněvadž jsou diferencovatelné).
Ukážeme, že $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$:
Připusťme, že $\boldsymbol{x}(c) \neq \boldsymbol{y}(c)$. Položme $\varepsilon = \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c)\|$. Pak $\varepsilon > 0$
K $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t \in (c-\delta, c)$ je $\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)\| < \frac{\varepsilon}{4}$ a $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(c)\| < \frac{\varepsilon}{4}$.
Poněvadž pro $t \in (c - \delta, c)$ je $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$, platí pro $t \in (c - \delta, c)$ nerovnost

$$\varepsilon = \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c)\| = \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)\| \leq \|\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{x}(t)\| + \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)\| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

což je spor, neboť $\varepsilon > 0$, a tedy $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$.
Podle věty 1 nyní existuje α takové, že pro $t \in [c, c + \alpha]$ je $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$, což je spor.
Analogicky vyloučíme možnost existence $b < t_0$ takového, že $\boldsymbol{x}(b) \neq \boldsymbol{y}(b)$. □

Definice 8. Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.5) definované na intervalu (S, T), kde $-\infty \leq S < T \leq \infty$.
Řekneme, že $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je

ω-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k < T$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = T$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi}$;

α-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k > S$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = S$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi}$;

limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$, jestliže je ω-limitním bodem nebo α-limitním bodem.

Množina všech ω-limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *ω-limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*, množina všech α-limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *α-limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*, množina všech limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*.

Příklady:

1. $x = \mathrm{e}^{at}$ je úplné řešení rovnice $x' = ax$ definované na intervalu $(-\infty, \infty)$. Je-li $a > 0$, pak 0 je α-limitním bodem tohoto řešení a ω-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a < 0$, pak 0 je ω-limitním bodem tohoto řešení a α-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a = 0$, pak 1 je α- i ω-limitním bodem tohoto řešení.

2. $x = \sin\frac{1}{t}$ je úplné řešení rovnice $x' = -\frac{1}{t^2}\sqrt{1 - x^2}$ definované na intervalu $(-\infty, 0)$. Interval $[-1, 1]$ je ω-limitní množinou tohoto řešení.

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \operatorname{tg} t \\ \sin \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$ je úplné řešení soustavy rovnic $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\cos^2 t} \\ \dfrac{x}{\cos^2 t} \end{pmatrix}$ definované na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Limitní množina tohoto řešení je $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Věta 5. *Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je úplné řešení rovnice (1.5) definované na intervalu (S,T). Pak platí:*
$T = \infty$ nebo $\lim\limits_{t \to T-} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty$ nebo každý ω-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$ leží na hranici G.
$S = -\infty$ nebo $\lim\limits_{t \to S+} \|\boldsymbol{x}(t)\| = \infty$ nebo každý α-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$ leží na hranici G.

Důkaz: Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.5) definované na intervalu (S,T), $T < \infty$ a buď $\boldsymbol{\xi}$ jeho ω-limitní bod. Kdyby $(T, \boldsymbol{\xi}) \in G$, pak by existovalo okolí $\mathcal{O}_{T,\boldsymbol{\xi}}$ bodu $(T,\boldsymbol{\xi})$ takové, že $\mathcal{O}_{T,\boldsymbol{\xi}} \subseteq G$, neboť G je otevřená. Podle věty 2 by existovalo řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ rovnice (1.5) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(T) = \boldsymbol{\xi}$ definované na $[T, T+\delta]$, kde δ je vhodné (malé) číslo. Funkce

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & S < t < T \\ \boldsymbol{y}(t), & T + \delta \end{cases}$$

by byla řešením rovnice (1.5), které by bylo prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$, což by byl spor s úplností řešení $\boldsymbol{x}$.
Pro α-limitní bod se důkaz provede analogicky s využitím „levostranné varianty“ věty 2. □

Důsledek 3. *Nechť $J = [t_0, \infty)$, $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| < a\}$, kde $t_0 \in \mathbb{R}$ a $0 < a \leq \infty$ a nechť vektorová funkce $\boldsymbol{f} : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pokud existuje spojitá funkce $g : J \to \mathbb{R}$ taková, že úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ rovnice (1.5) definované na (S,T) splňuje pro každé $t \in [t_0, T)$ podmínku $\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq g(t) < a$, pak $T = \infty$.*

Důsledek 4. *Nechť $J = [t_0, \infty)$ a funkce $\boldsymbol{f} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Jestliže existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $(t, \boldsymbol{x}) \in J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\| \leq m$, pak každé úplné řešení rovnice (1.5) je definováno pro všechna $t \geq t_0$.*

Důkaz: Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.5). Podle lemma 1 je

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) \mathrm{d}s \, .$$

Pro každé t, pro něž je $\boldsymbol{x}(t)$ definováno, platí

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \; = \; \left\| \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) \mathrm{d}s \right\| \; \leq \; \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\| \, \mathrm{d}s \; \leq \; \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + m(t - t_0) \, .$$

Tvrzení tedy plyne z důsledku 3, položíme-li $g(t) = \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + m(t - t_0)$. □

Toto tvrzení umožňuje rozhodnout, zda lze každé řešení rovnice (1.5) prodloužit do nekonečna, aniž bychom toto řešení znali.

Věta 6. *Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina a nechť pro každé $k = 1, 2, \dots$ je vektorová funkce $\boldsymbol{f_k} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(t_k, \boldsymbol{\xi_k}) \in \Omega$. Označme $\boldsymbol{x_k} = \boldsymbol{x_k}(t)$ úplné řešení počátečního problému*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f_k}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi_k}.$$

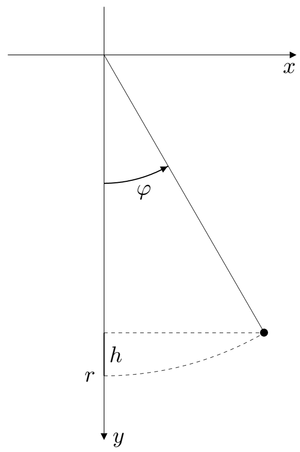
Jestliže posloupnost funkcí $\{\boldsymbol{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $\boldsymbol{f_\infty} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině $K \subseteq \Omega$, posloupnost bodů $\{(t_k, \boldsymbol{\xi_k})\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $(t_\infty, \boldsymbol{\xi_\infty})$ a počáteční úloha

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f_\infty}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(t_\infty) = \boldsymbol{\xi_\infty}$$

má jediné úplné řešení $\boldsymbol{x_\infty} = \boldsymbol{x_\infty}(t)$ definované na intervalu J, pak posloupnost funkcí $\{\boldsymbol{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k funkci $\boldsymbol{x_\infty}$ stejnoměrně na každém intervalu $[a, b] \subseteq J$.

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 80–82. □

Příklad (Matematické kyvadlo)



Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném vlákně délky r na který působí pouze gravitační síla. Lze ho realizovat jako kuličku zavěšenou na niti, přičemž průměr kuličky je zanedbatelný vzhledem k délce niti a hmotnost niti je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti kuličky.

Zavedeme souřadný systém podle obrázku tak, že vodorovná osa x směřuje zleva doprava a svislá osa y směřuje shora dolů a kyvadlo je zavěšeno v počátku souřadnic. Označme $\varphi = \varphi(t)$ výchylku kyvadla od rovnovážné polohy v čase t. Poloha hmotného bodu v čase t je dána souřadnicemi

$$x = x(t) = r \sin \varphi(t), \qquad y = y(t) = r \cos \varphi(t).$$

Vektor rychlosti hmotného bodu je derivací jeho polohy podle času, velikost $v = v(t)$ rychlosti v čase t je euklidovskou délkou tohoto vektoru, tj.

$$\big(v(t)\big)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \big(r\varphi'(t)\cos\varphi(t)\big)^2 + \big(-r\varphi'(t)\sin\varphi(t)\big)^2 = \big(r\varphi'(t)\big)^2.$$

Výška $h = h(t)$ hmotného bodu nad rovnovážnou polohou $y = r$ v čase t je rovna

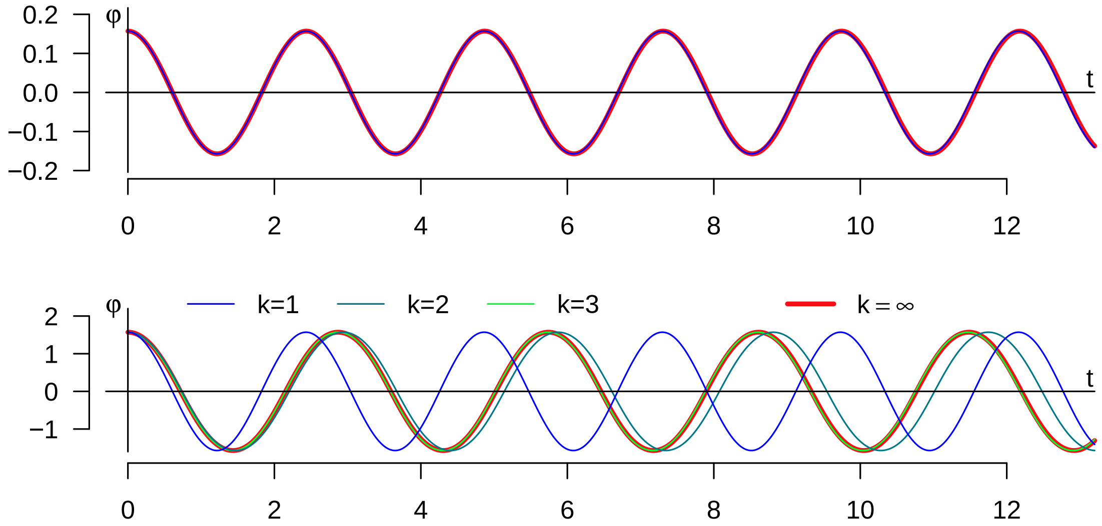
$$h(t) = r - y(t) = r\big(1 - \cos\varphi(t)\big).$$

Podle zákona zachování energie je součet kinetické a potenciální energie hmotného bodu konstantní, tj.

$$\frac{1}{2} m \big(v(t)\big)^2 + mgh(t) = const;$$

přitom $g \doteq 6{,}674\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Do předchozí rovnosti dosadíme vypočítané v a h a dělíme ji konstantou r. Dostaneme

$$\frac{1}{2} r \big(\varphi'(t)\big)^2 + g\big(1 - \cos\varphi(t)\big) = const.$$



Obrázek 3.1: Řešení úloh (3.8) pro $k \in \{1, 2, 3\}$ a řešení úlohy (3.6), tj. úlohy (3.8) pro $k = \infty$. Počáteční podmínky jsou $\varphi_0 = \frac{1}{20}\pi$ (nahoře) a $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ (dole).

Tuto rovnost derivujeme podle času

$$r\varphi'(t)\varphi''(t) + g\varphi'(t)\sin\varphi(t) = 0,$$

a upravíme

$$\varphi'(t)\big(r\varphi''(t) + g\sin\varphi(t)\big) = 0.$$

Dostáváme tedy dvě diferenciální rovnice pro časově proměnnou výchylku kyvadla $\varphi = \varphi(t)$:

$$\varphi' = 0, \qquad \varphi'' = -\frac{g}{r}\sin\varphi(t). \tag{3.4}$$

Nechť na začátku procesu je výchylka hmotného bodu rovna úhlu $\varphi_0 \neq 0$ a jeho rychlost, tj. změna výchylky, je nulová (kuličku vychýlíme a pustíme). Dostáváme tak počáteční podmínky

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{3.5}$$

Řešení první z rovnic (3.4) s počáteční podmínkou (3.5) je konstantní funkce $\varphi(t) \equiv \varphi_0$. Toto řešení není fyzikálně realistické, neboť hmotný bod pod vlivem gravitační nemůže zůstat vychýlený z rovnovážné polohy a nepohybovat se.

Dosavadními úvahami dostáváme model pohybu matematického kyvadla jako počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$\varphi'' = -\frac{g}{r}\sin\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0,\ \varphi'(0) = 0,$$

kterou můžeme podle tvrzení 1 v 1.3 přepsat jako počáteční úlohu pro systém dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi, \\ \psi' &= -\frac{g}{r}\sin\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0,\ \psi(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tuto počáteční úlohu neumíme vyřešit explicitně. Funkci sinus však můžeme vyjádřit jako stejnoměrně konvergentní Maclaurinovu řadu

$$\sin\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\varphi^{2i-1}}{(2i-1)!}.$$

Označme nyní $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$. Pro $k = 1, 2, \dots$ zavedeme vektorové funkce $\boldsymbol{f_k}$ a body $(t_k, \boldsymbol{\xi_k})$ následujícími formulemi

$$\boldsymbol{f_k}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f_k}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \psi \\ -\frac{g}{r}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{\varphi^{2i-1}}{(2i-1)!} \end{pmatrix}, \qquad t_k = 0,\ \boldsymbol{\xi_k} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Funkce $\boldsymbol{f_k}$ a body $(t_k, \boldsymbol{\xi_k})$ splňují předpoklady věty 6 s $\Omega = \mathbb{R}^3$. Úloha

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f_\infty}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}(t_\infty) = \boldsymbol{\xi_\infty} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

je totožná s úlohou (3.6). Poněvadž všechny parciální derivace

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_1}{\partial\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\psi} = 1,$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_2}{\partial\varphi} = \frac{\partial\left(-\frac{g}{r}\sin\varphi\right)}{\partial\varphi} = -\frac{g}{r}\cos\varphi, \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{f_\infty})_2}{\partial\psi} = \frac{\partial\left(-\frac{g}{r}\sin\varphi\right)}{\partial\psi} = 0$$

jsou ohraničené, je podle poznámky 4 úloha (3.7) jednoznačně řešitelná. To znamená, že řešení úlohy (3.6) je stejnoměrnou limitou řešení úloh

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi, \\ \psi' &= -\frac{g}{r}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\frac{\varphi^{2i-1}}{(2i-1)!}, \qquad \varphi(0) = \varphi_0,\ \psi(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Na obrázku 3.1 je první složka řešení (výchylka kyvadla φ) několika těchto úloh; nahoře pro počáteční hodnotu $\varphi_0 = \frac{1}{20}\pi$, dole pro $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$. Vidíme, že v případě malé počáteční výchylky již první člen posloupnosti dostatečně přesně aproximuje řešení úlohy (3.6). V případě velké počáteční výchylky, dokonce maximální možné, je řešení úlohy (3.6) dostatečně přesně aproximováno třetím členem posloupnosti řešení úloh (3.8).

Malé kmity matematického kyvadla lze tedy modelovat systémem rovnic

$$\varphi' = \psi, \quad \psi' = -\frac{g}{r}\varphi,$$

který je ekvivalentní s rovnicí druhého řádu $\varphi'' + \frac{g}{r}\varphi = 0$. ■

Věta 7 (o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech)**.** *Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{R}^{1+n+m}$ a nechť spojitá vektorová funkce $\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je taková, že pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ splňující podmínku $(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) \in \Omega$, má počáteční problém*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$$

právě jedno úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$. Pak toto řešení, chápané jako zobrazení

$$\mathbb{R}^{1+1+n+m} \to \mathbb{R}^n,$$

je spojité.

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 82–83. □

Tato věta říká, že změní-li se málo funkce $\boldsymbol{f}$ v rovnici (1.5) a málo se změní počáteční podmínka (1.6), pak se řešení nového — změněného — problému liší na konečném intervalu málo od řešení původního problému.

3.3 Odhady řešení

Definice 9. Řešení $x^* = x^*(t)$ úlohy (1.1), (1.3) se nazývá *maximální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x(t) \leq x^*(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.
Řešení $x_* = x_*(t)$ úlohy (1.1), (1.3) se nazývá *minimální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x_*(t) \leq x(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.

Příklad

Uvažujme počáteční úlohu

$$x' = \sqrt[3]{x^2}, \qquad x(0) = 0. \tag{3.9}$$

Přímým výpočtem ověříme, že kterákoliv z funkcí

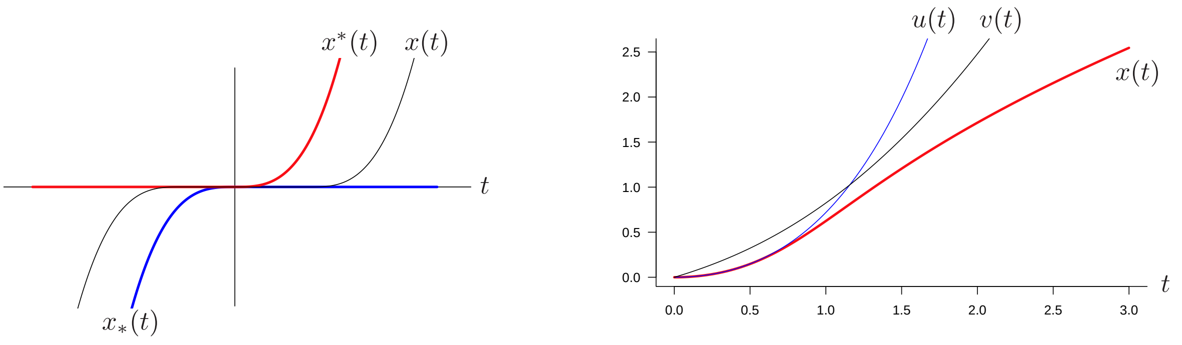
$$x(t) \equiv 0, \qquad x(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ (t-a)^3, & t \geq a, \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} (t+a)^3, & t < -a, \\ 0, & t \geq -a, \end{cases},$$

$$x(t) = \begin{cases} (t+b)^3, & t < -b, \\ 0, & -b \leq t \leq a, \\ (t-a)^3, & t \geq a, \end{cases}$$

kde a, b jsou nezáporné konstanty, je jejím úplným řešením. Minimální a maximální řešení úlohy (3.9) tedy jsou funkce

$$x_*(t) = \begin{cases} t^3, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0, \end{cases} \qquad x^*(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t^3, & t \geq 0; \end{cases}$$

řešení je znázorněno na obrázku 3.2 a). ■



a) b)

Obrázek 3.2: a) Maximální a minimální řešení počáteční úlohy (3.9). b) Odhady řešení $x = x(t)$ úlohy (3.10) s hodnotami $t_0 = x_0 = 0$.

Věta 8 (srovnávací)**.** *Nechť* $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 < a \le \infty$, $J = [t_0, \infty)$, $G = \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J, \|\boldsymbol{x}\| < a\}$. *Nechť dále* $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá funkce a* $g : J \times [0, a) \to [0, \infty)$ *je spojitá funkce taková, že* $\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \le g(t, \|\boldsymbol{x}\|)$ *pro* $(t, \boldsymbol{x}) \in G$. *Buď* $u_0 \ge \|\boldsymbol{x}_0\|$ *a* $u^* = u^*(t)$ *maximální řešení úlohy*

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

na intervalu J.

Pak každé úplné řešení úlohy (1.5), (1.6) *je definováno pro všechna* $t \in J$ *a platí*

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le u^*(t) \quad \textit{pro } t \in J\,.$$

Důkaz: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 91. □

Příklad

Najdeme odhad řešení počátečního problému

$$x' = \frac{t + x}{1 + x^2}, \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.10}$$

na intervalu $[t_0, \infty)$.

Pravou stranu rovnice můžeme chápat jako funkci jedné proměnné x s jedním parametrem t. Standardními metodami diferenciálního počtu najdeme globální maximum a minimum této funkce; konkrétně, pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{2} \le \frac{t + x}{1 + x^2} \le \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2}.$$

Odtud plyne že $\left| \dfrac{t + x}{1 + x^2} \right| \le \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)$. Počáteční úloha

$$u' = \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{2}, \qquad u(t_0) = |x_0|$$

má podle 2.2.1 jediné řešení

$$u(t) = |x_0| + \frac{1}{4}\left(t^2 + t\sqrt{t^2 + 1} - t_0^2 - t_0\sqrt{t_0^2 + 1} + \ln \frac{t + \sqrt{t^2 + 1}}{t_0 + \sqrt{t_0^2 + 1}}\right)$$

a podle srovnávací věty 8 platí $|x(t)| \leq u(t)$ pro všechna $t \geq t_0$.

Řešení úlohy (3.10) pro $t_0 \geq 0$ lze odhadnout i jiným způsobem. V takovém případě totiž platí

$$\left|\frac{t+x}{1+x^2}\right| = \frac{|t+x|}{1+x^2} \leq \frac{t+|x|}{1+x^2} \leq t+|x|.$$

Jediné řešení počáteční úlohy

$$v' = v + t, \qquad v(t_0) = |x_0|$$

pro nehomogenní lineární rovnici je podle 2.3.1 rovno

$$v(t) = \big(|x_0| + t_0 + 1\big)\mathrm{e}^{t-t_0} - t - 1$$

a podle srovnávací věty 8 platí $|x(t)| \leq v(t)$ pro všechna $t \geq t_0 \geq 0$.

Poznamenejme ještě, že nelze říci, že by některý z uvedených odhadů u, v řešení úlohy (3.10) byl lepší než druhý. Situace je znázorněna na obrázku 3.2 b). ■

Důsledek 5. *Nechť symboly t_0, a, J, G mají stejný význam jako ve větě 8. Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a nechť existuje spojitá funkce $\varphi : J \to [0, \infty)$ taková, že*

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq \varphi(t)\,\|\boldsymbol{x}\| \quad \textit{pro } (t, \boldsymbol{x}) \in G.$$

Pak pro každé $\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\|\boldsymbol{x_0}\| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau < a \quad \textit{pro všechna } t \in J,$$

jsou úplná řešení úlohy (1.5), (1.6) definována na celém intervalu J a platí

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \|\boldsymbol{x_0}\| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \textit{pro } t \in J.$$

Důkaz plyne z věty 8 volbou $g(t, u) = \varphi(t)u$, $u_0 = \|\boldsymbol{x_0}\|$.
Jediné úplné (tedy maximální) řešení úlohy $u' = \varphi(t)u$, $u(t_0) = u_0$ je podle 2.3.1

$$u(t) = u_0 \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

□

Kapitola 4

Lineární rovnice

4.1 Lineární rovnice

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu je tvaru

$$x' = a(t)x + b(t). \tag{4.1}$$

O funkcích a, b budeme předpokládat, že jsou spojité na intervalu J. Pak pro všechna $t_0 \in J$, $x_0 \in \mathbb{R}$ má rovnice (4.1) s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.2}$$

jediné řešení; to plyne z poznámky 4 za větou 1, neboť

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(a(t)x + b(t)\big) = a(t)$$

a funkce a jakožto spojitá nabývá pouze konečných hodnot. Toto řešení je dáno formulí

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s} + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_{s}^{t} a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s. \tag{4.3}$$

Řešení lze najít některým z postupů uvedených v 2.3.1 nebo stačí přímým výpočtem ověřit, že funkce x daná rovností (4.3) skutečně řeší úlohu (4.1), (4.2).

Lineární rovnice (4.1) se nazývá *homogenní,* pokud $b \equiv 0$; v opačném případě se nazývá *nehomogenní.*

Z vyjádření (4.3) vidíme, že řešení homogenní rovnice

$$x' = a(t)x \tag{4.4}$$

s počáteční podmínkou (4.2) je dáno výrazem

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}. \tag{4.5}$$

Jinak řečeno, libovolné řešení homogenní rovnice (4.4) je násobkem funkce y definované vztahem

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s} \tag{4.6}$$

Toto pozorování nás opravňuje funkci y nazvat *fundamentálním řešením lineární homogenní rovnice* (4.4). Ze známých vlastností exponenciální funkce plyne, že $y(t) \neq 0$ pro každé $t \in J$. Jinak můžeme také říci, že množina všech řešení lineární homogenní rovnice tvoří jednodimenzionální vektorový prostor nad polem reálných čísel a fundamentální řešení y je bází tohoto prostoru.

Obraťme nyní pozornost na nehomogenní lineární rovnici (4.1). Lineární homogenní rovnici (4.4) nazveme *přidruženou* k nehomogenní rovnici (4.1). Označme $\tilde{x}(t)$ druhý sčítanec na pravé straně rovnosti (4.3). Pak platí $\tilde{x}(t_0) = 0$ a

$$\tilde{x}'(t) = b(t)\mathrm{e}^{\int_t^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma} + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s = b(t) + \int_{t_0}^{t} b(s)a(t)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s =$$
$$= b(t) + a(t)\int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s = b(t) + a(t)\tilde{x}(t).$$

To znamená, že funkce $\tilde{x}$ je partikulárním řešením nehomogenní rovnice (4.1) s počáteční podmínkou $x(t_0) = 0$. Počáteční hodnota x_0 v podmínce (4.2) byla libovolná, proto můžeme pravou stranu rovnosti (4.5) považovat za obecné řešení lineární homogenní rovnice. Tyto výsledky můžeme shrnout:

Tvrzení 2. Obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (4.1) je součtem obecného řešení přidružené lineární homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice s nulovou počáteční podmínkou.

S využitím fundamentálního řešení y homogenní rovnice můžeme řešení (4.3) počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici zapsat v některém z tvarů

$$x(t) = x_0 y(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{y(t)}{y(s)} b(s)\mathrm{d}s = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y(s)}\mathrm{d}s \right) y(t).$$

4.1.1 Lineární rovnice s konstantním koeficientem

Uvažujme lineární homogenní rovnici (4.4), v níž je funkce a konstantní, $a \equiv \alpha$, tedy rovnici

$$x' = \alpha x. \tag{4.7}$$

V tomto případě je $\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} \alpha\mathrm{d}s = \alpha(t - t_0)$, takže fundamentální řešení (4.6) rovnice (4.7) je

$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}. \tag{4.8}$$

Platí tedy $y \equiv 1$ pro $\alpha = 0$; pro $\alpha > 0$, resp. $\alpha < 0$ je funkce y ryze rostoucí, resp. klesající, a platí

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Koeficient α tedy určuje kvalitativní vlastnosti řešení rovnice (4.7): pro α kladné je každé řešení neohraničené (monotonně roste do ∞, nebo monotonně klesá do $-\infty$), pro α záporné každé řešení monotonně vymizí (jeho hodnota se přiblíží libovolně blízko k nule); v mezním případě $\alpha = 0$ je každé řešení konstantní.

Řešení počáteční úlohy pro lineární nehomogenní rovnici s konstantním koeficientem

$$x' = \alpha x + b(t)$$

a počáteční podmínkou (4.2) je podle (4.3) dáno formulí

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = \left(x_0 \mathrm{e}^{-\alpha t_0} + \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s \right) \mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Pokud je i nehomogenita b konstantní, $b \equiv \beta$, platí

$$\int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\alpha(t-s)}\mathrm{d}s = \beta \mathrm{e}^{\alpha t} \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}s = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} - 1\right), & \alpha \neq 0, \\ \beta(t - t_0), & \alpha = 0. \end{cases}$$

Řešení rovnice

$$x' = \alpha x + \beta \tag{4.9}$$

s počáteční podmínkou (4.2) je pro $\alpha \neq 0$ dáno některým z ekvivalentních vyjádření

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} - 1\right) = \left(x_0 + \frac{\beta}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)} - \frac{\beta}{\alpha}$$

a pro $\alpha = 0$ je

$$x(t) = x_0 + \beta(t - t_0).$$

Vidíme, že řešení x úlohy (4.9), (4.2) má pro $\alpha < 0$ vlastnost

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -\frac{\beta}{\alpha}$$

a pro $\alpha \geq 0$ je řešení neohraničené (monotonně diverguje do $+\infty$ nebo $-\infty$).

4.1.2 Lineární rovnice s periodickým koeficientem

Nechť f je ω-periodická funkce, tj. funkce definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ taková, že existuje konstanta $\omega > 0$ taková, že $f(t + \omega) = f(t)$. Pro takové funkce zavedeme označení

$$\bar{f} = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\omega} f(s)\mathrm{d}s.$$

Snadno nahlédneme, že

$$\bar{f} = \frac{1}{\omega}\int_{t}^{t+\omega} f(s)\mathrm{d}s$$

pro libovolnou hodnotu t. Veličina $\bar{f}$ představuje integrální průměr hodnot funkce f přes interval délky periody.

Buď nyní t libovolné kladné číslo a N největší celé číslo takové, že $N\omega \leq t$, tj. $N = [t/\omega]$. Pak

$$\int\limits_0^{t-N\omega} \big(f(s) - \bar{f}\big)\mathrm{d}s < \infty,$$

neboť na levé straně je integrál ze spojité (a tedy ohraničené) funkce na konečném intervalu. Dále platí

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{t}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{i\omega}^{(i+1)\omega} f(s)\mathrm{d}s + \int\limits_{N\omega}^{t} f(s)\mathrm{d}s\right) = \frac{1}{t}\left(N\omega\bar{f} + \int\limits_0^{t-N\omega} f(s)\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\left(\big(t-(t-N\omega)\big)\bar{f} + \int\limits_0^{t-N\omega} f(s)\mathrm{d}s\right) = \bar{f} + \frac{1}{t}\int\limits_0^{t-N\omega}\big(f(s)-\bar{f}\big)\mathrm{d}s.$$

Limitním přechodem $t \to \infty$ odtud dostaneme

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)\mathrm{d}s = \bar{f}.$$

Hodnota $\bar{f}$ tedy také vyjadřuje integrální průměr z funkce f přes neomezený interval.

Uvažujme lineární homogenní rovnici (4.4) s ω-periodickou funkcí a. Označme

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\int\limits_0^t (a(s)-\bar{a})\mathrm{d}s}.$$

Pak funkce φ je definovaná na celém intervalu $(-\infty, \infty)$ a je zde spojitá, je nezáporná a splňuje podmínku $\varphi(0) = 1$. Poněvadž platí

$$\int\limits_0^{t+\omega}\big(a(s)-\bar{a}\big)\mathrm{d}s = \int\limits_0^t\big(a(s)-\bar{a}\big)\mathrm{d}s + \int\limits_t^{t+\omega}\big(a(s)-\bar{a}\big)\mathrm{d}s = \int\limits_0^t\big(a(s)-\bar{a}\big)\mathrm{d}s + \omega\bar{a} - \bar{a}\omega =$$

$$= \int\limits_0^t\big(a(s)-\bar{a}\big)\mathrm{d}s,$$

platí také

$$\varphi(t+\omega) = \mathrm{e}^{\int\limits_0^{t+\omega}(a(s)-\bar{a})\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\int\limits_0^{t}(a(s)-\bar{a})\mathrm{d}s} = \varphi(t),$$

takže funkce φ je ω-periodická.

Rovnici (4.4) uvažujme s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0. \tag{4.10}$$

Fundamentální řešení (4.6) této úlohy je

$$y(t) = \mathrm{e}^{\int\limits_0^t a(s)\mathrm{d}s} = \mathrm{e}^{\int\limits_0^t \big(a(s)-\bar{a}\big)\mathrm{d}s + \bar{a}t} = \varphi(t)\mathrm{e}^{\bar{a}t}$$

a obecné řešení tedy je

$$x(t) = x_0\varphi(t)\mathrm{e}^{\bar{a}t}. \tag{4.11}$$

Provedené úvahy můžeme shrnout:

Tvrzení 3. Řešení rovnice (4.4) s ω-periodickou funkcí a a s počáteční podmínkou (4.10) je dáno formulí (4.11), kde φ je kladná, spojitá, ω-periodická funkce taková, že

$$\varphi'(t) = \big(a(t) - \bar{a}\big)\varphi(t), \qquad \varphi(0) = 1.$$

Vyjádření (4.11) se nazývá *Floquetova representace* řešení úlohy (4.4), (4.10) s periodickým koeficientem a. Můžeme ji interpretovat jako multiplikativní rozklad řešení $x = x(t)$ na trend $\mathrm{e}^{\bar{a}t}$ a sezónní složku $\varphi(t)$.

Ještě si promyslete, že nahrazení obecné podmínky (4.2) speciální podmínkou (4.10) nepředstavuje pro rovnici (4.4) s periodickým koeficientem a žádnou újmu na obecnosti.

4.2 Systémy lineárních ODR

Nechť $a_{11,}, a_{12}, \dots, a_{1,n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ jsou funkce definované na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. *Systém n lineárních obyčejných diferenciálních rovnic (n-rozměrný lineární systém)* je tvaru

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1' & = & a_{11}(t)x_1 & + & a_{12}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{1n}(t)x_n & + & b_1(t)\\
x_2' & = & a_{21}(t)x_1 & + & a_{22}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}(t)x_n & + & b_2(t)\\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 & + & a_{n2}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{nn}(t)x_n & + & b_n(t)
\end{array}$$

Při označení

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

lze tento systém zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}' \;=\; \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t). \tag{4.12}$$

Tuto rovnici nazýváme *nehomogenní lineární rovnice.* Spolu s rovnicí (4.12) budeme uvažovat počáteční podmínku

$$\boldsymbol{x}(t_0) \;=\; \boldsymbol{x_0}. \tag{4.13}$$

Rovnici

$$\boldsymbol{x}' \;=\; \mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} \tag{4.14}$$

nazýváme *lineární homogenní rovnicí přidruženou k rovnici* (4.12).

Věta 9 (o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť maticová funkce* $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ *a vektorová funkce* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$ *jsou spojité na intervalu* $J \subseteq \mathbb{R}$*. Pak má počáteční problém* (4.12), (4.13) *právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu* J*.*

Důkaz: Vzhledem k větám 1 a 4 stačí ukázat, že ke každému $\tau \in J$ existuje okolí $\mathcal{O}_\tau \subseteq J$ takové, že funkce $\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ je Lipschitzovská vzhledem k $\boldsymbol{x}$ na $\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}_\tau$.

Je-li τ vnitřní bod intervalu J, existuje $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ takové, že $[\tau - a, \tau + a] \subseteq J$.

Položme $L_\tau = \max\{\|\mathsf{A}(t)\| : t \in [\tau - a, \tau + a]\}$ (toto maximum existuje podle druhé Weierstrassovy věty) a $\mathcal{O}_\tau = (\tau - a, \tau + a)$. Podle 1.2.1 je maticová norma souhlasná s vektorovou normou a z toho plyne, že pro každé $t \in \mathcal{O}_\tau$ a každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí nerovost

$$\left\|\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) - \big(\mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)\big)\right\| = \|\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} - \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y}\| = \|\mathsf{A}(t)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| \le \|\mathsf{A}(t)\|\ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \le \\ \le L_\tau \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Je-li τ pravý krajní bod intervalu J, položíme

$$L_\tau = \max\{\|\mathsf{A}(t)\| : \tau - a \le t \le \tau\}, \quad \mathcal{O}_\tau = (\tau - a, \tau]$$

a provedeme analogickou úvahu.

Pro levý krajní bod intervalu J provedeme důkaz podobně. □

Věta 10 (princip superpozice)**.** *Jsou-li* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ *řešení rovnice* (4.14)*, pak také* $c_1\boldsymbol{x}(t) + c_2\boldsymbol{y}(t)$*, kde* $c_1,\ c_2$ *jsou konstanty, je řešením rovnice* (4.14)*.*

Důkaz: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y}) = c_1\boldsymbol{x}' + c_2\boldsymbol{y}' = c_1\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + c_2\mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} = \mathsf{A}(t)(c_1\boldsymbol{x}) + \mathsf{A}(t)(c_2\boldsymbol{y}) =$
$= \mathsf{A}(t)(c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{y}).$ □

4.2.1 Struktura řešení lineární homogenní rovnice

Množina všech n-vektorových funkcí definovaných a diferencovatelných na intervalu J tvoří vektorový prostor nad polem reálných čísel; sčítání vektorů je definováno jako sčítání funkcí, násobení skalárem je definováno jako násobení funkce reálným číslem,

$$\big(\boldsymbol{y_1} + \boldsymbol{y_2}\big)(t) = \boldsymbol{y_1}(t) + \boldsymbol{y_2}(t), \qquad \big(\alpha\boldsymbol{y}\big)(t) = \alpha\boldsymbol{y}(t),$$

nulový vektor v tomto prostoru je konstantní funkce $\boldsymbol{y}(t) \equiv \boldsymbol{o}$, kde $\boldsymbol{o}$ označuje nulový vektor v prostoru $\mathbb{R}^n$. Podle principu superpozice (věta 10) je množina všech řešení lineární homogenní rovnice (4.14) podprostorem tohoto prostoru, neboť $\boldsymbol{y}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ je řešením této rovnice; nazýváme ho *triviální řešení.*

Řekneme, že funkce $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_k}$ z vektorového prostoru diferencovatelných n-vektorových funkcí definovaných na intervalu J jsou lineárně nezávislé, pokud jsou lineárně nezávislé jakožto vektory, tj. pokud z rovnosti

$$c_1\boldsymbol{y_1}(t) + c_2\boldsymbol{y_2}(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{y_k}(t) = \boldsymbol{o}, \quad \text{pro všechna } t \in J \tag{4.15}$$

plyne rovnost $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

Lemma 2. *Nechť maticová funkce* $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ *je spojitá na intervalu* J *a* $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_k}$ *jsou řešení homogenní rovnice* (4.14)*. Jestliže existuje* $t_0 \in J$ *takové, že vektory*

$$\boldsymbol{y_1}(t_0), \boldsymbol{y_2}(t_0), \dots, \boldsymbol{y_k}(t_0) \in \mathbb{R}^n$$

jsou lineárně nezávislé, pak vektory

$$\boldsymbol{y_1}(t), \boldsymbol{y_2}(t), \dots, \boldsymbol{y_k}(t) \in \mathbb{R}^n$$

jsou lineárně nezávislé pro každé $t \in J$*.*

Důkaz: Připusťme, že existuje $t_1 \in J$ takové, že vektory $\boldsymbol{y_1}(t_1), \boldsymbol{y_2}(t_1), \dots, \boldsymbol{y_k}(t_1)$ jsou závislé. Pak existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_k$, z nichž aspoň jedna je nenulová a platí

$$\boldsymbol{o} = c_1\boldsymbol{y_1}(t_1) + c_2\boldsymbol{y_2}(t_1) + \cdots + c_k\boldsymbol{y_k}(t_1).$$

Funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{y_1}(t) + c_2\boldsymbol{y_2}(t) + \cdots + c_k\boldsymbol{y_k}(t)$ je podle principu superpozice (věta 10) řešením lineární homogenní rovnice (4.14) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{o}$. Avšak řešením této úlohy je konstantní funkce $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ a podle věty 9 je toto řešení jediné. To znamená, že funkce $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_k}$ splňují podmínku (4.15) a proto také platí $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$, což je spor. □

Z tohoto tvrzení plyne: Jsou-li funkce $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_k}$ řešením homogenní rovnice (4.14) se spojitou maticí A a s počátečními podmínkami takovými, že vektory $\boldsymbol{y_1}(t_0), \boldsymbol{y_2}(t_0), \dots, \boldsymbol{y_k}(t_0)$ z prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé, pak jsou funkce $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_k}$ lineárně nezávislé.

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje právě n lineárně nezávislých vektorů, které tvoří jeho bázi. Z Lemma 1 tedy dále plyne, že i v prostoru všech řešení homogenní rovnice (4.14) se spojitou maticí A existuje n lineárně nezávislých funkcí $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}$.

Lemma 3. *Nechť maticová funkce* $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ *je spojitá na intervalu* J *a* $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}$ *jsou lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice* (4.14)*. Pak libovolné řešení homogenní rovnice* (4.14) *je lineární kombinací funkcí* $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}$*, tj. tyto funkce tvoří bázi prostoru řešení rovnice* (4.14)*.*

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je řešení počáteční úlohy (4.14), (4.13). Báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ je tvořena vektory $\boldsymbol{y_1}(t_0), \boldsymbol{y_2}(t_0), \dots, \boldsymbol{y_n}(t_0)$, a proto existují konstanty $c_1, c_2, \dots, c_n$ takové, že

$$\boldsymbol{x}(t_0) = c_1\boldsymbol{y_1}(t_0) + c_2\boldsymbol{y_2}(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{y_n}(t_0).$$

Podle principu superpozice (věta 10) je vektorová funkce $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y_1} + c_2\boldsymbol{y_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{y_n}$ řešením rovnice (4.14). Toto řešení splňuje počáteční podmínku (4.13). Podle věty 9 je tento problém jednoznačně řešitelný, takže $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{y_1} + c_2\boldsymbol{y_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{y_n}$. □

Odvodili jsme tak následující větu a jsme oprávněni zavést následující definici.

Věta 11. *Je-li maticová funkce* $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$*,* $\mathsf{A} : J \to \mathbb{R}^{n^2}$ *spojitá, pak množina všech řešení rovnice* (4.14) *tvoří* n*-rozměrný vektorový prostor.*

Definice 10. Libovolná báze prostoru všech řešení lineární homogenní rovnice (4.14) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (4.14).

Nechť funkce $\boldsymbol{y_1} = \boldsymbol{y_1}(t), \boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{y_2}(t), \dots, \boldsymbol{y_n} = \boldsymbol{y_n}(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.14). Obecné řešení této rovnice je jejich lineární kombinace

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{y_1}(t) + c_2\boldsymbol{y_2}(t) + \dots + c_n\boldsymbol{y_n}(t).$$

Označme $y_{j,i} = y_{j,i}(t) = \big(\boldsymbol{y_j}(t)\big)_i$,

$$\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t) = \Big(\boldsymbol{y_1}(t), \boldsymbol{y_2}(t), \dots, \boldsymbol{y_n}(t)\Big) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) & y_{1,2}(t) & \dots & y_{1,n}(t) \\ y_{2,1}(t) & y_{2,2}(t) & \dots & y_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1}(t) & y_{n,2}(t) & \dots & y_{n,n}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ se nazývá *fundamentální matice řešení systému* (4.14). Z lineární nezávislosti vektorových funkcí $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \dots, \boldsymbol{y_n}$ plyne, že sloupce fundamentální matice Y jsou lineárně nezávislé pro každé $t \in J$. To znamená, že matice $\mathsf{Y}(t)$ je regulární, $\det \mathsf{Y}(t) \neq 0$ pro každé $t \in J$.

Obecné řešení rovnice (4.14) lze nyní zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}.$$

Symbolem $\boldsymbol{c_0}$ označme n-tici konstant takových, že funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c_0}$ je řešením počátečního problému (4.14), (4.13). Z rovnosti $\boldsymbol{x_0} = \mathsf{Y}(t_0)\boldsymbol{c_0}$ pak plyne, že $\boldsymbol{c_0} = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0}$. Řešení počáteční úlohy (4.14), (4.13) tedy můžeme psát ve tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0}.$$

Pro fundamentální matici $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ řešení systému (4.14) zřejmě platí $\mathsf{Y}'(t) = \mathsf{A}(t)\mathsf{Y}(t)$. Fundamentální matici řešení systému (4.12) tedy můžeme definovat jako regulární maticovou funkci, která je řešením maticové diferenciální rovnice

$$\mathsf{Y}' = \mathsf{A}(t)\mathsf{Y}. \tag{4.16}$$

Věta 12. *Nechť maticová funkce $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Pak obecné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ vektorové rovnice* (4.12) *je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice* (4.14) *a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice* (4.12),

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}(t),$$

kde $\mathsf{Y}(t)$ je fundamentální matice řešení rovnice (4.14) *a $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ je libovolné řešení rovnice* (4.12).

Řešení počátečního problému (4.12), (4.13) *je dáno vztahem*

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c_0} + \tilde{\boldsymbol{x}}(t),$$

kde pro konstantní vektor $\boldsymbol{c_0}$ platí $\boldsymbol{c_0} = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\big(\boldsymbol{x_0} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\big)$.

Důkaz: Funkce $\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ je řešením rovnice (4.12), neboť podle (4.16) platí

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{Y}'\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}' = \mathsf{A}\mathsf{Y}\boldsymbol{c} + \mathsf{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b} = \mathsf{A}(\mathsf{Y}\boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{b}.$$

Dále platí $\mathsf{Y}(t_0)\boldsymbol{c_0} + \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \mathsf{Y}(t_0)\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\big(\boldsymbol{x_0} - \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\big) + \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$. $\square$

4.2.2 Nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice (4.12) — metoda variace konstant

Řešení rovnice (4.12) hledáme ve tvaru $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}(t)$, kde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ je nějaká vektorová funkce. Pak s využitím rovnosti (4.16) dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}' &= \mathsf{Y}'\boldsymbol{c} + \mathsf{Y}\boldsymbol{c}' = \mathsf{A}\mathsf{Y}\boldsymbol{c} + \mathsf{Y}\boldsymbol{c}' \\ \tilde{\boldsymbol{x}}' &= \mathsf{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b} = \mathsf{A}\mathsf{Y}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mathsf{A}(t)\mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) &= \mathsf{A}(t)\mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{b}(t) \\ \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{c}'(t) &= \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{c}'(t) &= \mathsf{Y}(t)^{-1}\boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{c}(t) &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\,, \end{aligned} \tag{4.17}$$

kde $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{c}(t_0)$ je konstantní vektor.

Obecné řešení rovnice (4.12) je tedy dáno formulí

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\left(\boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\right) = \mathsf{Y}(t)\boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\,.$$

Aby toto řešení splňovalo počáteční podmínku (4.13), musí platit $\boldsymbol{x_0} = \mathsf{Y}(t_0)\boldsymbol{\eta}$, tj. $\boldsymbol{\eta} = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0}$. Řešení počátečního problému (4.12), (4.13) je tedy tvaru

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t)\left(\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\right) = \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\,.$$

4.2.3 Převedení systému lineárních diferenciálních rovnic na rovnici vyššího řádu

Uvažujme systém dvou rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t)y + c(t), \\ y' &= \alpha(t)x + \beta(t)y + \gamma(t); \end{aligned} \tag{4.18}$$

o funkcích $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ předpokládáme, že jsou definovány na nějakém intervalu J a jsou na něm diferencovatelné. V případě, že existuje $t_0 \in J$ takové, že $b(t_0) \neq 0$, je funkce b na nějakém podintervalu I intervalu J nenulová. Pro $t \in I$ z první rovnice vyjádříme druhou složku

$$y = \frac{1}{b}\left(x' - ax - c\right) \tag{4.19}$$

a dosadíme ji do druhé rovnice:

$$y' = \alpha x + \frac{\beta}{b}\left(x' - ax - c\right) + \gamma. \tag{4.20}$$

První z rovnic (4.18) zderivujeme

$$x'' = a'x + ax' + b'y + by' + c',$$

za y dosadíme (4.19) a za y' dosadíme (4.20). Dostaneme

$$\begin{aligned} x'' &= a'x + ax' + \frac{b'}{b}\left(x' - ax - c\right) + b\alpha x + \beta\left(x' - ax - c\right) + b\gamma + c' = \\ &= \left(a + \beta + \frac{b'}{b}\right)x' - \left(a\beta - b\alpha + \frac{ab' - a'b}{b}\right)x + b\gamma + c' - c\beta - \frac{cb'}{b}. \end{aligned}$$

První složka řešení systému (4.18) je tedy na intervalu I řešením rovnice druhého řádu

$$x'' - \left(a + \beta + \frac{b'}{b}\right)x' + \left(a\beta - b\alpha + \frac{ab' - a'b}{b}\right)x = b\gamma + c' - c\beta - \frac{cb'}{b},$$

jeho druhá složka je pak dána rovností (4.19).

V případě konstantních funkcí a, b, α, β a funkcí c, γ identicky rovných nule (homogenního systému s konstantní maticí), dostaneme rovnici

$$x'' - (a + \beta)x' + (a\beta - b\alpha)x = 0. \tag{4.21}$$

Povšimněme si, že charakteristický polynom konstantní matice $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ je

$$\det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ \alpha & \beta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + \beta)\lambda + a\beta - b\alpha = \lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathsf{A})\lambda + \det\mathsf{A},$$

jeho koeficienty jsou tedy shodné s koeficienty na levé straně rovnice (4.21).

Analogicky lze postupovat u systémů n rovnic.

4.3 Homogenní lineární systém s konstantní maticí

Uvažujme vektorovou rovnici

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x}. \tag{4.22}$$

Konstantní maticová funkce A je definována na celé množině $\mathbb{R}$. To podle věty 9 znamená, že řešení rovnice (4.22) existuje, je definováno na intervalu $J = (-\infty, \infty)$ a pro libovolnou počáteční podmínku (4.13) je řešení jediné.

4.3.1 Řešení počátečního problému metodou postupných aproximací

Řešení rovnice (4.22) s počáteční podmínkou (4.13) budeme hledat jako limitu Picardovy posloupnosti postupných aproximací. Členy této posloupnosti jsou podle věty 1 rekurentně dány formulemi

$$\boldsymbol{x_{k+1}}(t) = \boldsymbol{x_0} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{A}\boldsymbol{x_k}(s)\mathrm{d}s = \boldsymbol{x_0} + \mathsf{A}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{x_k}(s)\mathrm{d}s.$$

Obecný člen posloupnosti je

$$\boldsymbol{x_k}(t) = \left(\mathsf{E} + (t-t_0)\mathsf{A} + \frac{(t-t_0)^2}{2!}\mathsf{A}^2 + \cdots + \frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k\right)\boldsymbol{x_0},$$

kde E označuje jednotkovou matici. Toto tvrzení ověříme úplnou indukcí. Pro $k=0$ máme

$$\boldsymbol{x_0}(t) = \left(\frac{(t-t_0)^0}{0!}\mathsf{A}^0\right)\boldsymbol{x_0} = \mathsf{E}\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}$$

a z platnosti formule pro k plyne

$$\boldsymbol{x_{k+1}}(t) = \boldsymbol{x_0} + \mathsf{A}\int_{t_0}^{t}\left(\mathsf{E} + (s-t_0)\mathsf{A} + \frac{(s-t_0)^2}{2!}\mathsf{A}^2 + \cdots + \frac{(s-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k\right)\boldsymbol{x_0}\mathrm{d}s =$$

$$= \boldsymbol{x_0} + \left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}\boldsymbol{x_0} + \left(\int_{t_0}^{t}(s-t_0)\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^2\boldsymbol{x_0} + \cdots + \left(\frac{1}{k!}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^k\mathrm{d}s\right)\mathsf{A}^k\boldsymbol{x_0} =$$

$$= \left(\mathsf{E} + (t-t_0)\mathsf{A} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\mathsf{A}^2 + \frac{1}{3!}(t-t_0)^3\mathsf{A}^3 + \cdots + \frac{1}{(k+1)!}(t-t_0)^{k+1}\mathsf{A}^{k+1}\right)\boldsymbol{x_0}.$$

Pokud bychom A považovali za konstantu a E za jedničku (tj. pro $n=1$), je výraz v závorce k-tým částečným součtem Taylorovy řady funkce $\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}$. Řešení úlohy

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0}$$

lze proto zapsat ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x_0}$. Matice $\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}$ je dána nekonečnou řadou

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k.$$

Lze ukázat, že tato řada konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a tato konvergence je stejnoměrná.

4.3.2 Obecné řešení

Řešení rovnice (4.22) budeme hledat ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t}$, kde $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je konstantní vektor a λ je zatím neznámé číslo. Hodnota λ musí splňovat rovnosti

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{\xi}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

takže vzhledem k tomu, že $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$, musí platit

$$\mathsf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}.$$

To znamená, že λ je vlastní hodnotou matice A a $\boldsymbol{\xi}$ je příslušný vlastní vektor.

Nyní rozlišíme tři případy:

(i) Jsou-li λ_1, λ_2 různé vlastní hodnoty matice A a $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ jsou příslušné vlastní vektory, pak $\boldsymbol{\xi}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $\boldsymbol{\xi}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.22).

Důkaz: Tvrzení plyne z předchozího výpočtu a faktu, že vlastní vektory příslušné k různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé. □

(ii) Je-li λ vlastní hodnota matice A, $\boldsymbol{\xi}$ příslušný vlastní vektor, přičemž λ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu $\det(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{E})$, pak funkce

$$\boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t}, \boldsymbol{\eta}_{1,0}\mathrm{e}^{\lambda t}+\boldsymbol{\eta}_{1,1}t\mathrm{e}^{\lambda t}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{k-1,0}\mathrm{e}^{\lambda t}+\boldsymbol{\eta}_{k-1,1}t\mathrm{e}^{\lambda t}+\dots+\boldsymbol{\eta}_{k-1,k-1}t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

jsou pro vhodné vektory

$$\boldsymbol{\eta}_{1,0}, \boldsymbol{\eta}_{1,1}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{k-1,0}, \boldsymbol{\eta}_{k-1,1}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{k-1,k-1}$$

řešením rovnice (4.22).

Důkaz ukážeme pro $k=2$. V případě vyšší násobnosti kořene charakteristické rovnice lze postupovat analogicky.
Nechť λ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu. Buď $\mathsf{B}=\mathsf{B}(s)$ diferencovatelná (a tedy spojitá) maticová funkce definovaná na okolí nuly taková, že $\mathsf{B}(0)=\mathsf{A}$, λ je pro každé s z definičního oboru funkce B jednoduchým kořenem charakteristického polynomu matice $\mathsf{B}(s)$ a existuje jednoduchý kořen $\mu(s)\neq\lambda$ charakteristického polynomu, pro nějž platí $\lim\limits_{s\to 0}\mu(s)=\lambda$. (Matici A nepatrně porušíme tak, aby se dvojnásobný kořen rozdělil na dva různé jednoduché.)
Označme $\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)$ (resp. $\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)$) vlastní vektor matice $\mathsf{B}(s)$ příslušný k vlastní hodnotě $\mu(s)$ (resp. λ). Z diferencovatelnosti funkce B plyne podle věty o diferencovatelnosti implicitně zadané funkce (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 8.1) diferencovatelnost funkcí $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ a $\boldsymbol{\zeta}_\lambda$, zejména tedy existence limit

$$\lim_{s\to 0}\boldsymbol{\zeta}_\lambda'(s)=\boldsymbol{\zeta}_{\lambda,0}, \quad \lim_{s\to 0}\boldsymbol{\zeta}_\mu'(s)=\boldsymbol{\zeta}_{\mu,0}.$$

Rovnice $\boldsymbol{x}'=\mathsf{B}(s)\boldsymbol{x}$ má podle předchozí úvahy řešení $\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}$ a $\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}$ a podle principu superpozice 10 také řešení

$$\frac{\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}}{\lambda-\mu(s)}.$$

Poněvadž $\lim\limits_{s\to 0}\mathsf{B}(s)=\mathsf{A}$, plyne z věty 7 o spojité závislosti řešení na parametrech, že rovnice (4.22) má řešení

$$\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}}{\lambda-\mu(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{\zeta}_\lambda'(s)\mathrm{e}^{\lambda t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu'(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)t\mu'(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}}{-\mu'(s)}=$$
$$=\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_{\lambda,0}-\boldsymbol{\zeta}_{\mu,0}}{-\mu'(0)}+\boldsymbol{\zeta}_\mu(0)t\right)\mathrm{e}^{\lambda t};$$

při výpočtu limity bylo využito de l'Hôpitalovo pravidlo. Označíme-li nyní

$$\boldsymbol{\eta}_{1,0}=\frac{\boldsymbol{\zeta}_{\mu,0}-\boldsymbol{\zeta}_{\lambda,0}}{\mu'(0)}, \quad \boldsymbol{\eta}_{1,1}=\boldsymbol{\zeta}_\mu(0),$$

dostaneme tvrzení. □

(iii) Má-li rovnice (4.22) komplexní řešení $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\alpha}(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}(t)$, kde $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou reálné vektorové funkce, a řešení $\boldsymbol{x}$ je lineárně nezávislé na libovolném nenulovém reálném řešení této rovnice, pak $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou lineárně nezávislými reálnými řešeními rovnice (4.22).

Důkaz: Platí

$$\boldsymbol{\alpha}'(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}'(t) = \big(\boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}(t)\big)' = \mathsf{A}\big(\boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}(t)\big) = \mathsf{A}\boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\mathsf{A}\boldsymbol{\beta}(t).$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí této rovnosti dostaneme, že funkce $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou řešeními rovnice (4.22).
Kdyby vektorové funkce $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ byly lineárně závislé, tj. $\boldsymbol{\alpha} = c\boldsymbol{\beta}$, pak by $\boldsymbol{\alpha} + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta} = (c+\mathrm{i})\boldsymbol{\beta}$ a řešení $\boldsymbol{\alpha} + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}$ by bylo násobkem reálného nenulového řešení $\boldsymbol{\beta}$. To by byl spor s předpokladem tvrzení. □

4.4 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

Jedná se o rovnici tvaru

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \;=\; f(t)\,, \tag{4.23}$$

kde funkce $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0, f$ jsou definované na nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$.

Je-li $f(t) \equiv 0$, rovnice se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1} + a_{n-2}(t)x^{n-2} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \;=\; 0 \tag{4.24}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k rovnici* (4.23).

Spolu s rovnicí (4.23) uvažujeme počáteční podmínky

$$x(t_0) = x_0,\;\; x'(t_0) = x_{0,1},\;\; \ldots,\;\; x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1}\,. \tag{4.25}$$

Podle tvrzení 1 je rovnice (4.23) ekvivalentní s vektorovou rovnicí (se systémem rovnic)

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2,\\
x_2' &= x_3,\\
&\;\vdots\\
x_{n-1}' &= x_n,\\
x_n' &= -a_{n-1}(t)x_n - a_{n-2}(t)x_{n-1} - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 + f(t),
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \ldots & -a_{n-1}(t)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ f(t)\end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Počáteční podmínky k vektorové rovnici (4.26) jsou tvaru

$$x_1(t_0) = x_0,\;\; x_2(t_0) = x_{0,1},\;\; x_3(t_0) = x_{0,2},\;\; \ldots,\;\; x_n(t_0) = x_{0,n-1}.$$

Z tohoto faktu a z vět 9, 10 a 11 plynou následující tři tvrzení:

Věta 13 (o existenci a jednoznačnosti řešení). *Jsou-li všechny funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f$ spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a $t_0 \in J$, pak má počáteční problém (4.23), (4.25) právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu J.*

Věta 14 (princip superpozice). *Jsou-li $x = x(t)$, $y = y(t)$ řešením homogenní lineární rovnice (4.24) a c_1, c_2 jsou libovolné konstanty, pak také $z = z(t) = c_1x(t) + c_2y(t)$ je řešením této rovnice.*

Věta 15. *Jsou-li všechny funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$, pak množina všech řešení rovnice (4.24) tvoří n-rozměrný vektorový prostor.*

Definice 11. Báze $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.24) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (4.24).

Z ekvivalence lineární rovnice n-tého řádu (4.23) a lineárního n-rozměrného systému (4.26) plyne, že funkce $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.24) právě tehdy, když maticová funkce

$$\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je fundamentální maticí řešení homogenního systému přidruženého k systému (4.26). To nastává právě tehdy, když každá z funkcí $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ je řešením homogenní rovnice (4.24) a sloupce matice $\mathsf{Y}(t)$ jsou lineárně nezávislé v nějakém, a v důsledku toho (podle Lemma 1 z 4.2.1) v každém, $t \in J$.

Definice 12. Buďte $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ funkce jedné reálné proměnné. Funkce W definovaná vztahem

$$W = W(t) = W(t; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

se nazývá *wronskián* funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$.

Následující výroky jsou ekvivalentní a charakterizují řešení homogenní rovnice (4.24):

- Funkce $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.24) na intervalu J.
- Každá z funkcí $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \ldots, y_n = y_n(t)$ je řešením rovnice (4.24) a pro jejich wronskián platí $W(t) = W(t; y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ v nějakém $t \in J$.
- Obecné řešení rovnice (4.24) je tvaru

  $$x(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t),$$

  kde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jsou konstanty.

Nechť funkce $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \dots, y_n = y_n(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.24). Při označení

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

lze obecné řešení homogenní rovnice (4.24) zapsat ve tvaru

$$x = x(t) = \boldsymbol{y}(t)^T \boldsymbol{c}.$$

Z věty 12, ekvivalence rovnice (4.23) a systému (4.26) plyne následující tvrzení.

Věta 16. *Nechť funkce $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, f$ jsou spojité na intervalu J. Pak obecné řešení lineární rovnice n-tého řádu (4.23) je tvaru*

$$x(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + \tilde{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)^T \boldsymbol{c} + \tilde{x}(t),$$

kde $\tilde{x}$ je libovolné partikulární řešení rovnice (4.23), $y_1, y_2, \dots, y_n$ je fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice (4.24) a $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou konstanty.

4.4.1 Nalezení fundamentálního systému řešení rovnice druhého řádu v případě, že jedno řešení je známé

Nechť p, q jsou spojité funkce definované na intervalu J. Uvažujme lineární homogenní rovnici druhého řádu ve tvaru

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{4.27}$$

a předpokládejme, že známe jedno její nekonstantní řešení $y_1 = y_1(t)$, tedy jednu složku fundamentálního systému řešení. Zavedeme substituci

$$x(t) = y_1(t)v(t), \tag{4.28}$$

kde v je zatím neznámá funkce. Pak $x' = y_1'v + y_1v'$, $x'' = y_1''v + 2y_1'v' + y_1v''$, tedy

$$\begin{aligned} y_1''v + 2y_1'v' + y_1v'' + py_1'v + py_1v' + qy_1v &= 0 \\ y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' + \left(y_1'' + py_1' + qy_1\right)v &= 0 \\ v'' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v' &= 0\,, \end{aligned}$$

což je rovnice typu 2.5.2 pro neznámou funkci $v = v(t)$. Položíme $z(t) = v'(t)$. Pak

$$z' = -\left(p(t) + 2\frac{y_1'(t)}{y_1(t)}\right)z.$$

To je lineární homogenní rovnice prvního řádu, takže její řešení je tvaru

$$\begin{aligned} z(t) &= const \cdot \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \left(p(s) + 2\frac{y_i'(s)}{y_1(s)}\right) \mathrm{d}s\right\} = \\ &= const \cdot \exp\left\{-2\ln\frac{y_1(t)}{y_1(t_0)}\right\} \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right\} = const \cdot \frac{1}{y_1(t)^2} \mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s}, \end{aligned}$$

kde t_0 je nějaké číslo z intervalu J. Odtud integrací dostaneme hledanou funkci v ve tvaru

$$v(t) \;=\; A + B \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\, \mathrm{d}s,$$

kde A, B jsou nějaké konstanty. Zpětnou substitucí (4.28) dostaneme řešení rovnice (4.27) ve tvaru

$$x(t) = Ay_1(t) + By_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\, \mathrm{d}s,$$

tedy jako lineární kombinaci funkcí y_1 a y_2, kde

$$y_2(t) = y_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\, \mathrm{d}s. \tag{4.29}$$

K tomu, aby funkce y_2 byla druhou složkou fundamentálního systému řešení řešení rovnice (4.27) stačí, aby byla lineárně nezávislá na funkci y_1. To však je splněno, neboť

$$y_2'(t) = y_1'(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\, \mathrm{d}s + \frac{1}{y_1(t)} \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}$$

a wronskián funkcí y_1, y_2 je roven

$$W(t, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\, \mathrm{d}s \\ y_1'(t) & y_1'(t) \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{(y_1(s))^2}\, \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{s} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\, \mathrm{d}s + \frac{1}{y_1(t)} \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s} \;>\; 0\,.$$

Příklad: Najdeme fundamentální systém řešení rovnice

$$x'' - \frac{2t}{1-t^2}x' + \frac{6}{1-t^2}x = 0 \tag{4.30}$$

na intervalu $(-1, 1)$. Rovnici nejprve vynásobíme dvojčlenem $1 - t^2$,

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + 6x = 0. \tag{4.31}$$

Koeficienty této rovnice jsou polynomy. Dále víme, že derivace polynomu je polynom stupně o jedna menšího, druhá derivace polynomu je polynom stupně o dva menšího. Pokud by tedy funkce $x = x(t)$ byla polynomem a dosadili bychom ji do levé strany rovnice (4.31), všechny sčítance by byly polynomy stejného stupně. Tato pozorování mohou vést k nápadu, že rovnici (4.31) by mohl řešit polynom.

Budeme tedy předpokládat, že rovnice (4.31) má řešení tvaru

$$y_1(t) = \sum_{i=0} a_i t^i \tag{4.32}$$

se zatím neurčenými koeficienty a neurčenou horní mezí pro sčítání. Pak je

$$\begin{aligned}
6y_1(t) &= 6a_0 + 6a_1t + \sum_{i=2} 6a_it^i,\\
y_1'(t) &= \sum_{i=0} ia_it^{i-1} \;=\; \sum_{i=1} ia_it^{i-1},\\
2ty_1'(t) &= \sum_{i=1} 2ia_it^i \;=\; 2a_1t + \sum_{i=2} 2ia_it^i,\\
y_1''(t) &= \sum_{i=1} i(i-1)a_it^{i-2} \;=\; \sum_{i=2} i(i-1)a_it^{i-2} \;=\; \sum_{i=0}(i+2)(i+1)a_{i+2}t^i,\\
(1-t^2)y_1''(t) &= \sum_{i=0}(i+2)(i+1)a_{i+2}t^i - \sum_{i=2} i(i-1)a_it^i \;=\\
&= 2a_2 + 6a_3t + \sum_{i=2}\left[(i+2)(i+1)a_{i+2} - i(i-1)a_i\right]t^i.
\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice (4.31) dostaneme

$$6a_0 + 2a_2 + (4a_1 + 6a_3)t + \sum_{i=2}\left[(i+2)(i+1)a_{i+2} - (i+3)(i-2)a_i\right]t^i = 0.$$

To znamená, že koeficienty hledaného polynomu splňují vztahy

$$a_2 = -3a_0, \qquad a_3 = -\tfrac{2}{3}a_1, \qquad a_4 = 0,$$

$$a_{i+2} = \frac{(i+2)(i+1)}{(i+3)(i-2)}a_i, \quad i = 3, 4, \ldots.$$

Odtud je vidět, že $a_4 = a_6 = \cdots = 0$, tj. všechny koeficienty se sudými indexy většími než 2 jsou nulové. Pokud by koeficient a_1 byl nenulový, byly by nenulové všechny koeficienty s lichými indexy a na pravé straně rovnice (4.32) by nebyl polynom, ale nekonečná řada. Musí tedy být $a_1 = 0$. Zvolíme-li nyní $a_0 = 1$, dostaneme $a_2 = -3$. Jedno řešení rovnice (4.30) tak dostáváme ve tvaru

$$y_1(t) = 1 - 3t^2.$$

Lineárně nezávislé řešení y_2 rovnice (4.30) dostaneme z formule (4.29), v níž zvolíme $t_0 = 0$. V rovnici (4.30) je

$$p(t) = -\frac{2t}{1-t^2},$$

takže

$$-\int_0^s p(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_0^s \frac{2\sigma\mathrm{d}\sigma}{1-\sigma^2} = -\left[\ln\left|\sigma^2-1\right|\right]_{\sigma=0}^s = -\ln(1-s^2)$$

pro $s \in (-1, 1)$. Platí tedy

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t p(\sigma)\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{1-s^2}$$

a druhá složka fundamentálního systému řešení rovnice (4.30) je

$$y_2(t) = (1-3t^2)\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1-3s^2)^2(1-s^2)}.$$

Integrál na pravé straně je integrálem z racionální funkce, můžeme ho tedy vyjádřit explicitně,

$$\int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1-3s^2)^2(1-s^2)} = \frac{1}{4}\int\limits_0^t \left(3\frac{3s^2+1}{(3s^2-1)^2} - \frac{1}{s^2-1}\right)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{4}\left[-3\frac{s}{3s^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right]_{s=0}^t = -\frac{3}{4}\frac{t}{3t^2-1} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$
$$= \frac{3}{4}\frac{t}{1-3t^2} + \frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Dostáváme tak druhou složku fundamentálního systému řešení

$$y_2(t) = \tfrac{1}{4}\left(3t + (1-3t^2)\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

a obecné řešení rovnice (4.30) můžeme zapsat ve tvaru

$$x(t) = A\left(1-3t^2\right) + B\left(3t + (1-3t^2)\ln\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

Ještě poznamenejme, že rovnice (4.31) je speciálním případem *Legendreovy rovnice*

$$(1-t^2)x'' - 2tx' + \nu x = 0.$$

Tato rovnice má řešení ve tvaru polynomu stupně n právě pro $\nu = n(n+1)$. ■

4.4.2 Metoda variace konstant

Nechť $y_1, y_2, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (4.24). Partikulární řešení $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ nehomogenní rovnice budeme hledat ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)^T\boldsymbol{c}(t),$$

kde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ je nějaká vektorová funkce. Z ekvivalence rovnice (4.23) se systémem (4.26) a z rovnosti (4.17) v metodě variace konstant 4.2.2 pro systémy lineárních rovnic plyne, že derivace vektorové funkce $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ splňuje soustavu lineárních (algebraických) rovnic

$$\begin{aligned}
y_1(t)c_1' + y_2(t)c_2' + \dots + y_n(t)c_n' &= 0,\\
y_1'(t)c_1' + y_2'(t)c_2' + \dots + y_n'(t)c_n' &= 0,\\
&\vdots\\
y_1^{(n-2)}(t)c_1' + y_2^{(n-2)}(t)c_2' + \dots + y_n^{(n-2)}(t)c_n' &= 0,\\
y_1^{(n-1)}(t)c_1' + y_2^{(n-1)}(t)c_2' + \dots + y_n^{(n-1)}(t)c_n' &= f(t).
\end{aligned}$$

Determinant této soustavy je wronskiánem fundamentálního systému řešení $y_1, y_2, \dots, y_n$ a proto je nenulový. Soustava má tedy jediné řešení $c_1', c_2', \dots, c_n'$. Integrací jeho složek dostaneme hledané funkce funkce $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t), \dots, c_n = c_n(t)$.

4.4.3 Homogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0\,. \tag{4.33}$$

Řešení hledáme ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Pak $x'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$, …, $x^{(n)}(t) = \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda t}$ a tedy

$$\lambda^n \mathrm{e}^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + a_{n-2}\lambda^{n-2}\mathrm{e}^{\lambda t} + \cdots + a_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} + a_0 \mathrm{e}^{\lambda t} = 0.$$

Poněvadž $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$, můžeme rovnici touto funkcí vykrátit. Dostaneme

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{4.34}$$

Rovnice (4.34) se nazývá *charakteristická rovnice* lineární diferenciální rovnice (4.33)

Speciální případ $n = 2$

Řešíme rovnici druhého řádu

$$x'' - ax' + b = 0, \tag{4.35}$$

kde a, b jsou reálné parametry. Charakteristická rovnice této diferenciální rovnice

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0 \tag{4.36}$$

má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right) = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Rozlišíme tři možnosti:

(i) $a^2 > 4b$

V tomto případě má charakteristická rovnice (4.36) dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2. Funkce

$$y_1 = y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = y_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

jsou řešením diferenciální rovnice (4.35). Wronskián těchto funkcí je

$$W(t; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & \lambda_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0.$$

To znamená, že funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.35).

(ii) $a^2 < 4b$

Označme $\varphi = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$; pak $\varphi > 0$. Charakteristická rovnice (4.36) má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \mathrm{i}\varphi$. Komplexní funkce

$$z_1 = z_1(t) = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a + \mathrm{i}\varphi\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}(\cos\varphi t + \mathrm{i}\sin\varphi t), \quad z_2 = z_2(t) = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a - \mathrm{i}\varphi\right)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}(\cos\varphi t - \mathrm{i}\sin\varphi t)$$

jsou řešením diferenciální rovnice (4.35). Podle principu superpozice (věty 10) jsou také reálné funkce

$$y_1 = y_1(t) = \frac{1}{2}\big(z_1(t) + z_2(t)\big) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\cos\varphi t, \quad y_2 = y_2(t) = \frac{\mathrm{i}}{2}\big(z_2(t) - z_1(t)\big) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin\varphi t$$

řešením této diferenciální rovnice. Jejich derivace jsou

$$y_1'(t) = \left(\frac{1}{2}a\cos\varphi t - \varphi\sin\varphi t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}, \quad y_2'(t) = \left(\frac{1}{2}a\sin\varphi t + \varphi\cos\varphi t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at},$$

takže pro jejich wronskián platí

$$W(t; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos\varphi t & \sin\varphi t \\ \frac{1}{2}a\cos\varphi t - \varphi\sin\varphi t & \frac{1}{2}a\sin\varphi t + \varphi\cos\varphi t \end{vmatrix}\mathrm{e}^{at} =$$
$$= \left(\varphi(\cos\varphi t)^2 + \frac{1}{2}a\sin\varphi t\cos\varphi t - \frac{1}{2}a\sin\varphi t\cos\varphi t + \varphi(\sin\varphi t)^2\right)\mathrm{e}^{at} = \varphi\mathrm{e}^{at} \neq 0.$$

Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé, tvoří tedy fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice (4.35) je

$$x(t) = (c_1\cos\varphi t + c_2\sin\varphi t)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at},$$

kde c_1, c_2 jsou konstanty. Pokud je řešení netriviální, je alespoň jedna z nich nenulová a platí

$$-1 \leq \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \leq 1, \qquad -1 \leq \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \leq 1, \qquad \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\right)^2 = 1,$$

a proto existuje číslo ψ takové, že

$$\sin\psi = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \qquad \cos\psi = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.$$

Označme nyní $b = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Obecné řešení rovnice (4.35) přepíšeme do tvaru

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\cos\varphi t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}\sin\varphi t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} =$$
$$= b\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}(\sin\psi\cos\varphi t + \cos\psi\sin\varphi t) = b\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\sin(\varphi t + \psi).$$

Poznamenejme, že v tomto tvaru řešení je zahrnuto i řešení triviální $x \equiv 0$.

(iii) $a^2 = 4b$

V tomto případě je diferenciální rovnice tvaru

$$x'' - ax' + \frac{a^2}{4}x = 0 \tag{4.37}$$

a její charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = \frac{1}{2}a$. Jedno řešení diferenciální rovnice (4.37) je tedy funkce

$$y_1 = y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}.$$

Spolu s rovnicí (4.37) uvažujme pomocnou rovnici

$$x'' - (a + \varepsilon)x' + \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}a\varepsilon\right)x = 0. \tag{4.38}$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - (a + \varepsilon)\lambda + \frac{a^2}{4} + \frac{a\varepsilon}{2} = \left(\lambda - \frac{a}{2}\right)\left(\lambda - \frac{a}{2} - \varepsilon\right) = 0$$

má dva reálné různé kořeny $\lambda = \frac{1}{2}a$, $\mu = \frac{1}{2}a + \varepsilon$. Pomocná rovnice (4.38) má tedy podle výsledku (i) fundamentální systém řešení

$$y_1 = y_1(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}, \quad y_2 = y_2(t) = \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t}.$$

Podle principu superpozice má lineární rovnice (4.38) také řešení

$$y_\varepsilon = y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}\right).$$

Poněvadž levá strana strana rovnice (4.37) je limitou levé strany pomocné rovnice (4.38) pro $\varepsilon \to 0$, lze očekávat, že také funkce y_ε bude v limitě $\varepsilon \to 0$ řešením původní rovnice (4.37). S využitím de l'Hôpitalova pravidla dostaneme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{t\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}a+\varepsilon\right)t}}{1} = t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}.$$

Ověříme, že funkce $y_2 = y_2(t) = t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}$ je skutečně řešením rovnice (4.37). Platí

$$y_2'(t) = \left(1 + \frac{a}{2}t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at}, \quad y_2''(t) = \left(a + \frac{a^2}{4}t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at},$$

takže

$$y_2''(t) - ay_2'(t) + \frac{a^2}{4}y_2(t) = \left(a + \frac{a^2}{4}t - a - \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} = 0$$

a funkce y_2 je řešením rovnice (4.37). Wronskián funkcí y_1, y_2 je

$$W(t; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} & t\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \\ \frac{1}{2}a\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} & \left(1 + \frac{1}{2}at\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}at} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{at}\left(1 + \frac{a}{2}t - \frac{a}{2}t\right) = \mathrm{e}^{at} \neq 0.$$

Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.37), tvoří tedy její fundamentální systém řešení. ∎

Rovnice obecného řádu

Řešení rovnice (4.33) řádu n je přímým zobecněním předchozího speciálního případu.

Lemma 4. *Pokud λ je k-násobný kořen charakteristické rovnice, pak funkce*

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \; x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda t}, \; x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \; \ldots, \; x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

jsou řešení rovnice (4.33).

Důkaz: Označme $a_n = 1$ a $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i$ pravou stranu charakteristické rovnice (4.34). Poněvadž λ je k-násobný kořen charakteristické rovnice, platí

$$\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}P(\lambda) = 0 \quad \text{pro } i = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \tag{4.39}$$

Funkce $x_l = x_l(t) = t^{l-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$, $l = 1, 2, \ldots, k$ vyjádříme ve tvaru

$$x_l(t) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial\lambda^{l-1}}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

dosadíme je do pravé strany rovnice (4.33) a upravíme s využitím Leibnizovy formule pro vyšší derivace součinu funkcí. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_l^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\frac{\partial^{l-1}}{\partial \lambda^{l-1}} \mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{\partial^{l-1}}{\partial \lambda^{l-1}} \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{\partial^{l-1}}{\partial \lambda^{l-1}} \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \mathrm{e}^{\lambda t} =$$
$$= \frac{\partial^{l-1}}{\partial \lambda^{l-1}} \left(\mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \right) = \frac{\partial^{l-1}}{\partial \lambda^{l-1}} \left(\mathrm{e}^{\lambda t} P(\lambda) \right) = \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \frac{\partial^i P(\lambda)}{\partial \lambda^i} \frac{\partial^{l-1-i} \mathrm{e}^{\lambda t}}{\partial \lambda^{l-1-i}} = 0$$

podle (4.39). Funkce x_l tedy splňují rovnici (4.33). □

Lemma 5. *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ jsou všechny navzájem různé kořeny charakteristické rovnice (4.34), přičemž kořen λ_i je k_i-násobný, $i = 1, 2, \ldots, l$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$. Pak funkce*

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ y_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ y_3(t) = t^2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots,\ y_{k_1}(t) = t^{k_1 - 1} \mathrm{e}^{\lambda_1 t},$$

$$y_{k_1+1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ y_{k_1+2}(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_2 t},\ y_{k_1+3}(t) = t^2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \ldots,\ y_{k_1+k_2}(t) = t^{k_2-1} \mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \ldots,$$

$$\vdots$$

$$y_{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}+1}(t) = \mathrm{e}^{\lambda_l t},\ y_{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}+2}(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_l t},\ y_{k_1+k_2+\cdots+k_{l-1}+3}(t) = t^2 \mathrm{e}^{\lambda_l t}, \ldots,$$

$$y_n(t) = t^{k_l - 1} \mathrm{e}^{\lambda_l t}$$

tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.33).

Důkaz: Každá z funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je řešením rovnice (4.33) podle lemma 4. Stačí tedy dokázat jejich lineární nezávislost, tj. ukázat, že jejich wronskián

$$W(t; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2\prime(t) & \ldots & y_n\prime(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

je nenulový pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Připusťme, že existuje $t_0 \in \mathbb{R}$, že $W(t_0; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$. Pak podle Lemma 2 v 4.2.1 je $W(t; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Wronskián má lineárně závislé řádky a tedy existují konstanty $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, mezi nimiž je alespoň jedna nenulová, takové že

$$c_0 y_j + c_1 y_j' + \cdots + c_{n-1} y_j^{(n-1)} \equiv 0$$

pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ a n-krát diferencovatelnou funkci x nyní položíme

$$q(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \cdots + c_{n-1} \lambda^{n-1},$$

$$M\big(x(t)\big) = c_0 x(t) + c_1 x'(t) + c_2 x''(t) + \cdots + c_{n-1} x^{(n-1)}(t).$$

Pak q je polynom stupně nejvýše $n-1$. Pro funkci M a pro libovolné $\kappa \in \{1, 2, \dots, k_1\}$ platí

$$\begin{aligned} 0 = M\big(y_\kappa(t)\big) &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} y_\kappa(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \mathrm{e}^{\lambda t} \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \\ &= \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathrm{e}^{\lambda t} \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \sum_{i=0}^{n-1} c_i \lambda^i \mathrm{e}^{\lambda t} \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} \mathrm{e}^{\lambda t} q(\lambda) \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \\ &= \sum_{i=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa-1}{i} \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \mathrm{e}^{\lambda t} \frac{\partial^{\kappa-1-i}}{\partial \lambda^{\kappa-1-i}} q(\lambda) \bigg|_{\lambda=\lambda_1} = \sum_{i=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa-1}{i} t^i \mathrm{e}^{\lambda t} \frac{\partial^{\kappa-1-i}}{\partial \lambda^{\kappa-1-i}} q(\lambda) \bigg|_{\lambda=\lambda_1} . \end{aligned}$$

Zejména pro $t = 0$ dostáváme

$$0 = \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial \lambda^{\kappa-1}} q(\lambda) \bigg|_{\lambda=\lambda_1} .$$

To znamená, že λ_1 je kořenem $(\kappa-1)$-té derivace polynomu q pro každé $\kappa \in \{1, 2, \dots, k_1\}$, tedy λ_1 je k_1-násobným kořenem polynomu q.

Analogicky ukážeme, že λ_i je k_i-násobným kořenem polynomu q pro všechna $i = 1, 2, \dots, l$. Polynom q tedy musí být stupně alespoň $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$ a to je spor. □

Lemma 5 umožňuje zkonstruovat fundamentální systém řešení lineární rovnice (4.33). Mezi jeho prvky však mohou být i komplexní funkce, neboť polynom na levé straně charakteristické rovnice (4.34) může mít komplexně sdružené kořeny. Popíšeme, jak komplexní funkce z fundamentálního systému nahradíme lineárně nezávislými reálnými funkcemi.

Nechť $\lambda_c = \alpha + \mathrm{i}\beta$ je k-násobný komplexní kořen charakteristické rovnice (4.34). Pak také komplexně sdružené číslo $\overline{\lambda_c} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice a ve fundamentálním systému řešení z Lemma 2 jsou funkce

$$t^j \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t), \qquad t^j \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme funkce z fundamentálního systému přečíslovat tak, že

$$y_1(t) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t), \qquad y_2(t) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t - \mathrm{i}\sin\beta t).$$

Lemma 6. *Nechť $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ je fundamentální systém řešení rovnice (4.33) popsaný předchozí konstrukcí. Položme*

$$z_1 = z_1(t) = \frac{1}{2}\big(y_1(t) + y_2(t)\big) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \qquad z_2 = z_2(t) = \frac{\mathrm{i}}{2}\big(y_2(t) - y_1(t)\big) = t^j \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Pak funkce $z_1, z_2, y_3, \dots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.33).

Důkaz: Funkce z_1, z_2 jsou řešením rovnice (4.33) podle věty 10 (principu superpozice). Ukážeme, že funkce $z_1, z_2, y_3, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé.

Položme

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\mathrm{i}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \mathrm{i}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{W}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & y_3^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\det \mathsf{C} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\mathrm{i}\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \mathrm{i}\frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot 1 = \frac{\mathrm{i}}{2} \neq 0$$

a pro wronskián funkcí $z_1, z_2, y_3, \dots, y_n$ platí

$$W(t; z_1, z_2, y_3, \dots, y_n) = \det(\mathsf{W}(t)\mathsf{C}) = \det \mathsf{W}(t) \det \mathsf{C} = \frac{\mathrm{i}}{2} W(t; y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0.$$

□

Z lemmat 4–6 plyne následující závěr:

Věta 17. *Každému reálnému k-násobnému kořenu λ charakteristické rovnice (4.34) odpovídá k řešení*

$$\mathrm{e}^{\lambda t},\ t\mathrm{e}^{\lambda t},\ t^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \dots,\ t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

diferenciální rovnice (4.33) a každé dvojici j-násobných nereálných kořenů $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ charakteristické rovnice (4.34) odpovídá $2j$ reálných řešení

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \dots,\ t^{j-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \dots,\ t^{j-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$$

diferenciální rovnice (4.33). Množina řešení odpovídající všem kořenům charakteristické rovnice (4.34) tvoří fundamentální systém řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty (4.33).

4.4.4 Partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou

Partikulární řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_1 x' + a_0 x \quad = \quad f(t)\,. \tag{4.40}$$

lze najít metodou variace konstant 4.4.2. V některých případech však lze tuto metodu nahradit jednodušší metodou neurčitých koeficientů:

- $f(t) = P_m(t)$, kde P_m je polynom stupně m.
  Je-li nula k-násobným kořenem charakteristické rovnice (samozřejmě připouštíme i $k = 0$), lze partikulární řešení hledat ve tvaru $\tilde{x}(t) = t^k Q_m(t)$, kde Q_m je polynom stejného stupně jako P_m.

- $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} P_m(t)$.
  Substituce $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} y(t)$ převede rovnici na lineární rovnici n-tého řádu s pravou stranou P_m (předchozí případ).

- $f(t) = \cos(\alpha t)P_m(t)$ nebo $f(t) = \sin(\alpha t)P_m(t)$.
  Najdeme partikulární řešení rovnice
  $$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1x' + a_0x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}P_m(t).$$
  Jeho reálná část je partikulárním řešením uvažované rovnice v prvním případě, imaginární část ve druhém.

- $f(t) = g(t) + h(t)$.
  Partikulární řešení je součtem partikulárních řešení rovnic
  $$x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x = g(t) \quad \text{a} \quad x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x = h(t).$$

4.4.5 Eulerova rovnice

Eulerova rovnice je lineární rovnice n-tého řádu ve tvaru
$$x^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{t}x^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{t^2}x^{(n-2)} + \cdots + \frac{a_1}{t^{n-1}}x' + \frac{a_0}{t^n}x = g(t),$$
kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou reálné konstanty a g je funkce definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Tuto rovnici častěji zapisujeme ve tvaru
$$t^nx^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}t^{(n-2)}x^{n-2} + \cdots + a_1tx' + a_0x = f(t); \tag{4.41}$$
přitom $f(t) = t^ng(t)$. Řešíme ji zavedením nové nezávisle proměnné τ, kterou definujeme rovností $t = \mathrm{e}^\tau$, tj. $\tau = \ln t$. Pak je
$$\begin{aligned}
x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\\
x'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\\
x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\right) = -\frac{2}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} =\\
&= \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$
Dosadíme-li do rovnice (4.41), vypadnou faktory t, t^2, $\dots$, t^n, takže dostaneme lineární rovnici s konstantními koeficienty.

4.5 Riccatiho diferenciální rovnice

Lineární homogenní rovnice druhého řádu
$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{4.42}$$
je homogenní rovnicí v proměnných x, x', x'' ve smyslu zavedeném v 2.5.4, neboť pro funkci $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ danou předpisem
$$F(t, z_0, z_1, z_2) = b(t)z_0 + a(t)z_1 + z_2$$

a každou konstantu $c \in \mathbb{R}$ platí

$$F(t, cz_0, cz_1, cz_2) = b(t)cz_0 + a(t)cz_1 + cz_2 = c\big(b(t)z_0 + a(t)z_1 + z_2\big) = cF(t, z_0, z_1, z_2).$$

Řešení uvažované rovnice lze proto hledat ve tvaru

$$x(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s},$$

kde y je nová neznámá funkce a t_0 je nějaké číslo z průniku definičních oborů funkcí a, b. Při této substituci dostaneme

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s}, \\ x''(t) &= y'(t)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s} + y(t)^2\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s} = \big(y'(t) + y(t)^2\big)\,\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} y(s)\mathrm{d}s} \end{aligned}$$

a po dosazení do rovnice (4.42)

$$y'(t) + y(t)^2 + a(t)y(t) + b(t) = 0.$$

Po úpravě dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci y:

$$y' = -y^2 - a(t)y - b(t).$$

Lineární homogenní rovnici druhého řádu lze tedy převést na rovnici prvního řádu, která má na pravé straně kvadratický polynom, jehož proměnnou je hledaná funkce. Takovými rovnicemi se nyní budeme zabývat.

Riccatiho rovnice je rovnice tvaru

$$x' = p(t)x^2 + q(t)x + r(t).$$

Tuto rovnici můžeme užitím Eulerovy substituce

$$x(t) = -\frac{y'(t)}{p(t)y(t)}$$

převést na lineární rovnici druhého řádu. Platí totiž

$$x' = -\frac{y''py - y'(p'y + py')}{p^2y^2} = -\frac{y''}{py} + \frac{p'y'}{p^2y} + \frac{y'^2}{py^2}$$

a tedy

$$\begin{aligned} -\frac{y''}{py} + \frac{p'y'}{p^2y} + \frac{y'^2}{py^2} &= \frac{py'^2}{p^2y^2} - \frac{qy'}{py} + r \\ -\frac{y''}{py} + \frac{1}{py}\left(\frac{p'}{p} + q\right)y' - r &= 0 \\ y'' - \left(\frac{p'}{p} + q\right)y' + pry &= 0\,, \end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu.

Příklad: Uvažujme rovnici

$$t^2x' - t^2x^2 + 3tx - 2 = 0.$$

Tuto rovnici můžeme přepsat na tvar

$$x' = x^2 - \frac{3}{t}x + \frac{2}{t^2}, \tag{4.43}$$

je tedy $p \equiv 1$, $q(t) = -\frac{3}{t}$, $r(t) = \frac{2}{t^2}$. Zavedeme substituci

$$x = -\frac{y'}{y}. \tag{4.44}$$

Pak je

$$x' = -\frac{y''y - y'y'}{y^2} = -\frac{y''}{y} + \left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

$$x^2 - \frac{3}{t}x + \frac{2}{t^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)^2 + \frac{3y'}{ty} + \frac{2}{t^2},$$

takže rovnice (4.43) se transformuje na tvar

$$-\frac{y''}{y} = \frac{3y'}{ty} + \frac{2}{t^2}$$

a po úpravě

$$t^2y'' + 3ty' + 2y = 0. \tag{4.45}$$

To je rovnice Eulerova, viz 4.4.5. Zavedeme tedy novou nezávisle proměnnou s vztahem

$$s = \ln t. \tag{4.46}$$

Pak je

$$y' = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \qquad y'' = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)$$

a po dosazení do rovnice (4.45) dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + 2y = 0, \tag{4.47}$$

která je lineární s konstantními koeficienty. Její charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $-1 \pm \mathrm{i}$. To znamená, že rovnice (4.47) má obecné řešení

$$y(s) = (A\cos s + B\sin s)\mathrm{e}^{-s}.$$

Zpětnou substitucí (4.46) dostaneme řešení Eulerovy rovnice (4.45)

$$y(t) = \frac{1}{t}(A\cos\ln t + B\sin\ln t).$$

Jeho derivace je

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}\big((B - A)\cos\ln t - (B + A)\sin\ln t\big).$$

Po dosazení do transformačního vztahu (4.44) dostaneme řešení původní rovnice (4.43) ve tvaru

$$x(t) = \frac{1}{t}\frac{(A-B)\cos\ln t + (A+B)\sin\ln t}{A\cos\ln t + B\sin\ln t}. \tag{4.48}$$

Riccatiho rovnice (4.43) je však rovnice prvního řádu, její řešení by mělo záviset jen na jedné konstantě. Proto výsledek ještě upravíme. Integrační konstanta A může být nenulová nebo nulová. V prvním případě označíme $C = B/A$ a řešení (4.48) Riccatiho rovnice (4.43) přepíšeme ve tvaru

$$x(t) = \frac{(1-C)\cos\ln t + (1+C)\sin\ln t}{t(\cos\ln t + C\sin\ln t)},$$

ve druhém případě $A = 0$ dostaneme řešení tvaru

$$x(t) = \frac{\sin\ln t - \cos\ln t}{t\sin\ln t}.$$

■

Příkladem na užití Riccatiho rovnice s konstantními koeficienty je model udržitelného rybolovu 6.7.

4.6 Cvičení

Řešte rovnice

1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ **2)** $x'' + tx' = 0$ **3)** $tx''' - 2x'' = 0$

Ukažte, že $x = u(t)$ je řešením dané rovnice a rovnici vyřešte.

4) $u = t^2;\ t^2x'' - 2x = 0$ **5)** $u = \sqrt{t};\ x'' + \dfrac{x}{4t^2} = 0\ (t > 0)$

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

6) $x'' + 2x = 0$
7) $x'' + 6x' + 5x = 0$
8) $x'' + 6x' + 9x = 0$
9) $x'' - 2x' + 4x = 0$
10) $x'' - x = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -2$
11) $x'' + 4x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
12) $x'' + x' = t$
13) $x'' + x = \sin t$
14) $x'' - x = \mathrm{e}^t$
15) $x'' - 3x' - 10x = -3$
16) $x'' - x' = \sin t$
17) $x'' - 3x' = \mathrm{e}^{3t} - 12t$
18) $x'' + x = \operatorname{cotg} t$
19) $x'' - 8x' = \mathrm{e}^{8t}$
20) $x'' + 2x' = t^2 - \mathrm{e}^t$
21) $t^2x'' - tx' + x = t$
22) $t^2x'' - tx' + 2x = (\ln t)^2$
23) $t^3x' - t^4x^2 - t^2x = 2$

Řešte systémy rovnic

24) $\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= 3x - 4y \end{aligned}$ **25)** $\begin{aligned} x' &= -x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t \\ y' &= \tfrac{4}{3}x + y - t \end{aligned}$

26) $\begin{aligned} x' + 3x + 2y &= 5\sin t \\ y' - 2x + 7y &= 8\cos t \end{aligned}$ **27)** $\begin{aligned} 4x' + 9y' + 2x + 31y &= \mathrm{e}^t \\ 3x' + 7y' + x + 24y &= 3 \end{aligned}$

Výsledky:

1) $x = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2$ **2)** $x = C_1\int \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + C_2$ **3)** $x = C_1t^4 + C_2t + C_3$ **4)** $x = \dfrac{C_1}{t} + C_2t^2$ **5)** $x = \sqrt{t}\,(C_1\ln|t| + C_2)$ **6)** $x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2t}$ **7)** $x = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-5t}$ **8)** $x = (C_1 + C_2t)\mathrm{e}^{-3t}$

9) $x = e^t(C_1 \cos\sqrt{3}\,t + C_2 \sin\sqrt{3}\,t)$ **10)** $x = \dfrac{3e^{-t} - e^t}{2}$ **11** $x = \sin 2t$ **12)** $x = C_1 + C_2 e^{-t} + \dfrac{t^2}{2} - t$
13) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \dfrac{t \cos t}{2}$ **14)** $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \dfrac{te^t}{2}$ **15)** $x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-2t} + \frac{3}{10}$
16) $x = C_1 + C_2 e^t + \dfrac{\cos t - \sin t}{2}$ **17)** $x = C_1 + C_2 e^{3t} + 2t^2 + \dfrac{te^{3t} + 4t}{3}$
18) $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \sin t \ln\left|\dfrac{1 + \cos t}{\sin t}\right|$ **19)** $x = C_1 + \left(C_2 + \dfrac{t}{8}\right) e^{8t}$
20) $x = C_1 + C_2 e^{-2t} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{4} - \dfrac{e^t}{3}$ **21)** $x = t\left(A \ln t + B + \frac{1}{2}(\ln t)^2\right)$
22) $At \sin(B + \ln t) + (1 + \ln t)^2$ **23)** $x = \dfrac{2Ct - 1}{t^2(1 - Ct)}$, $x = -\dfrac{2}{t^2}$
24) $x = Ae^{-t} + Be^{-5t}, y = Ae^{-t} - 3Be^{-5t}$
25) $x = Ae^{t/3} + Be^{-t/3} - 6t, y = -2Ae^{t/3} - Be^{-t/3} + 9t + \frac{1}{2}e^t + 9$
26) $x = Ae^{-5t} + Bte^{-5t} + \frac{365}{338}\sin t - \frac{307}{338}\cos t, y = \left(A - \frac{1}{2}B\right)e^{-5t} + Bte^{-5t} + \frac{72}{169}\sin t + \frac{139}{169}\cos t$
27) $x = e^{-4t}(A \cos t + B \sin t) + \frac{31}{26}e^t - \frac{93}{17}, y = e^{-4t}((B - A)\cos t - (B + A)\sin t) - \frac{2}{13}e^t + \frac{6}{17}$

Kapitola 5

Autonomní systémy

Budeme uvažovat systém rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{5.1}$$

kde $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina s neprázdným vnitřkem a bez izolovaných bodů. Systém (5.1) se nazývá *autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic*, definiční obor pravých stran Ω se nazývá *fázový* (nebo *stavový*) *prostor*. V celé kapitole budeme předpokládat, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá funkce taková, že počáteční problém (5.1) s podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x_0} \tag{5.2}$$

má jediné řešení pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega$.

Věta 18. *Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ řešením úlohy (5.1), (5.2), pak pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t+\tau)$ řešením rovnice (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0 - \tau) = \boldsymbol{x_0}$. Je-li $\boldsymbol{x}$ definováno na intervalu (S, T), je $\boldsymbol{y}$ definováno na intervalu $(S - \tau, T - \tau)$.*

Důkaz:
$$\boldsymbol{y}'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t+\tau) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t+\tau)\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)).$$
□

Tato věta ukazuje, že autonomní systémy popisují děje invariantní vzhledem k posunutí v čase. Bez újmy na obecnosti se tedy u autonomních systémů můžeme omezit na počátečními problémy s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \in \Omega. \tag{5.3}$$

5.1 Fázový prostor, trajektorie, stacionární body

Úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ problému (5.1), (5.3) definované na intervalu (S, T), (přitom platí $-\infty \le S < T \le \infty$) lze interpretovat buďto jako graf zobrazení $\boldsymbol{x} : (S, T) \to \Omega$, nebo jako orientovanou křivku $C = \{\boldsymbol{x}(t) : S < t < T\}$ ve fázovém prostoru Ω zadanou parametricky. Tuto křivku nazveme *trajektorií řešení $\boldsymbol{x}$*.

Křivku $C^+ = \{\boldsymbol{x}(t) : t \ge 0\}$, resp. $C^- = \{\boldsymbol{x}(t) : t \le 0\}$, nazveme *pozitivní*, resp. *negativní, polotrajektorií* systému 5.1.

Příklad: Lineární systém

$$x' = -y, \quad y' = x$$

má řešení $x(t) = r\cos(t+\psi)$, $y(t) = r\sin(t+\psi)$, kde

$$r = \sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}\,, \qquad \cos\psi = \frac{x(0)}{\sqrt{x(0)^2+y(0)^2}}\,, \quad \sin\psi = \frac{y(0)}{\sqrt{x(0)^2+y(0)^2}}.$$

Poněvadž $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, jsou trajektorie řešení kružnice se středem v počátku. ■

Věta 19. *Jsou-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ řešení systému (5.1), pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají žádný společný bod.*

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{y}(t_2)$ pro nějaká $t_1, t_2 \geq 0$. Podle věty 18 je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t + (t_1 - t_2))$ řešením rovnice (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_2) = \boldsymbol{x}(t_1)$. Trajektorie řešení $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{x}$ zřejmě splývají. Současně ale $\boldsymbol{z}$ je řešením rovnice (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_2) = \boldsymbol{y}(t_2)$ a z předpokládané jednoznačné řešitelnosti problému (5.1) s libovolnou počáteční podmínkou plyne $\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{y}$. □

Dále budeme předpokládat, že úplné řešení Cauchyova problému (5.1), (5.3) je pro každou počáteční hodnotu $\boldsymbol{x_0} \in \Omega$ definováno na intervalu $(-\infty, \infty)$.

Definice 13. Bod $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ se nazývá *stacionární bod* (*rovnovážný bod, ekvilibrium, kritický bod, singulární bod, degenerovaná trajektorie*) *rovnice* (5.1), jestliže $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = 0$.
Trajektorie rovnice (5.1) se nazývá *cyklus*, je-li uzavřenou křivkou.
Trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ rovnice (5.1) se nazývá *homoklinická*, jestliže existuje stacionární bod $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ takový, že $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$.
Trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ rovnice (5.1) se nazývá *heteroklinická*, jestliže existují stacionární body $\boldsymbol{x}_1^* \in \Omega$, $\boldsymbol{x}_2^* \in \Omega$ takové, že $\boldsymbol{x}_1^* \neq \boldsymbol{x}_2^*$, $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_1^*$ a $\lim\limits_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_2^*$.

Věta 20. *Libovolná trajektorie řešení autonomního systému* (5.1) *je právě jednoho z typů:*
– *stacionární bod (odpovídá konstantnímu řešením);*
– *cyklus (odpovídá nekonstantnímu periodickému řešení);*
– *trajektorie, která sama sebe neprotíná.*

Důkaz plyne z vět 18 a 19. □

5.1.1 Autonomní rovnice (autonomní systém na přímce)

Rovnice (5.1) pro $n = 1$, tj. rovnice

$$x' = f(x) \tag{5.4}$$

je speciálním případem rovnice se separovanými proměnnými. Podle 2.2.2 lze tedy najít její řešení přinejmenším v implicitním tvaru. Často ovšem rozbor stavového prostoru dá názornější představu o průběhu jejího řešení.

Stavovým prostorem Ω autonomní rovnice (5.4) je interval nebo sjednocení intervalů. Trajektorie může být

- Přímka, pokud je stavovým prostorem celá množina $\mathbb{R}$ a funkce f je stále kladná nebo stále záporná.

- Polopřímka bez krajního bodu, pokud existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že $f(a) = 0$ nebo $a \notin \Omega$ nastává některá z (nevylučujících se) možností

$$(-\infty, a) \subseteq \Omega,\ \ f(x) \neq 0 \text{ pro } x < a, \quad \text{nebo} \quad (a, \infty) \subseteq \Omega,\ \ f(x) \neq 0 \text{ pro } x > a.$$

- Vnitřek úsečky, pokud existují čísla $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $(a, b) \subseteq \Omega$, $f(x) \neq 0$ pro $x \in (a, b)$ a
$$f(a) = 0 \text{ nebo } a \notin \Omega \quad \text{a současně} \quad f(b) = 0 \text{ nebo } b \notin \Omega.$$
V případě $a \in \Omega$, $b \in \Omega$ se jedná o heteroklinickou trajektorii.

- Stacionární bod $x^* \in \Omega$, pokud $f(x^*) = 0$.

Je-li trajektorií přímka nebo vnitřek polopřímky nebo úsečky, pak je trajektorie orientovaná souhlasně s orientací osy x, pokud $f(x) > 0$ ve všech bodech této přímky nebo vnitřku polopřímky nebo úsečky. Takovým trajektoriím odpovídají rostoucí řešení rovnice (5.4). Pokud je zde $f(x) < 0$, pak je trajektorie orientována proti orientaci osy x.

Nechť x^* je stacionárním bodem rovnice (5.4) takovým, že existuje jeho pravé ryzí okolí $(x^*, x^* + \varepsilon) \subseteq \Omega$ tak, že $f(x) \neq 0$ pro $x \in (x^*, x^* + \varepsilon)$. Trajektorie odpovídající řešení rovnice (5.4) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 \in (x^*, x^* + \varepsilon)$ směřují ke stacionárnímu, resp. od stacionárního, bodu x^*, pokud $f(x) < 0$, resp. $f(x) > 0$, na intervalu $(x^*, x^* + \varepsilon)$. Analogicky můžeme vyšetřit směr trajektorií nalevo od stacionárního bodu.

Nechť nyní x^* je vnitřní stacionární bod rovnice (5.4), tj. $x^* \in \Omega$ a $f(x^*) = 0$. Pokud je $f'(x^*) \neq 0$, pak je tento stacionární bod izolovaný, tj. existuje jeho ryzí okolí, v němž $f(x) \neq 0$. Je-li přitom $f'(x^*) > 0$, resp. $f'(x^*) < 0$, pak všechny trajektorie začínající v okolí bodu x^* směřují od stacionárního, resp. ke stacionárnímu, bodu x^*.

5.1.2 Další vlastnosti autonomních systémů

Definice 14. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je stacionární bod autonomního systému (5.1). Položme

$$\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix}.$$

Řekneme, že stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ je *hyperbolický*, pokud každé vlastní číslo matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ má nenulovou reálnou část. Mají-li všechna vlastní čísla matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ kladnou reálnou část, řekneme, že hyperbolický stacionární $\boldsymbol{x}^*$ bod je *zdroj* (*source*); mají-li všechna vlastní čísla matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ zápornou reálnou část, řekneme, že hyperbolický stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ je *stok* (*sink*).

Homogenní lineární systém s konstantní maticí

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{x}$$

se nazývá *linearizace systému* (5.1) *ve stacionárním bodě* $\boldsymbol{x}^*$.

Matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)$ je vlastně Jacobiho maticí zobrazení $\boldsymbol{f}$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$, proto se někdy používá označení $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$. Tato matice se někdy také nazývá *variační matice systému* (5.1) a linearizace tohoto systému se nazývá *variační rovnice systému* (5.1).

Definice 15. Neprázdná podmnožina A fázového prostoru Ω systému (5.1) se nazývá

pozitivně invariantní (invariantní vpřed, forward invariant), pokud pro libovolné řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A$ platí, že $\boldsymbol{x}(t) \in A$ pro všechna $t \geq 0$;

negativně invariantní (invariantní vzad, backward invariant), jestliže pro každé řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A$ platí, že $\boldsymbol{x}(t) \in A$ pro všechna $t \leq 0$;

invariantní, je-li současně pozitivně i negativně invariantní.

Poznámka 5. Povšimněme si ještě dvou vlastností invariantních množin:

1. Jsou-li množiny $A, B \in \Omega$ pozitivně (resp. negativně) invariantní, pak také množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou pozitivně (resp. negativně) invariantní.
2. Libovolná trajektorie C systému (5.1) je invariantní množinou tohoto systému.

Definice 16. Nechť $A, B \subseteq \Omega$, $B \neq \emptyset$ a ϱ je nějaká metrika na Ω ekvivalentní s euklidovskou. Řekneme, že

množina A atrahuje (přitahuje) množinu B (množina A je atraktorem množiny B), jestliže pro každé řešení systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in B$ platí, že

$$\lim_{t\to\infty} \varrho\bigl(\boldsymbol{x}(t), A\bigr) = 0;$$

množina A je (globální) atraktor, jestliže A přitahuje Ω;

množina A absorbuje množinu B, jestliže A je pozitivně invariantní a ke každému řešení $\boldsymbol{x}$ systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in B$ existuje $T \geq 0$ takové, že $\boldsymbol{x}(T) \in A$;

množina A je globálně absorbující, jestliže absorbuje množinu Ω.

Poznámka 6. Nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešením systému (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x_0} \in \Omega$. Pokud množina A je ω-limitní množinou řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$, pak je pozitivně invariantním atraktorem množiny $\{\boldsymbol{x_0}\}$.

Poznámka 7. Trajektorii C systému (5.1) nazveme *limitní trajektorií,* jestliže existuje množina $B \subseteq \Omega$ taková, že $B \cap (\Omega \setminus C) \neq \emptyset$ a C atrahuje množinu B. Je-li C navíc cyklem, nazveme ho *limitním cyklem.*

Poznámka 8. Buď $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jestliže existují kladné konstanty K, δ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ splňující podmínku $|x_i| \geq K$ platí

$$(\operatorname{sgn} x_i) f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta |x_i|,$$

pak množina $A_i = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega : |x_i| \leq K\}$ je globálně absorbující množinou systému (5.1).

Důkaz: Nejprve ukážeme, že každá trajektorie protíná množinu A_i. Připusťme, že existuje řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \bigl(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,), \dots, x_n(\,\cdot\,)\bigr)$ systému (5.1) takové, že pro všechna $t \geq 0$ je $|x_i(t)| > K$. Položme $u(t) = |x_i(t)|$. Pak pro všechna $t \geq 0$ je

$$u'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)| = \bigl(\operatorname{sgn} x_i(t)\bigr) f_i\bigl(\boldsymbol{x}(t)\bigr) \leq -\delta |x_i(t)| = -\delta u(t),$$

neboli
$$\frac{u'(t)}{u(t)} \le -\delta.$$
Integrací této nerovnosti v mezích od 0 po t dostaneme $\ln u(t) - \ln u(0) \le -\delta t$, tj.

$$0 \le |x_i(t)| = u(t) \le u(0)\mathrm{e}^{-\delta t} = |x_i(0)|\mathrm{e}^{-\delta t}$$

pro libovolné $t \ge 0$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{t\to\infty} |x_i(t)| = 0$, což je ve sporu s předpokladem $|x_i(t)| > K > 0$.
Množina A_i má neprázdný průnik s libovolnou trajektorií, je tedy neprázdná. Ukážeme, že je navíc pozitivně invariantní. Připusťme, že existuje řešení

$$\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,), \dots, x_n(\,\cdot\,)\big)$$

systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A_i$ takové, že pro jisté $t_1 > 0$ je $\boldsymbol{x}(t_1) \notin A_i$, tj. $|x_i(t_1)| > K$. Položme
$$M = \{t \in \mathbb{R} :\ 0 \le t < t_1, |x_i(t)| \le K\}\,.$$
Pak $0 \in M$, takže M je neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Existuje tedy $T = \sup M$. Ze spojitosti funkce $x_i(\,\cdot\,)$ a z vlastností suprema plyne, že $T < t_1$, $x_i(T) = K$ a funkce $x_i(\,\cdot\,)$ je v bodě T rostoucí. Avšak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)|\bigg|_{t=T} = \big(\operatorname{sgn} x_i(T)\big) f_i\big(\boldsymbol{x}(T)\big) \le -\delta |x_i(t)| = -\delta K < 0,$$

což je spor s faktem, že funkce $x_i(\,\cdot\,)$ je v T rostoucí. □

Definice 17. Systém (5.1) se nazývá *dissipativní*, jestliže existuje ohraničená globálně absorbující množina.

Z definice bezprostředně plyne:

Poznámka 9. Je-li systém (5.1) dissipativní, pak každé jeho řešení je ohraničené.

V aplikacích budou užitečné následující vlastnosti dissipativních systémů:

Poznámka 10. Jestliže existují kladné konstanty K, δ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega$ taková, že $\|\boldsymbol{x}\| \ge K$ platí

$$(\operatorname{sgn} x_i) f_i(\boldsymbol{x}) \le -\delta,$$

pak je systém (5.1) dissipativní a globálně absorbující je množina $A = \{\boldsymbol{x} \in \Omega :\ \|\boldsymbol{x}\| \le K\}$.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že každá trajektorie protíná množinu A. Připusťme, že existuje řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (5.1) takové, že $\boldsymbol{x}(t) \notin A$ pro všechna $t \ge 0$. Pak $\|\boldsymbol{x}(t)\| > K$ pro všechna $t > 0$, a tedy pro libovolné $t > 0$ platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{x}(t)\| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)| = \sum_{i=1}^{n} \big(\operatorname{sgn} x_i(t)\big) x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \big(\operatorname{sgn} x_i(t)\big) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \le \sum_{i=1}^{n} (-\delta) = -n\delta.$$

Integrací této nerovnosti dostaneme $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\boldsymbol{x}(0)\| - n\delta t$, takže pro $t \ge \dfrac{\|\boldsymbol{x}(0)\| - K}{n\delta}$ je $\|\boldsymbol{x}(t)\| \le K$, což je spor. Každá trajektorie má tedy s množinou A neprázdný průnik, což také

znamená, že množina A je neprázdná.
Ukážeme, že množina A je navíc pozitivně invariantní. Nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešením systému (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) \in A$. Připusťme, že existuje $t_1 > 0$, pro něž $\boldsymbol{x}(t_1) \notin A$. Pak $\|\boldsymbol{x}(t_1)\| > K$. Položme

$$M = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < t_1, \|\boldsymbol{x}(t)\| \leq K\}.$$

Pak $0 \in M$, takže M je neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Existuje tedy $T = \sup M$. Ze spojitosti funkce $\|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\|$ a z vlastností suprema plyne, že $\|\boldsymbol{x}(T)\| = K$ a funkce $\|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\|$ je v bodě T rostoucí. Avšak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\boldsymbol{x}(t)\|\Big|_{t=T} = \sum_{i=1}^{n}\big(\operatorname{sgn} x_i(T)\big)x_i'(T) = \sum_{i=1}^{n}\big(\operatorname{sgn} x_i(T)\big)f_i\big(\boldsymbol{x}(T)\big) \leq -n\delta < 0,$$

což je spor s tím, že funkce $\|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\|$ je v bodě T rostoucí. Pro všechna $t > 0$ je tedy $\boldsymbol{x} \in A$ a množina A je invariantní. □

Poznámka 11. Nechť ke každému $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existují kladné konstanty K_i, δ_i takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ z nerovnosti $|x_i| \geq K_i$ plyne nerovnost

$$(\operatorname{sgn} x_i)f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta_i|x_i|.$$

Pak je systém (5.1) dissipativní s globálně absorbující množinou

$$A = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : |x_1| \leq K_1, |x_2| \leq K_2, \ldots, |x_n| \leq K_n\}.$$

Důkaz: Položme $A_i = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |x_i| \leq K_i\}$. Pak každá z množin A_i je podle poznámky 8 globálně absorbující množinou a $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Podle poznámky 5 je množina A pozitivně invariantní. Ukážeme, že je také globálně absorbující.
Buď $\boldsymbol{x}(t)$ libovolné řešení systému (5.1). Podle poznámky 8 existuje $t_1 \geq 0$ takové, že $|x_1(t_1)| \leq K_1$ pro všechna $t \geq t_1$. Dále existuje $t_2 \geq t_1$ takové, že pro všechna $t \geq t_2$ je $|x_2(t_2)| \leq K_2$ atd. Nakonec existuje $t_n \geq t_{n-1}$ takové, že $|x_n(t)| \leq K_n$ pro všechna $t \geq t_n$. Takže pro všechna $t \geq t_n$ je $|x_1(t)| \leq K_1, |x_2(t)| \leq K_2, \ldots, |x_n(t)| \leq K_n$, tj. $\boldsymbol{x}(t) \in A$. □

5.2 Autonomní systémy v rovině

V tomto oddílu se budeme zabývat systémem (5.1) pro $n = 2$, tedy systémem

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Definice 18. Křivka zadaná implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ (resp. $g(x,y) = 0$) se nazývá *x-nulklina* (resp. *y-nulklina*) *rovnice* (5.5).

Průsečík nulklin je stacionární bod, tečna k trajektorii v jejím průsečíku s x-nulklinou (resp. y-nulklinou) je rovnoběžná s osou y (resp. x).

Definice 19 (typy stacionárních bodů v rovině)**.** Stacionární bod (x^*, y^*) systému (5.5) se nazývá

bod rotace, jestliže v jeho libovolném okolí leží cyklus, obsahující (x^*, y^*) ve svém vnitřku;

střed, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že každá trajektorie s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ je cyklem obsahujícím (x^*, y^*) ve svém vnitřku (střed je speciálním případem bodu rotace);

ohnisko, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ platí
$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$$
a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $\big(x(t), y(t)\big) - (x^*, y^*)$ s nějakým pevným vektorem platí
$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\infty$$
(trajektorie se přibližuje ke stacionárnímu bodu (nebo se od něho vzdaluje) po spirále);

uzel, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ platí
$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$$
a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $\big(x(t), y(t)\big) - (x^*, y^*)$ s nějakým pevným vektorem existuje vlastní $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t)$ nebo $\lim\limits_{t\to-\infty} \psi(t)$;

sedlo, jestliže existuje jen konečný počet trajektorií $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ takových, že
$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)\,.$$

5.2.1 Stacionární body lineárního homogenního autonomního systému

Lineární homogenní autonomní systém je lineární homogenní systém s konstantní maticí. Budeme se tedy zabývat dvojrozměrným systémem
$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy. \end{aligned} \tag{5.6}$$
Označme
$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Pokud $\det \mathsf{A} = ad - bc \neq 0$, má systém (5.6) jediný stacionární bod $(0, 0)$. Vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristické rovnice
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb = \lambda^2 - (\operatorname{tr}\mathsf{A})\lambda + \det\mathsf{A} = 0, \tag{5.7}$$
tedy při označení $D = (\operatorname{tr}\mathsf{A})^2 - 4\det\mathsf{A}$ je $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}\mathsf{A} \pm \sqrt{D}\Big)$.

(i) $\det \mathsf{A} > 0$

(i.1) $\operatorname{tr} \mathsf{A} = 0$

V tomto případě je $D = -4\det \mathsf{A} < 0$ a kořeny charakteristické rovnice (5.7) jsou ryze imaginární, $\lambda_1 = \mathrm{i}\sqrt{\det \mathsf{A}}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\det \mathsf{A}}$, takže řešení systému (5.6) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\det \mathsf{A}}\, t - \varphi\right) \\ -\sqrt{-\frac{c}{b}}\, \sin\left(\sqrt{\det \mathsf{A}}\, t - \varphi + \tilde{\varphi}\right) \end{pmatrix}$$

pro vhodné konstanty ϱ, φ, přičemž

$$\varrho \neq 0, \qquad \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = \frac{a}{\sqrt{\det \mathsf{A}}}, \qquad \tilde{\varphi} \notin \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Jedná se o parametrické vyjádření elips se středem $(0,0)$, každá trajektorie je tedy cyklem se stacionárním bodem $(0,0)$ ve svém vnitřku. To znamená, že stacionární bod $(0,0)$ je střed.

(i.2) $\operatorname{tr} \mathsf{A} \neq 0$

(i.2.a) $\det \mathsf{A} > \frac{1}{4}\,(\operatorname{tr} \mathsf{A})^2$

V tomto případě je $D < 0$, charakteristická rovnice (5.7) má dva různé komplexně sdružené kořeny $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} \mathsf{A} \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}\right)$ a systém (5.6) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ má řešení

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{-D}}{2} t - \varphi\right) \\ -\sqrt{-\frac{c}{b}}\, \sin\left(\frac{\sqrt{-D}}{2} t - \varphi - \tilde{\varphi}\right) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t},$$

kde ϱ, φ, $\tilde{\varphi}$ jsou vhodné konstanty, přičemž

$$\varrho \neq 0, \qquad \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = \frac{d-a}{\sqrt{-D}}, \qquad \tilde{\varphi} \notin \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Jedná se o parametrické vyjádření spirály, která se „navíjí“ na stacionární bod $(0,0)$ nebo se z něho „odvíjí“.

Pokud $\operatorname{tr} \mathsf{A} > 0$, pak $\lim\limits_{t \to -\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pokud $\operatorname{tr} \mathsf{A} < 0$, pak $\lim\limits_{t \to \infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i.2.b) $\det \mathsf{A} < \frac{1}{4}\,(\operatorname{tr} \mathsf{A})^2$.

Nechť $\big(x(t), y(t)\big)$ je řešením systému (5.6) a označme $\varphi(t)$ úhel, který svírá přímka procházející body $(0,0)$, $\big(x(t), y(t)\big)$ s vodorovnou osou. Platí

$$\operatorname{tg} \psi(t) = \frac{y(t)}{x(t)}, \text{ pokud } x(t) \neq 0, \qquad \operatorname{cotg} \psi(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \text{ pokud } y(t) \neq 0.$$

V tomto případě je $D > 0$ a $\sqrt{D} < |\operatorname{tr} \mathsf{A}|$. Charakteristická rovnice (5.7) má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2 takové, že oba mají stejné znaménko jako $\operatorname{tr} \mathsf{A}$. Nechť pro určitost $\lambda_1 < \lambda_2$ a

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

je vlastní vektor příslušný k vlastní hodnotě λ_1, resp. λ_2. Alespoň jedna ze souřadnic každého z vlastních vektorů je nenulová. Obecné řešení systému (5.6) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t};$$

přitom alespoň jedna z konstant α, β je nenulová.

Je-li $\operatorname{tr} \mathsf{A} > 0$, pak $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ a

$$\lim_{t\to-\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to-\infty} \left(\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \right) = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} 0 + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

je-li $\operatorname{tr} \mathsf{A} < 0$, pak $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ a

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} \left(\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \right) = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} 0 + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud $\alpha \neq 0 \neq u_1$, pak

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\alpha u_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\alpha u_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\alpha u_2 + \beta v_2 \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{\alpha u_1 + \beta v_1 \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} = \frac{u_2}{u_1}$$

a pokud $\alpha \neq 0 \neq v_1$, pak

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha u_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\alpha u_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\alpha u_2 \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + \beta v_2}{\alpha u_1 \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + \beta v_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Analogicky, pokud $\alpha \neq 0$, pak

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{u_1}{u_2} \quad \text{když } u_2 \neq 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{když } v_2 \neq 0.$$

Pokud $\alpha = 0$, pak

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{když } v_1 \neq 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{když } v_2 \neq 0.$$

Stacionární bod $(0,0)$ je v tomto případě uzel. Směrový vektor polotečny k libovolné trajektorii ve stacionárním bodě je vlastním vektorem matice A.

(i.2.c) $\det \mathsf{A} = \frac{1}{4} (\operatorname{tr} \mathsf{A})^2$

V tomto případě je $\operatorname{tr} \mathsf{A} \neq 0$, neboť $\det \mathsf{A} \neq 0$, charakteristická rovnice (5.7) má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}$ a systém (5.6) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ má řešení

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \gamma + \delta t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou nějaké konstanty, z nichž aspoň dvě jsou nenulové. Proto platí

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\delta}{\beta} \quad \text{pro } \beta \neq 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\beta}{\delta} \quad \text{pro } \delta \neq 0,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{pro } \beta = 0 = \delta.$$

Je-li $\operatorname{tr}\mathsf{A} < 0$, pak

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} t\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathsf{A}\right)t}} = 0$$

a tedy $\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Je-li $\operatorname{tr}\mathsf{A} > 0$ pak analogicky $\lim_{t\to-\infty}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Stacionární bod $(0,0)$ je v tomto případě uzel. Nyní však již obecně neplatí, že směrový vektor polotečny k trajektorii ve stacionárním bodě je vlastním vektorem matice A; v případě $\beta = 0 = \delta$ (tj. pokud vlastní hodnotě λ matice A přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory) je každá přímka procházející bodem $(0,0)$ polotečnou nějaké trajektorie.

Je-li $b \neq 0$, pak z podmínky $\det\mathsf{A} = \frac{1}{4}(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2$, tj. $4ad - 4bc = (a+d)^2$ plyne, že

$$c = -\frac{1}{b}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Vlastní hodnotě $\lambda = \frac{1}{2}(a+d)$ přísluší jediný (až na násobek skalárem) vlastní vektor $\begin{pmatrix}2b\\a-d\end{pmatrix}$. Je-li $b = 0$, pak z podmínky $\det\mathsf{A} = \frac{1}{4}(\operatorname{tr}\mathsf{A})^2$ plyne $(a-d)^2 = 0$, tj. $a = d$. Matice $\begin{pmatrix}a & 0\\c & a\end{pmatrix}$ má pro $c \neq 0$ jednoznačně určený vlastní vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ příslušný k vlastní hodnotě $\lambda = a$; pro $c = 0$ je každý vektor vlastním vektorem matice $\begin{pmatrix}a & 0\\0 & a\end{pmatrix}$ příslušným k vlastní hodnotě $\lambda = a$.

Nyní můžeme předchozí tvrzení upřesnit. Je-li $a^2 + d^2 > 0$, pak směrový vektor polotečny k trajektorii ve stacionárním bodě $(0,0)$ je vlastním vektorem matice A příslušným k vlastní hodnotě $\lambda = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathsf{A}$. Je-li $a^2 + d^2 > 0$, pak každý nenulový vektor je směrovým vektorem polotečny k nějaké trajektorii ve stacionárním bodě $(0,0)$.

(ii) $\det\mathsf{A} < 0$

V tomto případě je $D > (\operatorname{tr}\mathsf{A})^2 \geq 0$, což znamená, že rovnice (5.7) má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2. Poněvadž $\sqrt{D} > |\operatorname{tr}\mathsf{A}|$, mají tyto kořeny opačná znaménka. Nechť pro určitost $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Označme $\boldsymbol{v}_1$, resp. $\boldsymbol{v}_2$, vlastní vektor matice A příslušný k vlastní hodnotě λ_1, resp. λ_2. Obecné řešení systému (5.6) je podle 4.3

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \alpha\boldsymbol{v}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta\boldsymbol{v}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

kde α, β jsou nějaké konstanty. Pro $\alpha = 0 \neq \beta$ je

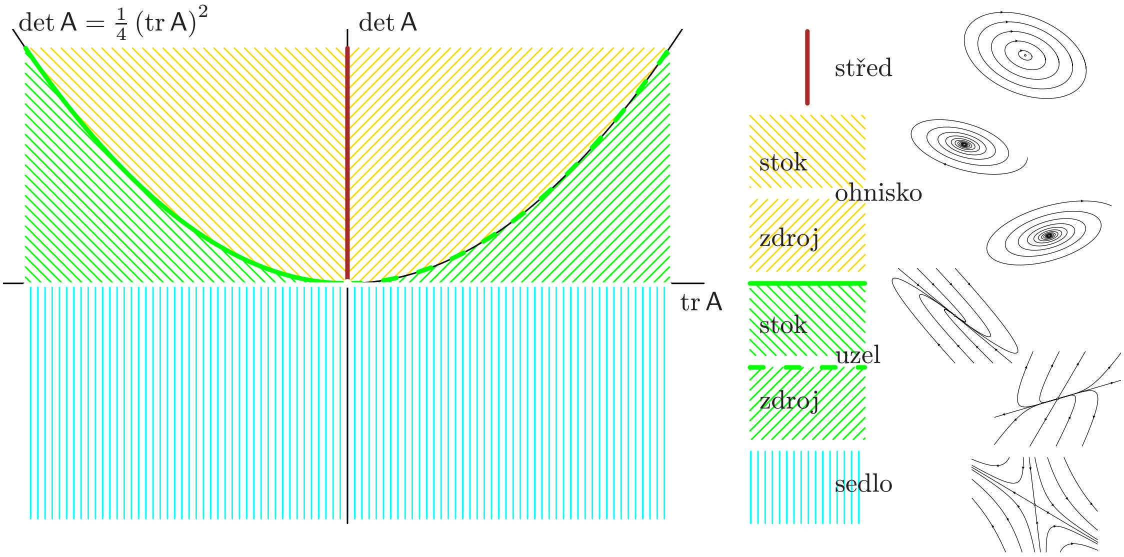
$$\lim_{t\to-\infty}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = (\beta\boldsymbol{v}_2)\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \boldsymbol{o},$$

pro $\alpha \neq 0 = \beta$ je

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = (\alpha\boldsymbol{v}_1)\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \boldsymbol{o}$$

a pro $\alpha \neq 0 \neq \beta$ je

$$\lim_{t\to-\infty}\left\|\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\right\| = \|\alpha\boldsymbol{v}_1\|\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \|\beta\boldsymbol{v}_2\|\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \infty + 0 = \infty,$$



Obrázek 5.1: Typy izolovaných stacionárních bodů dvourozměrného autonomního lineárního homogenního systému (5.6) v závislosti na hodnotách stopy a determinantu jeho matice.

$$\lim_{t\to\infty}\left\|\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\right\| = \|\alpha\boldsymbol{v}_1\|\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \|\beta\boldsymbol{v}_2\|\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = 0+\infty=\infty.$$

To znamená, že stacionární bod $(0,0)$ je sedlo. Směrový vektor polotečny ke trajektorii, která směřuje ke stacionárnímu, resp. od stacionárního, bodu, je vlastním vektorem matice A příslušným k záporné, resp. kladné, vlastní hodnotě.

Výsledky provedené analýzy lineárního dvourozměrného systému (5.6) s konstantní maticí jsou shrnuty graficky na obrázku 5.1.

Věta 21. *Uvažujme autonomní systém*

$$\begin{aligned} x' &= ax+by+P(x,y) \\ y' &= cx+dy+Q(x,y)\,, \end{aligned} \tag{5.8}$$

kde P, Q jsou funkce dvou proměnných spojité v okolí počátku. Nechť $ad-bc\neq 0$ a nechť existuje $\varepsilon>0$ takové, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|P(x,y)|+|Q(x,y)|}{(|x|+|y|)^{1+\varepsilon}}=0\,.$$

Je-li bod $(0,0)$ uzlem nebo ohniskem pro systém (5.6), pak je stejného typu i pro systém (5.8). Je-li bod $(0,0)$ středem pro systém (5.6), pak je bodem rotace nebo ohniskem pro systém (5.8). Je-li bod $(0,0)$ sedlem pro systém (5.6) a funkce P, Q mají spojité parciální derivace podle obou proměnných v okolí počátku, pak je $(0,0)$ sedlem i pro systém (5.8).

Důkaz: P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney 1964, kap. VIII. □

Důsledek 6. *Nechť (x^*,y^*) je stacionárním bodem systému (5.5) (tj. $f(x^*,y^*)=g(x^*,y^*)=0$) a funkce f, g mají spojité druhé parciální derivace podle obou proměnných v okolí bodu (x^*,y^*). Označme*

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*),\ \ f_2=\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*),\ \ g_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*),\ \ g_2=\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)$$

a nechť $f_1g_2 - f_2g_1 \neq 0$.
Pak je bod (x^*, y^*) *uzlem, ohniskem nebo sedlem pro systém* (5.5), *je-li počátek stacionárním bodem stejného typu pro lineární homogenní systém*

$$\begin{aligned} x' &= f_1x + f_2y \\ y' &= g_1x + g_2y\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Je-li počátek středem pro systém (5.9), *je bod* (x^*, y^*) *buďto ohniskem nebo bodem rotace pro systém* (5.5).

Důkaz: Podle Taylorovy věty pro funkce dvou proměnných (sr. Z. DOŠLÁ, O. DOŠLÝ: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 5.2) existuje okolí $\mathcal{O}_{(x^*,y^*)}$ stacionárního bodu (x^*, y^*) takové, že ke každému $(x, y) \in \mathcal{O}_{(x^*,y^*)}$ existuje číslo $\vartheta \in (0, 1)$ tak, že platí

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(x^*,y^*) &+ \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial f(x^*,y^*)}{\partial y}(y-y^*) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f\big(x^*+\vartheta(x-x^*), y^*+\vartheta(y-y^*)\big)}{\partial x^2}(x-x^*)^2 + \right.\\ &+ 2\frac{\partial^2 f\big(x^*+\vartheta(x-x^*), y^*+\vartheta(y-y^*)\big)}{\partial x \partial y}(x-x^*)(y-y^*) + \\ &\left. + \frac{\partial^2 f\big(x^*+\vartheta(x-x^*), y^*+\vartheta(y-y^*)\big)}{\partial y^2}(y-y^*)^2\right) = \\ &= f_1(x-x^*) + f_2(y-y^*) + P(x-x^*, y-y^*), \end{aligned}$$

kde jsme symbolem $P(x - x^*, y - y^*)$ označili Taylorův zbytek v uvedeném tvaru.

Ze spojitosti druhých parciálních derivací funkce f a z druhé Weierstraßovy věty plyne, že existuje konstanta K taková, že pro všechna $(x, y) \in \mathcal{O}_{(x^*,y^*)}$ platí

$$\left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right| \leq K, \quad \left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right| \leq K, \quad \left|\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right| \leq K.$$

Odtud plyne, že

$$|P(x-x^*, y-y^*)| \leq \frac{1}{2}\big(K|x-x^*|^2 + 2K|x-x^*||y-y^*| + K|y-y^*|^2\big) = \frac{K}{2}\big(|x-x^*| + |y-y^*|\big)^2.$$

Analogicky ukážeme, že existuje konstanta L a funkce Q takové, že na okolí stacionárního bodu (x^*, y^*) platí

$$g(x,y) = g_1(x-x^*) + g_2(y-y^*) + Q(x-x^*, y-y^*),$$

přičemž

$$|Q(x-x^*, y-y^*)| \leq \frac{L}{2}K\big(|x-x^*| + |y-y^*|\big)^2.$$

Nyní budeme vyšetřovat průběh malých odchylek řešení systému (5.5) od stacionárního bodu (x^*, y^*), tj. zavedeme nové neznámé funkce

$$\xi = \xi(t) = x(t) - x^*, \quad \eta = \eta(t) = y(t) - y^*.$$

(jinak lze říci, že posuneme stacionární bod (x^*, y^*) do počátku.) Funkce ξ, η jsou řešením autonomního systém tvaru

$$\begin{aligned} \xi' &= f_1\xi + f_2\eta + P(\xi,\eta), \\ \eta' &= g_1\xi + g_2\eta + Q(\xi,\eta). \end{aligned}$$

Pro funkce P, Q platí nerovnost $|P(\xi,\eta)| + |Q(\xi,\eta)| \le M\big(|\xi| + |\eta|\big)^2$, kde $M = \max\{K, L\}$. Pro libovolné $\varepsilon \in (0,1)$ nyní dostaneme

$$0 \le \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{|P(\xi,\eta)| + |Q(\xi,\eta)|}{\big(|\xi| + |\eta|\big)^{1+\varepsilon}} \le \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{M\big(|\xi| + |\eta|\big)^2}{\big(|\xi| + |\eta|\big)^{1+\varepsilon}} = M \lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \big(|\xi| + |\eta|\big)^{1-\varepsilon} = 0$$

a tvrzení plyne z věty 21. □

S použitím terminologie zavedené v definici 14 můžeme část tohoto tvrzení přeformulovat: Je-li (x^*, y^*) hyperbolický stacionární bod systému (5.5), pak je stejného typu jako stacionární bod (0,0) linearizace tohoto systému ve stacionárním bodě (x^*, y^*).

Věta 22 (Dulacovo kritérium)**.** *Nechť funkce f, g jsou spojitě diferencovatelné na Ω a existují jednoduše souvislá otevřená množina $B \subseteq \Omega$ a spojitě diferencovatelná funkce $q : B \to \mathbb{R}$ tak, že výraz*

$$F(x,y) = \frac{\partial\big(q(x,y)f(x,y)\big)}{\partial x} + \frac{\partial\big(q(x,y)g(x,y)\big)}{\partial y}$$

je pro všechna $(x,y) \in B$ nezáporný nebo je pro všechna $(x,y) \in B$ nekladný, přičemž množina $\{(x,y) \in B : F(x,y) = 0\}$ má míru 0. Pak v množině B neexistuje cyklus systému (5.5)*.*

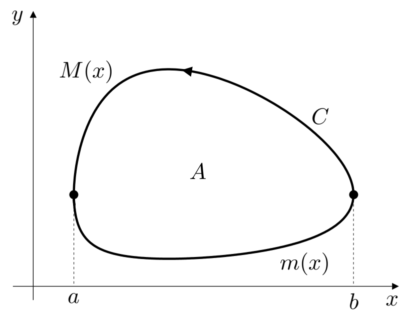
Důkaz: Připusťme, že existuje cyklus $C \subseteq B$ rovnice (5.5) a nechť jeho parametrické vyjádření je

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t);$$

přitom funkce φ, ψ vyjadřují ω-periodické řešení systému (5.5), tedy

$$\varphi'(t) = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big), \qquad \psi'(t) = g\big(\varphi(t), \psi(t)\big).$$

Předpokládejme, že křivka C je orientována kladně a má tvar oválu, tj. existují na ní právě dva body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou y a právě dva body, v nichž je tečna rovnoběžná s osou x. Označme A množinu ohraničenou křivkou C, $[a,b]$ průmět množiny A na osu x, t_0 hodnotu parametru pro niž $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + \omega) = b$, α nejmenší kladné číslo pro něž $\varphi(t_0 + \alpha) = a$.



Dále zavedeme funkce $m = m(x)$, resp. $M = M(x)$, takové, že jejich graf na intervalu $[a,b]$ splývá s dolním, resp. horním, obloukem křivky C. Pak

$$m(x) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = \psi(t) \text{ pro } t \in [t_0 + \alpha, t_0 + \omega],$$

$$M(x) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = \psi(t) \text{ pro } t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Z předpokladů věty a obecných vlastností integrálu plyne, že

$$\iint\limits_A F(x,y) \neq 0. \tag{5.10}$$

Podle Fubiniovy věty nyní platí

$$I = \iint\limits_A \frac{\partial}{\partial y} q(x,y) g(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{m(x)}^{M(x)} \frac{\partial}{\partial y} q(x,y) g(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left[q(x,y) g(x,y) \right]_{y=m(x)}^{M(x)} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_a^b q\big(x, M(x)\big) g\big(x, M(x)\big) \mathrm{d}x - \int\limits_a^b q\big(x, m(x)\big) g\big(x, m(x)\big) \mathrm{d}x.$$

V integrálech zavedeme substituci $x = \varphi(t)$, tedy $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\mathrm{d}t$,

$$I = \int\limits_{t_0+\alpha}^{t_0} q\big(\varphi(t),\psi(t)\big) g\big(\varphi(t),\psi(t)\big) f\big(\varphi(t),\psi(t)\big) \mathrm{d}t -$$

$$- \int\limits_{t_0+\alpha}^{t_0+\omega} q\big(\varphi(t),\psi(t)\big) g\big(\varphi(t),\psi(t)\big) f\big(\varphi(t),\psi(t)\big) \mathrm{d}t =$$

$$= - \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} q\big(\varphi(t),\psi(t)\big) g\big(\varphi(t),\psi(t)\big) f\big(\varphi(t),\psi(t)\big) \mathrm{d}t =$$

$$= - \oint\limits_C q\big(\varphi(t),\psi(t)\big) g\big(\varphi(t),\psi(t)\big) f\big(\varphi(t),\psi(t)\big) \mathrm{d}s,$$

kde $\oint\limits_C \Phi(x,y)\mathrm{d}s$ označuje křivkový integrál z funkce Φ přes uzavřenou křivku C. Analogicky ukážeme, že

$$J = \iint\limits_A \frac{\partial}{\partial x} q(x,y) f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_C q\big(\varphi(t),\psi(t)\big) f\big(\varphi(t),\psi(t)\big) g\big(\varphi(t),\psi(t)\big) \mathrm{d}s.$$

Odtud plyne, že

$$\iint\limits_A F(x,y) = \iint\limits_A \left(\frac{\partial\big(q(x,y)f(x,y)\big)}{\partial x} + \frac{\partial\big(q(x,y)g(x,y)\big)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = J + I = 0,$$

což je ve sporu s (5.10).

V případě, že by křivka byla orientovaná záporně, provedeme důkaz stejně s příslušnou změnou znamének.

Pokud by na křivce C existovalo $k > 2$ bodů, v nichž je tečna rovnoběžný s osou y, rozdělili bychom interval $[t_0, t_0+\omega]$ na k subintervalů $[t_0, t_0+\alpha_1]$, $[t_0+\alpha_1, t_0+\alpha_1+\alpha_2]$, ..., $[t_0+\omega-\alpha_k, t_0+\omega]$ takových, že na každém z nich oblouk křivky C splyne s grafem nějaké funkce proměnné x. $\square$

Důsledek 7 (Bendixsonovo kritérium). *Nechť funkce f, g jsou spojitě diferencovatelné na Ω a existuje jednoduše souvislá otevřená množina $B \subseteq \Omega$ tak, že výraz*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

je pro všechna $(x,y) \in B$ nezáporný nebo je pro všechna $(x,y) \in B$ nekladný, přičemž množina, na níž je tento výraz nulový má míru 0. Pak v množině B neexistuje cyklus systému (5.5).

Věta 23 (Poincaré (1854–1912)-Bendixson (1861-1935)). *Jestliže rovnice (5.1) má trajektorii $C^+ = \{\boldsymbol{x}(t) : t \geq 0\}$, která je ohraničená a její uzávěr neobsahuje stacionární body rovnice (5.1), pak existuje cyklus rovnice (5.1), který leží v $\overline{C^+}$.*

Důkaz: P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney 1964, kap. VII. □

Příklad: Jednoduchý model producent-konzument

V tomto modelu si pod pojmem „producent“ můžeme představit populaci, která využívá nějaký neomezený zdroj[1], např. zelené rostliny, které využívají sluneční světlo a atmosférický uhlík. Taková populace by rostla s nějakým kladným růstovým koeficientem, sr. str. 2–4.

„Konzumentem“ budeme rozumět populaci, pro niž producent představuje zdroj; může jít například o herbivora živícího se příslušnou rostlinou[2]. Pro populaci konzumenta je kapacita prostředí (sr. str. 4) určená velikostí populace producenta. V nejjednodušším přiblížení můžeme tyto veličiny považovat za úměrné.

Populace konzumenta spotřebovává, a tím ničí, jedince z populace producenta; jinak řečeno, zvětšuje úmrtnost producentů. Budeme opět jednoduše předpokládat, že toto zvětšení úmrtnosti producentů je úměrné velikosti populace konzumentů.

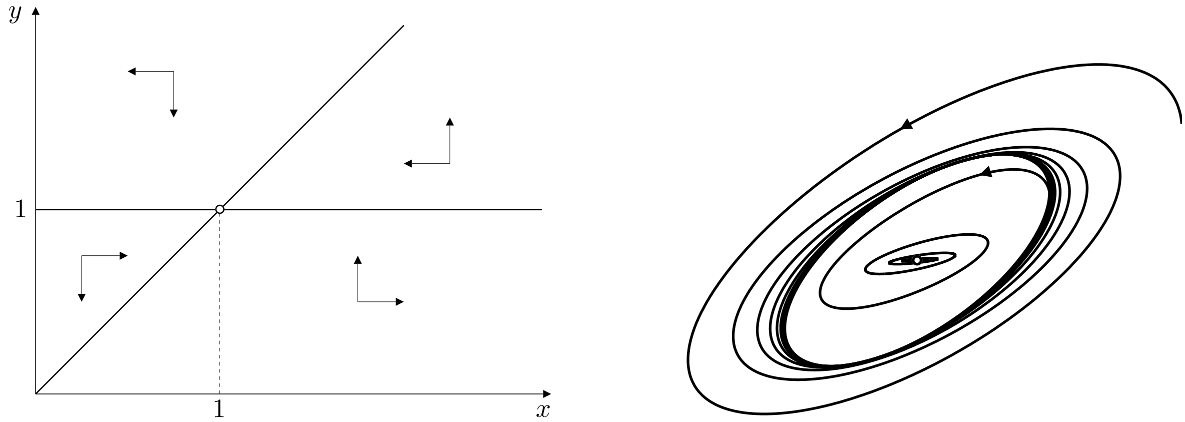
Označme $N_1 = N_1(t)$, resp. $N_2 = N_2(t)$, velikost populace producenta, resp. konzumenta, v čase t. Vývoj těchto velikostí můžeme na základě uvedených zjednodušujících předpokladů (užitím analogických úvah jako na str. 2–4) modelovat systémem dvou autonomních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= (r_1 - aN_2)N_1,\\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= r_2N_2\left(1 - \frac{N_2}{bN_1}\right).\end{aligned} \tag{5.11}$$

Parametry r_1, r_2, a, b jsou kladné; r_1 je čistý růstový koeficient populace producenta (relativní přírůstek velikosti za jednotku času v případě, že populace producenta není konzumovaná), a je koeficient úměrnosti mezi úmrtností producentů způsobenou konzumenty a velikostí populace konzumentů (podíl producentů zkonzumovaných populací konzumentů o jednotkové velikosti za jednotku času v populaci jednotkové velikosti), r_2 je maximální možný růstový koeficient populace konzumenta (relativní přírůstek velikosti populace za jednotku času v případě, že má neomezený přísun poptravy), b je koeficient úměrnosti mezi úživností prostředí pro konzumenta a velikostí populace producenta.

[1] Ve skutečnosti žádný zdroj není neomezený. Populace navíc potřebuje prostor, který je konečný. Přesnější by tedy bylo říkat, že pro potřeby modelu zanedbáváme nebo neuvažujeme všechna přirozená omezení.

[2] Stručně můžeme mluvit o modelu „tráva-kráva“.



Obrázek 5.2: Vlevo: fázový portrét systému (5.12). Vpravo: hypotetická možnost existence cyklu v případě, že stacionární bod je ohnisko a stok.

Velikosti populací jsou čísla nezáporná. Velikost populace producenta v uvažovaném modelu musí navíc být nenulová, neboť je ve jmenovateli zlomku na pravé straně druhé z rovnic (5.11). To znamená, že stavový prostor systému (5.11) je množina $\Omega = (0,\infty) \times [0,\infty)$.

Velikosti populací i čas vyjádříme v nějakých „přirozených jednotkách". Měřítko závisle i nezávisle proměnných (stavových proměnných i času) změníme tak, že položíme

$$x = \frac{ab}{r_1}N_1, \quad y = \frac{a}{r_1}N_2, \quad \tau = r_1 t, \qquad \varrho = \frac{r_2}{r_1}.$$

Pak je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{ab}{r_1}N_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{ab}{r_1}\left(r_1 - aN_2\right)N_1\frac{1}{r_1} = \frac{ab}{r_1^2}\left(r_1 - a\frac{r_1}{a}y\right)\frac{r_1}{ab}x = (1-y)x,$$

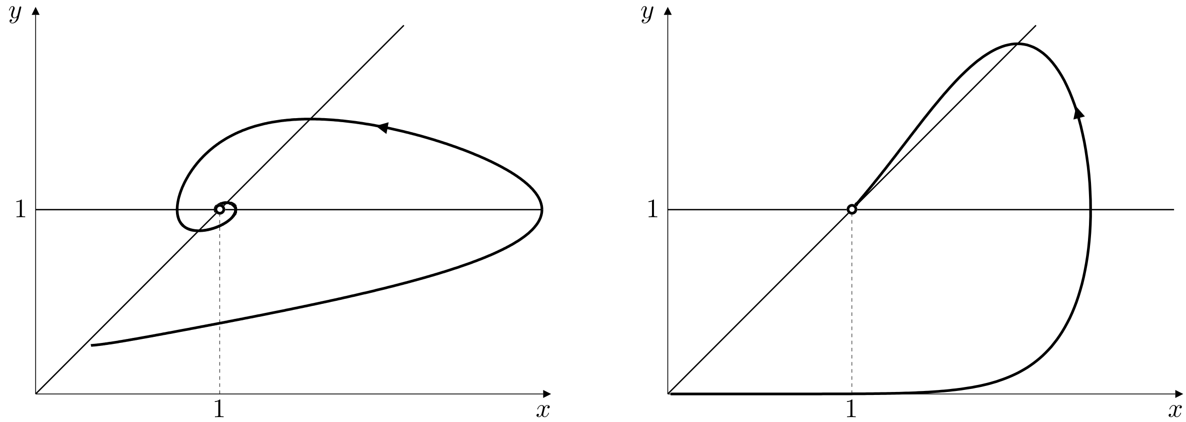
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\dfrac{a}{r_1}N_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{a}{r_1}r_2N_2\left(1 - \frac{N_2}{bN_1}\right)\frac{1}{r_1} = \frac{ar_2}{r_1^2}\frac{r_1}{a}y\left(1 - \frac{r_1}{a}y\frac{a}{r_1x}\right) = \varrho y\left(1 - \frac{y}{x}\right),$$

Použitá substituce tedy transformuje systém (5.11) na jednodušší systém

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= (1-y)x, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= \varrho y\left(1 - \frac{y}{x}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

s jediným kladným bezrozměrným parametrem ϱ. Stavovým prostorem je opět množina $\Omega = (0,\infty) \times [0,\infty)$.

Poněvadž $x \neq 0$, má systém (5.12) jedinou x-nulklinu, polopřímku $y = 1$, a jedinou y-nulklinu, polopřímku $y = x$. V důsledku toho má jediný stacionární bod $(x^*, y^*) = (1,1)$. Pod polopřímkou $y = 1$ směřují trajektorie doprava, nad ní směřují doleva. Nad polopřímkou $y = x$ směřují trajektorie dolů, pod ní nahoru. Fázový portrét systému (5.12) je zobrazen na obr. 5.2 vlevo. Z něho je vidět, že trajektorie mohou obíhat v kladném smyslu stacionární bod. Není ovšem jasné, zda se k němu přibližují, vzdalují se od něho nebo tvoří uzavřené křivky. Z fázového portrétu tedy není možné uhodnout průběh řešení systému (5.12).



Obrázek 5.3: Trajektorie systému (5.12) se dvěma různými hodnotami parametru ϱ. Vlevo: $\varrho = 0{,}5$ a stacionární bod je ohnisko, vpravo: $\varrho = 8$ a stacionírní bod je uzel.

Vyšetříme linearizaci systému (5.12). Máme

$$\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ \varrho\left(\frac{y}{x}\right)^2 & \varrho - 2\varrho\frac{y}{x} \end{pmatrix},$$

tedy

$$\mathsf{J}^* = \mathsf{D}\boldsymbol{f}\big((1,1)\big) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \varrho & -\varrho \end{pmatrix}$$

a dále

$$\operatorname{tr}\mathsf{J}^* = -\varrho < 0, \quad \det\mathsf{J}^* = \varrho > 0, \quad (\operatorname{tr}\mathsf{J}^*)^2 - 4\det\mathsf{J}^* = \varrho(\varrho-4).$$

Odtud vidíme, že stacionární bod $(1,1)$ je stok. V případě $\varrho > 4$ je to uzel, v případě $\varrho < 4$ je to ohnisko.

Tento výsledek ovšem ještě nevylučuje, že by ve stavovém prostoru nemohl být cyklus. Ten by mohl být uzavřenou křivkou, na niž se z jejího vnějšku trajektorie navíjejí a do vnitřku se z ní trajektorie odvíjejí; taková možnost je naznačena na obr 5.2 vpravo. Existenci cyklu systému (5.12) vyloučíme Dulacovým kriteriem (věta 22). Položíme

$$q(x,y) = \frac{1}{xy}.$$

Pak je

$$F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} - 1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\varrho\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right) = -\frac{\varrho}{x^2} < 0$$

pro všechna $x > 0$ a proto neexistuje cyklus systému (5.12) v kladném kvadrantu $(0,\infty) \times (0,\infty)$.

Trajektorie systému (5.12) pro dvě různé hodnoty parametru ϱ jsou zobrazeny na obr. 5.3; vlevo je stacionární bod $(1,1)$ ohniskem, vpravo uzlem. ∎

5.3 Stabilita

Definice 20 (Persidskij (1903–1970))**.** Nechť $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t)$ je řešení systému (5.1) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\boldsymbol{x_0}$ se nazývá *stejnoměrně stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_0 \geq 0$ všechna řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ systému (5.1) splňující podmínku $\|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_0(t_0)\| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_0$ a splňují pro ně nerovnost $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0(t)\| < \varepsilon$.

Není-li řešení $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t)$ systému (5.1) stejnoměrně stabilní, nazývá se *nestabilní.*

Definice 21 (Ljapunov (1857–1918))**.** Nechť $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t)$ je řešení systému (5.1) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\boldsymbol{x_0}$ se nazývá *stejnoměrně asymptoticky stabilní*, je-li stejnoměrně stabilní a existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq 0$ a všechna řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ systému (5.1) splňující podmínku $\|\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x_0}(t_1)\| < \delta$ platí $\lim\limits_{t\to\infty} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_0}(t)\| = 0$.

Ze struktury prostoru řešení lineárního homogenního systému s konstantními koeficienty (sr. 4.3) plynou následující tři věty.

Věta 24. *Buď* A *konstantní matice. Jestliže všechny kořeny její charakteristické rovnice* $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}) = 0$ *(vlastní čísla matice* A*) mají nekladnou reálnou část a ty s nulovou reálnou částí jsou jednoduché, pak řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *lineárního autonomního systému*

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x} \tag{5.13}$$

je stejnoměrně stabilní.

Věta 25. *Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice* A *má kladnou reálnou část, pak řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *lineárního autonomního systému* (5.13) *je nestabilní.*

Věta 26. *Řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *lineárního autonomního systému* (5.13) *je stejnoměrně asymptoticky stabilní právě tehdy, když každé vlastní číslo matice* A *má zápornou reálnou část.*

Uvažujme nyní *perturbovaný lineární systém s konstantními koeficienty*

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,. \tag{5.14}$$

Věta 27. *Buď* $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ *fundamentální matice řešení systému* (5.13)*. Jestliže existují konstanty* $K > 0$ *a* $\gamma < \dfrac{1}{K}$ *takové, že*

$$\int_0^t \left\|\mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1}\right\| \mathrm{d}s \;\leq\; K \qquad \text{pro } t \geq 0 \tag{5.15}$$

a $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\| \leq \gamma\|\boldsymbol{x}\|$ *pro* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, *pak řešení* $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_0}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ *systému* (5.14) *je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 130–131. □

Poznámka 12. Podmínka (5.15) zaručí stejnoměrnou asymptotickou stabilitu nulového řešení systému (5.13). Věta říká, že je-li perturbace $\boldsymbol{g}$ v jistém smyslu dostatečně malá, zůstává zachována stejnoměrná asymptotická stabilita nulového řešení rovnice (5.14).

Z hlediska aplikací je důležité vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení (stacionárních bodů) rovnice (5.1).

Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ dvakrát spojitě diferencovatelná a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{o}$, pak podle Taylorovy věty pro funkce více proměnných platí

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*)\,,$$

kde $\mathsf{A} = (a_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*)\right)$ a $\boldsymbol{r_1}$ je příslušný Taylorův zbytek. Vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení rovnice (5.1) lze transformací $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ převést na vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability nulového řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' \;=\; \mathsf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),$$

kde $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r_1}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^*)$ a tu vyšetřit podle věty 27.

Věta 28. *Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému* (5.1) *a nechť zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojitě diferencovatelné.*

Mají-li všechna vlastní čísla variační matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ záporné reálné části, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) *je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Pokud existuje vlastní číslo variační matice $\mathsf{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ s kladnou reálnou částí, pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) *nestabilní.*

Důkaz: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 137–138. □

První tvrzení věty 28 říká, že stok je asymptoticky stabilní, sr. def. 14.

5.3.1 Kvalitativní vlastnosti řešení dvourozměrného autonomního systému (5.5)

Nechť (x^*, y^*) je stacionární bod systému (5.5), funkce f, g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné a $\mathsf{J}(x^*, y^*)$ je variační matice tohoto systému v bodě (x^*, y^*). Spojením definice 19, důsledku 6 a věty 28 dostaneme dostatečné podmínky pro to, aby stacionární bod (x^*, y^*) byl sedlem, stabilním nebo nestabilním uzlem a ohniskem; tyto podmínky jsou shrnuty v tabulce 5.1.

<table>
<tr><td colspan="3">$\det \mathsf{J}(x^*, y^*) < 0$</td><td>sedlo</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\det \mathsf{J}(x^*, y^*) > 0$</td><td rowspan="2">$\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*) > 0$</td><td>$\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\right)^2 \geq 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$</td><td>nestabilní uzel</td></tr>
<tr><td>$\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\right)^2 < 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$</td><td>nestabilní ohnisko</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*) < 0$</td><td>$\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\right)^2 \geq 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$</td><td>stabilní uzel</td></tr>
<tr><td>$\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\right)^2 < 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$</td><td>stabilní ohnisko</td></tr>
</table>

Tabulka 5.1: Klasifikace stacionárních bodů systému (5.5). Uvedené podmínky jsou dostatečné pro to, aby stacionární bod (x^*, y^*) byl typu uvedeného v posledním sloupci tabulky; $\mathsf{J}(x^*, y^*)$ označuje variační matici systému (5.5) ve stacionárním bodě (x^*, y^*).

5.3.2 Přímá Ljapunovova metoda

V této části budeme symbolem $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x_0}) = \big(\varphi_1(t;\boldsymbol{x_0}),\dots,\varphi_n(t;\boldsymbol{x_0})\big)$ označovat řešení počáteční úlohy (5.1), (5.2).

Definice 22. Buď $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ a G okolí bodu $\hat{\boldsymbol{x}}$ ve fázovém prostoru Ω. Spojitá funkce $V : G \to \mathbb{R}$ se nazývá *ljapunovská funkce systému* (5.1) *v bodě* $\hat{\boldsymbol{x}}$*,* jestliže

(i) $V(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$ a $V(\boldsymbol{x}) > 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in G \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}$.

(ii) Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ je složená funkce $V \circ \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\eta})$ (tj. $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big)$ chápeme jako funkci jedné reálné proměnné t) nerostoucí pro všechna $t \geq 0$.

Věta 29. *Existuje-li ljapunovská funkce systému* (5.1) *v bodě* $\boldsymbol{x}^*$*, pak* $\boldsymbol{x}^*$ *je stacionárním bodem systému* (5.1) *a konstantní řešení* $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ *tohoto systému je stejnoměrně stabilní.*

Pokud navíc podmínku (ii) z definice 22 lze nahradit silnější podmínkou

(ii) Pro každé* $\boldsymbol{\eta} \in G$ *je složená funkce* $V \circ \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\eta})$ *klesající pro všechna* $t \geq 0$*,*

pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ *systému* (5.1) *stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: Pokud by existovalo $\tau > 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{x}^*$, pak by $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}^*)\big) > 0 = V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{x}^*)\big)$ a funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{x}^*)\big)$ by nebyla nerostoucí. Bod $\boldsymbol{x}^*$ je tedy stacionárním bodem systému (5.1).

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$. V opačném případě bychom totiž mohli systém (5.1) substitucí $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ transformovat na systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^*)$, pro který je $\boldsymbol{o}$ stacionárním bodem.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo takové, že $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\| \leq \varepsilon\} \subseteq G$ a označme

$$\gamma = \min\{V(\boldsymbol{x}) : \|\boldsymbol{x}\| = \varepsilon\}.$$

Pak $\gamma > 0$ a $V(\boldsymbol{x}) \geq \gamma$ pro každé $\boldsymbol{x}$ takové, že $\|\boldsymbol{x}\| = \varepsilon$. Ze spojitosti funkce V plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že $|V(\boldsymbol{x}) - 0| = V(\boldsymbol{x}) < \gamma$ pro všechna $\boldsymbol{x}$ taková, že $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$. Zřejmě je $\delta < \varepsilon$.

Buď dále $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ takové, že $\|\boldsymbol{\xi}\| < \delta$. Pak $V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{\xi})\big) < \gamma$ a poněvadž funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je nerostoucí, platí

$$V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\big) < \gamma \quad \text{pro všechna } t > 0 \text{ z definičního oboru funkce } \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi}). \tag{5.16}$$

Kdyby nyní existovalo $t_1 > 0$ takové, že $\|\boldsymbol{\varphi}(t_1,\boldsymbol{\xi})\| \geq \varepsilon$, pak by ze spojitosti funkce $\|\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\|$ a z Bolzanovy věty plynula existence $t_0 \in (0,t_1)$ takového, že $\|\boldsymbol{\varphi}(t_0;\boldsymbol{\xi})\| = \varepsilon$ a platilo by $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_0;\boldsymbol{\xi})\big) \geq \gamma$, což by byl spor s (5.16).

Pro všechna $t > 0$ z definičního oboru funkce $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})$ tedy platí $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\| < \varepsilon$. Odtud navíc podle důsledku 3 věty 5 plyne, že $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})$ je definována pro všechna $t > 0$. Tvrzení o stejnoměrné stabilitě je tedy dokázáno.

V případě, že $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}^*$, platí: $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$ pro každé $t \geq 0$, takže $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$.

Nechť $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ a funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je klesající. Poněvadž funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je monotonní, existuje

$$\lim_{t\to\infty} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\big) = \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.17}$$

a z nezápornosti funkce V plyne $\alpha \geq 0$. Připusťme $\alpha > 0$. Z toho, že

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}^*) = 0,$$

plyne existence $t_2 > 0$ a $\beta > 0$ takových, že $\|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\| \geq \beta$ pro všechna $t \geq t_2$. Pro všechna $t \geq t_2$ je tedy

$$\beta \leq \|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\| \leq \varepsilon.$$

Položme $v(\boldsymbol{z}) = V\big(\boldsymbol{\varphi}(1;\boldsymbol{z})\big) - V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{z})\big)$. Funkce v je podle věty 7 spojitá na kompaktní množině $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \beta \leq \|\boldsymbol{z}\| \leq \varepsilon\}$ a je zde záporná. Podle Weierstrassových vět existuje

$$\Delta = \max\{v(\boldsymbol{z}) : \beta \leq \|\boldsymbol{z}\| \leq \varepsilon\};$$

je $\Delta < 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) &= V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) - V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) = \\ &= v\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) = \ldots \\ &\cdots = \sum_{i=1}^{k} v\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+i-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{\xi})\big) \leq k\Delta + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{\xi})\big). \end{aligned}$$

Poněvadž $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta = -\infty$, je také $\lim\limits_{k\to\infty} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) = -\infty$, což je spor s (5.17). Tento spor dokazuje, že $\alpha = 0$. Ze spojitosti funkce V, z faktu $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) \neq \boldsymbol{x}^*$ pro $t > 0$ a $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{x}^*$, z podmínky (i) v definici 22 a ze vztahu (5.17) nyní plyne $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$. Tím je dokázáno i tvrzení o stejnoměrné asymptotické stabilitě. □

Důsledek 8. *Buď $V : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, která splňuje podmínku (i) z definice 22 a nechť pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ platí*

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0. \tag{5.18}$$

Funkce V je ljapunovskou funkcí systému (5.1) v bodě $\boldsymbol{x}^*$ a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně stabilní.

Jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in G \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ platí $\dot{V}(\boldsymbol{x}^*) < 0$, pak funkce V splňuje podmínku (ii) z věty 29 a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ a každé $t \geq 0$ je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\eta}) \in G$ a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) \frac{\mathrm{d}\varphi_i(t;\boldsymbol{\eta})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) f_i\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) = \dot{V}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Odtud a ze známých vět o vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné pomocí derivace plynou obě tvrzení. □

Je-li U diferencovatelná funkce definovaná na $G \subseteq \Omega$, pak výraz $\dot{U}(\boldsymbol{x})$ definovaný vztahem

$$\dot{U}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x})$$

se nazývá *derivace funkce U vzhledem k systému* (5.1).

Příklad
Uvažujme Verhulstovu logistickou rovnici

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right). \tag{5.19}$$

Kladné stacionární řešení této rovnice je $x \equiv K$. Položme $G = (0, \infty)$ a

$$V(x) = \frac{K}{2r}(x-K)^2.$$

Pak $V(K) = 0$, $V(x) > 0$ pro $x \neq K$ a dále

$$\dot{V}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{K}{2r}(x-K)^2\right) rx\left(1-\frac{x}{K}\right) = \frac{K}{2r}2(x-K)rx\frac{K-x}{K} = -x(x-K)^2 < 0$$

pro každé $x > 0$, $x \neq K$. Funkce V je tedy ljapunovskou funkcí rovnice (5.19) a její stacionární řešení $x \equiv K$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Položme nyní

$$W(x) = \int_K^x \frac{\xi - K}{\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Pak $W(K) = 0$. Pro $x > K$ je horní mez integrálu větší než dolní a integrujeme kladnou funkci; pro $x \in (0, K)$ naopak je horní mez integrálu menší než dolní a integrujeme zápornou funkci. Integrál je tedy pro jakékoliv $x \neq K$ kladný, takže $W(x) > 0$ pro $x \in G \setminus \{K\}$. Dále pro tato x platí

$$\dot{W}(x) = \frac{x-K}{x}rx\left(1-\frac{x}{K}\right) = -\frac{r}{K}(x-K)^2 \leq 0$$

pro každé $x > 0$, přičemž rovnost nastane pouze pro $x = K$. Funkce W je tedy také ljapunovskou funkcí Verhulstovy logistické rovnice (5.19).

Příklad především ukazuje, že ljapunovských funkcí rovnice (a tím spíše systému) může být více. Pokud však Verhulstovu rovnici chápeme jako model růstu populace (sr. str. 4), pak má druhá z uvedených ljapunovských funkcí i jistou interpretaci.

Integrovaný výraz vyjadřuje relativní odchylku velikosti populace od kapacity prostředí (tj. od rovnovážné velikosti) vzhledem k velikosti populace. To lze chápat jako jakousi „sílu“ nebo „napětí“, které na populaci dané velikosti působí. Tuto „sílu“ jsme integrovali podle velikosti populace na intervalu od rovnováhy do jisté hodnoty velikosti populace, což vyjadřuje „něco jako práci“, kterou je potřeba vykonat na vychýlení velikosti populace z rovnovážné hodnoty. Jinak řečeno, výraz $W(x)$ vyjadřuje jakousi „potenciální energii populace“ o velikosti x.

Tuto „fyzikální metaforu“ lze ještě vylepšit. Populace se musí nacházet na nějakém území. Jeho rozlohu označíme S; vyjadřujeme ji v jednotkách, které jsou druhou mocninou jednotky délky (m^2). Za velikost populace budeme považovat její celkovou biomasu na uvažovaném území; vyjadřujeme ji v jednotkách hmotnosti (kg). Pro populaci velikosti x zavedeme její „potenciální energii“ výrazem

$$E(x) = r^2 SW(x).$$

Růstový koeficient r je vyjádřen v jednotkách, které jsou převrácenou hodnotou jednotky času (s^{-1}) a veličina W je vyjádřena ve stejných jednotkách, jako velikost populace (kg). Veličina E zavedená předchozí rovností je tedy vyjádřena v jednotkách $\mathrm{kg\,m^2 s^{-2}}$, tj. v joulech. Ještě poznamenejme, že integrací můžeme funkci E vyjádřit ve tvaru

$$E(x) = r^2 S \left[x - K \left(1 + \ln \frac{x}{K} \right) \right].$$

Funkce E nabývá svého minima v hodnotě K, tj. v hodnotě, ke které se přibližuje velikost populace. Výsledek lze nyní zformulovat: populace se vyvíjí tak, aby minimalizovala svou potenciální energii. ■

Důsledek 9. *Buď $V : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, která splňuje podmínku (i) z definice 22 a nechť pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ platí nerovnost (5.18). Jestliže existuje diferencovatelná funkce $F : G \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$A = \left\{ \boldsymbol{x} : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0 \right\} = \{ \boldsymbol{x} : F(\boldsymbol{x}) = 0 \}$$

a pro každé $\boldsymbol{x} \in A \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ platí

$$\dot{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) \neq 0, \tag{5.20}$$

pak funkce V splňuje podmínku (ii) z věty 29 a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Důkaz: Množina A je $(n-1)$-rozměrná diferencovatelná varieta (nadplocha) a vektor

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \right)^T$$

je normálovým vektorem k této varietě v bodě $\boldsymbol{x} \in A$.

Nechť nyní bod $\boldsymbol{x} \in A \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ je libovolný. Vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ je tečným vektorem k trajektorii systému (5.1) v bodě $\boldsymbol{x}$. Z nerovnosti (5.20) nyní plyne, že vektory $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ nejsou kolmé, tedy že vektor $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ není tečným vektorem k varietě A v bodě $\boldsymbol{x}$. Jinak řečeno, trajektorie varietu A v bodě $\boldsymbol{x}$ protíná pod nějakým nenulovým úhlem, přechází z jedné její strany na druhou. Jestliže tedy existuje nějaké $t_1 \geq 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(t_1; \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{x}$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(t_1 + \tau; \boldsymbol{\eta}) \notin A$ a $\boldsymbol{\varphi}(t_1 - \tau; \boldsymbol{\eta}) \notin A$, tj. $\dot{V}\big(\boldsymbol{\varphi}(t_1 + \tau; \boldsymbol{\eta})\big) < 0$ a $\dot{V}\big(\boldsymbol{\varphi}(t_1 - \tau; \boldsymbol{\eta})\big) < 0$, pro všechna $\tau \in (0, \varepsilon)$. Funkce $\dot{V} \circ \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,; \boldsymbol{\eta})$ je tedy v bodě t_1 klesající. Poněvadž bod $\boldsymbol{x} \in A \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ byl libovolný, je tato funkce klesající v každém $t \geq 0$. □

Příkladem na použití tohoto tvrzení je vyšetřování stability kladného stacionárního řešení v modelu trofického řetězce, viz 10.5.

5.4 Konzervativní systémy

Nejprve připomeneme dva pojmy, jeden z analýzy a druhý z lineární algebry: Operátor ∇ (nabla, gradient) přiřazuje spojitě diferencovatelné skalární funkci F proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektorovou funkci

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)^T .$$

stejných proměnných.

Matice A se nazývá *antisymetrická* (*polosymetrická*, anglicky *skew-symmetric*), pokud platí rovnost $\mathsf{A} = -\mathsf{A}^T$.

Definice 23. Funkce $U : \Omega \to \mathbb{R}$ se nazývá *první integrál* (*invariant*) systému (5.1), je-li spojitě diferencovatelná a v každém bodě $\boldsymbol{x} \in \Omega$ pro její derivaci vzhledem k systému (5.1) platí

$$\dot{U}(\boldsymbol{x}) = \nabla U(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) f_i(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Řekneme, že systém (5.1) je *konzervativní*, jestliže existuje jeho první integrál.

Věta 30. *Nechť $U : \Omega \to \mathbb{R}$ je první integrál systému* (5.1) *a nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešení systému* (5.1)*. Pak je funkce $U\big(\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)\big)$ konstantní.*

Důkaz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{x}(t)\big) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) = 0.$$ □

První integrál tedy vyjadřuje veličinu, která je na trajektoriích systému (5.1) konstantní, tj. veličinu, která se v průběhu vývoje systému zachovává; název „invariant“ je tedy adekvátní. Systém je konzervativní, pokud zachovává (konzervuje) veličinu U. V aplikacích může jít např. o celkovou energii nebo hmotu a podobně.

Větu lze přeformulovat i takto: trajektorie systému (5.1) jsou vrstevnicemi prvního integrálu. Znalost prvního integrálu tedy poskytuje informaci o řešení systému (5.1).

Znalost několika prvních integrálů umožňuje také zmenšit dimenzi systému (5.1). Uvažujme systém (5.1) s počáteční podmínkou (5.3). Nechť k je přirozené číslo splňující nerovnosti $1 \le k < n$, $U_1, U_2, \ldots, U_k$ jsou první integrály systému (5.1) a nechť vektory $\nabla U_1(\boldsymbol{x_0}), \nabla U_2(\boldsymbol{x_0}), \ldots, \nabla U_k(\boldsymbol{x_0})$ jsou lineárně nezávislé. Definujme zobrazení $\boldsymbol{\Phi} =: \Omega \to \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)^T$ předpisem

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} U_1(\boldsymbol{x}) - U_1(\boldsymbol{x_0}) \\ U_2(\boldsymbol{x}) - U_2(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots \\ U_k(\boldsymbol{x}) - U_k(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix}.$$

Toto zobrazení je spojitě diferencovatelné. Označme

$$\boldsymbol{x_0} = \big((\boldsymbol{x_0})_1, (\boldsymbol{x_0})_2, \ldots, (\boldsymbol{x_0})_n\big)^T = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})^T$$

$$\boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T, \quad \boldsymbol{z} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)^T,$$

$$\boldsymbol{y_0} = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,k})^T, \quad \boldsymbol{z_0} = (x_{0,k+1}, x_{0,k+2}, \ldots, x_{0,n})^T.$$

Pak je $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{o}$ a z lineární nezávislosti vektorů $\nabla U_1(\boldsymbol{x_0}), \nabla U_2(\boldsymbol{x_0}), \ldots, \nabla U_k(\boldsymbol{x_0})$ plyne

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_1(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Phi_1(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_1(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_2(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Phi_2(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_2(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi_k(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) & \frac{\partial}{\partial y_2}\Phi_k(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k}\Phi_k(\boldsymbol{y_0},\boldsymbol{z_0}) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}U_1(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial}{\partial x_2}U_1(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k}U_1(\boldsymbol{x_0}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}U_2(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial}{\partial x_2}U_2(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k}U_2(\boldsymbol{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}U_k(\boldsymbol{x_0}) & \frac{\partial}{\partial x_2}U_k(\boldsymbol{x_0}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k}U_k(\boldsymbol{x_0}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Jsou splněny předpoklady věty o implicitním zobrazení (viz např. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, Věta 8.5). To znamená, že existuje jediné spojité zobrazení $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_k)^T : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$ takové, že $\boldsymbol{\Phi}\big(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{z_0}), \boldsymbol{z_0}\big) = \boldsymbol{o}$. Substitucí

$$z_1 = x_{k+1}, \; z_2 = x_{k+2}, \; \ldots, \; z_{n-k} = x_n$$

přejde systém (5.1) na systém

$$\begin{aligned} z_1' &= f_{k+1}(\Psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \Psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \ldots, \Psi_k(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \\ z_2' &= f_{k+2}(\Psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \Psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \ldots, \Psi_k(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \\ &\vdots \\ z_{n-k}' &= f_n(\Psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \Psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), \ldots, \Psi_k(z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}), z_1, z_2, \ldots, z_{n-k}). \end{aligned}$$

Stručně řečeno, složky $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vypočítáme ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= U_1(x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}), \\ U_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= U_2(x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}), \\ &\vdots \\ U_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= U_k(x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}), \end{aligned}$$

tak, že je vyjádříme v závislosti na složkách $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, a pak je dosadíme do posledních $n-k$ rovnic systému (5.1). Obecněji: vyjádříme k neznámých funkcí pomocí zbývajících $n-k$ a dosadíme je do příslušných $n-k$ z původních diferenciálních krovnic.

Příklad

Uvažujme dvourozměrný systém

$$\begin{aligned} x' &= x(y-1), \\ y' &= -xy \end{aligned} \tag{5.21}$$

se stavovým prostorem $\Omega = (0,\infty)\times(0,\infty)$. První integrál tohoto systému lze hledat tak, že druhou rovnici vydělíme rovnicí první. Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{xy}{x(y-1)} = \frac{y}{1-y},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, sr. 2.2.2. Její řešení je implicitně dáno rovnicí

$$x + y - \ln y = const.$$

Funkce $U : \Omega \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$U(x,y) = x + y - \ln y \tag{5.22}$$

je prvním integrálem systému (5.21), neboť

$$\dot{U}(x,y) = 1\cdot x(y-1) + \left(1-\frac{1}{y}\right)\cdot(-xy) = xy - x - xy + x = 0.$$

Pokud funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ jsou řešením systému (5.21) s počáteční podmínkou

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{5.23}$$

pak pro všechna $t \geq 0$ platí

$$x(t) + y(t) - \ln y(t) = U\big(x(t), y(t)\big) = U(x_0, y_0) = x_0 + y_0 - \ln y_0,$$

tedy

$$x(t) = y(t) + \ln y(t) + x_0 + y_0 - \ln y_0. \tag{5.24}$$

Dosazením tohoto vyjádření funkce x do druhé rovnice systému (5.21) dostaneme

$$y' = -y\left(y + \ln\frac{y}{y_0} + x_0 + y_0\right). \tag{5.25}$$

Druhá složka řešení počátečního problému (5.21), (5.23) je tedy řešením (skalární autonomní) rovnice (5.25) s počáteční podmínkou $y(0) = y_0$; jeho první složka je pak dána rovností (5.24).
■

Definice 24. Nechť existuje antisymetrická matice S a spojitě diferencovatelná funkce $H : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $\boldsymbol{x}$ je $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{S}\nabla H(\boldsymbol{x})$. Pak se systém (5.1) nazývá *hamiltonovský*, funkce H se nazývá *hamiltonián* systému (5.1).

Hamiltonovský systém je tedy tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{S}\nabla H(\boldsymbol{x}).$$

Věta 31. *Hamiltonovský systém je konzervativní, hamiltonián je jeho invariantem.*

Důkaz: Nejprve si všimněme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a antisymetrickou matici S řádu n platí

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v}\right)^T = \boldsymbol{v}^T\mathsf{S}^T\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v}$$

a tedy $\boldsymbol{v}^T\mathsf{S}\boldsymbol{v} = 0$. Odtud plyne, že

$$\nabla H(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla H(\boldsymbol{x})^T\mathsf{S}\nabla H(\boldsymbol{x}) = 0.$$ □

Příklad

Systém (5.21) vyjádříme v logaritmických souřadnicích, tj. zavedeme substituci

$$\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y. \tag{5.26}$$

Pak je

$$\xi' = \frac{x'}{x} = y - 1 = \mathrm{e}^\eta - 1, \qquad \eta' = \frac{y'}{y} = -x = -\mathrm{e}^\xi.$$

Transformace (5.26) převádí systém (5.21) na systém tvaru

$$\begin{aligned} \xi' &= \mathrm{e}^\eta - 1, \\ \eta' &= -\eta^\xi, \end{aligned} \tag{5.27}$$

který můžeme vektorově zapsat jako

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\xi \\ \mathrm{e}^\eta - 1 \end{pmatrix}.$$

Matice na pravé straně této rovnice je antisymetrická. K tomu, aby funkce $H = H(\xi, \eta)$ byla hamiltoniánem systému (5.27) stačí, aby splňovala vztahy

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \mathrm{e}^\xi, \qquad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \mathrm{e}^\eta - 1,$$

tj. aby byla kmenovou funkcí diferenciálu $\mathrm{e}^\xi \mathrm{d}\xi + (\mathrm{e}^\eta - 1)\,\mathrm{d}\eta$. Zřejmě stačí volit

$$H(\xi, \eta) = \mathrm{e}^\xi + \mathrm{e}^\eta - \eta.$$

Ještě si můžeme povšimnout, že hamiltonián H systému (5.27) je invariantem (5.22) systému (5.21) transformovaným substitucí (5.26). ■

Definice 25. Existuje-li přirozené číslo k, $1 \leq k < n$ a existují-li zobrazení

$$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \dots, g_k) : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k, \qquad \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{n-k}) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$$

tak, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega$ je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= \big(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = \\ &= \big(g_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), g_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \dots, g_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \\ &\qquad h_1(x_1, x_2, \dots, x_k), h_2(x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, h_{n-k}(x_1, x_2, \dots, x_k)\big), \end{aligned}$$

pak se systém (5.1) nazývá *bipartitní.*

Při označení $\boldsymbol{y} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\boldsymbol{z} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ lze bipartitní systém zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}).$$

Neznámé funkce jsou rozlišeny na dvě sady; derivace funkcí z první sady závisí pouze na funkcích z druhé sady a naopak.

Příklad (Newtonovy zákony pohybu)

Uvažujme hmotný bod X o hmotnosti m, který má v čase t souřadnice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ a na nějž působí síla $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$, která může záviset na poloze bodu X. Polohu bodu X lze zapsat jako vektor $\boldsymbol{x} = (x, y, z)^T$. Označme po řadě $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$, $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$, $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ rychlost, zrychlení a hybnost bodu X.

Zákon setrvačnosti říká, že pokud je hmotný bod v klidu nebo vykonává rovnoměrný přímočarý pohyb, pak jeho hybnost („množství pohybu“) je konstantní a úměrná rychlosti s koeficientem úměrnosti m, tj. $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Ze zákona setrvačnosti tak dostáváme

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p} \quad \text{a dále} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}'' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}', \text{ tj. } \boldsymbol{p}' = m\boldsymbol{a}.$$

Síla působí zrychlení hmotného bodu; definujeme ji jako úměrnou tomuto zrychlení opět s koeficientem úměrnosti m, tj. $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. První dva Newtonovy pohybové zákony tedy můžeme vyjádřit ve tvaru bipartitního systému

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}). \tag{5.28}$$

Nechť nejprve nepůsobí žádná síla, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{o}$. Pak funkce

$$U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = U(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = p_x + p_y + p_z$$

je prvním integrálem systému

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{o}. \tag{5.29}$$

Vskutku

$$\nabla U(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)^T, \quad \boldsymbol{f}(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{p_x}{m}, \frac{p_y}{m}, \frac{p_z}{m}, 0, 0, 0\right)^T,$$

takže $\nabla U^T \boldsymbol{f} = 0$. Analogicky se lze přesvědčit, že každá z funkcí

$$U_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = p_x, \quad U_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = p_y, \quad U_3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = p_z, \quad U_4 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

je prvním integrálem systému (5.29); uvedené první integrály U_4, resp. U_1, U_2, U_3, vyjadřují zákon zachování hybnosti, resp. jejích složek.

Uvažujme nyní centrální sílu působící v počátku, tj. sílu, která bod X přitahuje k počátku nebo ho od něj odpuzuje. O velikosti síly budeme předpokládat, že je přímo úměrná hmotnosti bodu X a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti bodu X od počátku (takovou přitažlivou silou je například síla gravitační). Platí tedy

$$F_x(x, y, z) = c\frac{m}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad F_y(x, y, z) = c\frac{m}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$F_z(x, y, z) = c\frac{m}{x^2 + y^2 + z^2}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \text{tj. } \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x},$$

kde $\|\cdot\|$ nyní označuje euklidovskou velikost (normu) vektoru. Je-li konstanta úměrnosti c kladná, jedná se o přitažlivou sílu, je-li záporná, jedná se o sílu odpudivou. Systém (5.28) je nyní tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}' = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|^3}\boldsymbol{x}. \tag{5.30}$$

V souřadnicích ho lze rozepsat

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{m}p_x, & p_x' &= \frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}x,\\ y' &= \frac{1}{m}p_y, & p_y' &= \frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}y,\\ z' &= \frac{1}{m}p_z, & p_z' &= \frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}z. \end{aligned}$$

Fázový prostor tohoto systému je množina $\Omega = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^{3+3} : \|\boldsymbol{x}\| > 0\}$. Pro funkci $H : \Omega \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \frac{\|\boldsymbol{p}\|^2}{2m} + \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}, \text{ tj. } H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + \frac{cm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

platí

$$\begin{gathered} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{cmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{cmy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{cmz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\\ \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}. \end{gathered} \tag{5.31}$$

Tedy $\nabla H^T \boldsymbol{f} = 0$ a funkce H je prvním integrálem systému (5.30). Výraz

$$\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) = \frac{1}{2m}(m^2x'^2+m^2y'^2+m^2z'^2) = \frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2) = \frac{1}{2}m\,\|\boldsymbol{x}'\|^2 = \frac{1}{2}m\,\|\boldsymbol{v}\|^2$$

vyjadřuje kinetickou energii hmotného bodu X, výraz

$$\frac{cm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{cm}{\|\boldsymbol{x}\|}$$

vyjadřuje jeho energii potenciální. První integrál je tedy celkovou mechanickou energií hmotného bodu X, která se zachovává.

Z vyjádření (5.31) vidíme, že systém (5.30) lze také zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ p_x\\ p_y\\ p_z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)\\ \frac{\partial}{\partial y}H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)\\ \frac{\partial}{\partial z}H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)\\ \frac{\partial}{\partial p_x}H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)\\ \frac{\partial}{\partial p_y}H(x,y,z,p_x,p_y,p_z)\\ \frac{\partial}{\partial p_z}H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) \end{pmatrix}$$

nebo stručně

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{E} \\ -\mathsf{E} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \nabla H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}),$$

kde O, resp. E, je nulová, resp. jednotková, matice. Odtud vidíme, že první integrál H je současně hamiltoniánem systému (5.30). Označíme-li nyní

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \qquad \nabla_{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_x}, \frac{\partial}{\partial p_y}, \frac{\partial}{\partial p_z} \right)^T$$

můžeme systém (5.30) také zapsat jako hamiltonovský systém

$$\boldsymbol{x}' = \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{p}' = -\nabla_{\boldsymbol{x}} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}). \qquad \blacksquare$$

Část II

Aplikace

Kapitola 6

Některé klasické elementární úlohy

V této kapitole je uvedeno několik úloh vedoucích na obyčejné diferenciální rovnice, které lze vyřešit elementárními metodami z kapitoly 2. Lze ji tedy považovat za jakousi sbírku řešených příkladů.

Úlohy vychází z různých oborů — kinematiky (úlohy 6.1, 6.5), geometrické optiky (Archimédova úloha 6.3), dynamiky (úloha o reaktivním motoru 6.2), kosmologie (jednoduchý model expandujícího Vesmíru 6.8), epidemiologie (úloha 6.6), teorie řízení (problém „menežmentu obnovitelných zdrojů“ 6.7) nebo psychologie (nepříliš vážně míněná úloha 6.4).

6.1 Traktrisa

Po stole táhneme hodinky na napjatém řetízku délky ℓ tak, že koncem řetízku sledujeme hranu stolu. Na počátku svírá řetízek a hrana stolu úhel $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi]$. Úkolem je určit dráhu hodinek.

Zvolíme orthonormální souřadnou soustavu tak, že svislá osa splývá s hranou stolu a je souhlasně orientovaná se směrem pohybu konce řetízku, viz obr. 6.1. Při této volbě budou hodinky na počátku v bodě $(-\ell \sin\alpha, 0)$. Dráhu hodinek vyjádříme jako graf funkce $y = y(x)$. Hodinky se pohybují ve směru působící síly, síla působí ve směru řetízku. To znamená, že přímka incidentní s řetízkem je tečnou ke grafu funkce y v každém bodě. Směrnice této tečny je tedy rovna

$$y'(x) = \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{-x}. \tag{6.1}$$

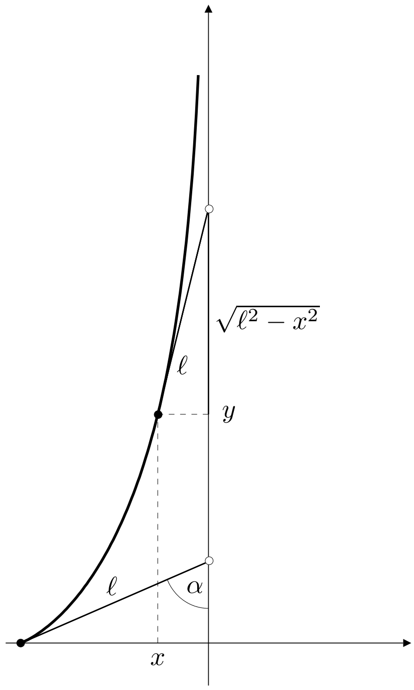
Hledaná funkce je řešením této obyčejné diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$y(-\ell \sin\alpha) = 0. \tag{6.2}$$

Na pravé straně rovnice (6.1) se nevyskytuje hledaná funkce y, proto můžeme řešení úlohy (6.1), (6.2) bezprostředně psát ve tvaru určitého integrálu

$$y(x) = \int\limits_{-\ell\sin\alpha}^{x} \frac{\sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{-\xi} \mathrm{d}\xi = \left[\ell \ln \frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - \xi^2}}{|\xi|} - \sqrt{\ell^2 - \xi^2} \right]_{\xi = -\ell\sin\alpha}^{x} =$$

$$= \ell \left[\cos\alpha - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} + \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 - x^2}}{-x} \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} \right) \right].$$



Obrázek 6.1: Traktrisa

Úlohu o dráze hodinek tažených na řetízku po stole zformuloval Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Křivku podrobně studoval v roce 1692 Christiaan Huygens, který jí také dal jméno tractrix (z latinského *trahere*, táhnout).

6.2 Ciolkovského rovnice

Pohyb rakety budeme popisovat v souřadné soustavě takové, aby na raketu nepůsobily žádné vnější síly (tedy ve stavu beztíže). Nechť v čase $t_0 = 0$ se raketa pohybuje rychlostí v_0. V čase t_0 se zažehne palivo, které rovnoměrně shoří za čas T a v podobě plynů proudí z trysky na zádi rakety rychlostí u vzhledem k raketě. Úlohou je určit rychlost rakety po provedení popsaného manévru, tedy její rychlost v čase T.

Označme M ... hmotnost rakety na počátku (v čase $t_0 = 0$),
μ ... hmotnost paliva vyhořelého za čas T,
$m = m(t)$ ... hmotnost rakety (s dosud nevyhořelým palivem) v čase t,
$v = v(t)$ ... rychlost rakety v čase t.

Předpoklad o rovnoměrném hoření paliva zapíšeme rovností

$$m(t) = M - \frac{\mu}{T}t = \frac{MT - \mu t}{T}. \tag{6.3}$$

Rychlost v neznáme. Budeme však o ní předpokládat, že je spojitě diferencovatelnou funkcí svého argumentu (času). Hybnost rakety se zbývajícím palivem v čase t je

$$p(t) = m(t)v(t). \tag{6.4}$$

Uvažujme krátký časový interval $[t, t + \Delta t] \subseteq [0, T]$. Během něho shoří palivo o hmotnosti

$$\Delta\mu = \mu(t) - \mu(t + \Delta t) = M - \frac{\mu}{T}t - \Big(M - \frac{\mu}{T}(t + \Delta t)\Big) = \frac{\mu}{T}\Delta t. \tag{6.5}$$

Rychlost vytékajících plynů v souřadné soustavě, v níž pohyb popisujeme, je v čase t rovna $v(t) - u$ a v průběhu intervalu se mění v rozmezí od této hodnoty po hodnotu $v(t + \Delta t) - u$. Hybnost vyhořelého paliva vytryskléno v uvažovaném časovém intervalu proto vyjádříme jako

$$p_P(t, \Delta t) = w(t, \Delta t)\Delta\mu, \tag{6.6}$$

kde $w(t, \Delta t)$ je integrální průměr vytékajících plynů v časovém intervalu délky Δt, tj.

$$w(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} \big(v(\tau) - u\big)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} v(\tau)\mathrm{d}\tau - u.$$

Podle první věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje číslo $\eta \in (0, 1)$ takové, že

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(\tau)\mathrm{d}\tau = v(t + \eta\Delta t)\Delta t,$$

takže $w(t, \Delta t) = v(t + \eta\Delta t) - u$. S využitím této rovnosti a rovnosti (6.5) vyjádříme hybnost (6.6) vytékajícího plynu výrazem

$$p_P(t, \Delta t) = \big(v(t + \eta\Delta t) - u\big)\frac{\mu}{T}\Delta t. \tag{6.7}$$

Hybnost rakety v čase $t + \Delta t$ je vzhledem k (6.3) rovna

$$p_R(t + \Delta t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) = \left(M - \frac{\mu}{T}(t + \Delta t)\right) v(t + \Delta t) = \left(m(t) - \frac{\mu}{T}\Delta t\right) v(t + \Delta t).$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí

$$v(t + \Delta t) = v(t) + v'(t + \vartheta\Delta t)\Delta t,$$

kde $\vartheta \in (0, 1)$. Dosazením této rovnosti do předchozí dostaneme

$$\begin{aligned} p_R(t + \Delta t) &= \left(m(t) - \frac{\mu}{T}\Delta t\right) \big(v(t) + v'(t + \vartheta\Delta t)\Delta t\big) = \\ &= m(t)v(t) - \left(\frac{\mu}{T}v(t) - m(t)v'(t + \vartheta\Delta t)\right) \Delta(t) - \frac{\mu}{T}v'(t + \vartheta\Delta t)(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Souhrnná hybnost rakety a vyhořelého paliva je v čase $t + \Delta t$ rovna

$$p(t + \Delta t) = p_R(t + \Delta t) + p_P(t, \Delta t).$$

Odtud a z (6.7), (6.8) dostaneme

$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \big(v(t + \eta\Delta t) - u - v(t)\big)\frac{\mu}{T} + m(t)v'(t + \vartheta\Delta t) - \frac{\mu}{T}v'(t + \vartheta\Delta t)\Delta t.$$

Limitním přechodem $\Delta t \to 0$ a jednoduchou úpravou vyjádříme derivaci hybnosti soustavy rakety s palivem ve tvaru

$$p'(t) = m(t)v'(t) - u\frac{\mu}{T}.$$

Podle zákona o zachování hybnosti je $p'(t) = 0$, takže s využitím rovnosti (6.3) dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci v ve tvaru

$$v'(t) = \frac{\mu u}{MT - \mu t}.$$

Na její pravé straně se nevyskytuje hledaná funkce v, stačí tedy integrovat obě strany rovnice v mezích od 0 po t. S využitím počáteční podmínky $v(0) = v_0$ dostaneme

$$v(t) = v_0 + \int\limits_0^t \frac{\mu u}{MT - \mu\tau} \mathrm{d}\tau = v_0 - u \left[\ln|MT - \mu\tau|\right]_{\tau=0}^t = v_0 + u \ln \frac{MT}{MT - \mu t} = \\ = v_0 + u \ln\left(1 + \frac{\mu t}{MT - \mu t}\right).$$

Zejména pro $t = T$ máme

$$v(T) = v_0 + u \ln\left(1 + \frac{\mu}{M - \mu}\right). \tag{6.9}$$

Tato formule se nazývá *Ciolkovského rovnice.*

Rovnici (6.9) odvodil William Moore ve výzkumné zprávě *A Treatise on the Motion of Rockets* pro Royal Military Academy, Woolwich, England, v roce 1813. Tato práce byla zapomenuta a nezávisle na ní rovnici objevil roku 1898 Konstantin Eduardovič Ciolkovskij. S její pomocí v článku

> Циолковский, К. Е. Изследование мировых пространств реактивными приборами. *Научное обозрѣние.* 1903, годъ X, No. 5

zdůvodnil, že rakety mohou létat naprosto nezávisle na okolním prostředí, a proto mohou být vhodným prostředkem pro lety do vesmíru.

6.3 Archimédova úloha

Určete tvar zrcadla, které odráží rovnoběžné světelné paprsky do jediného bodu (ohniska).

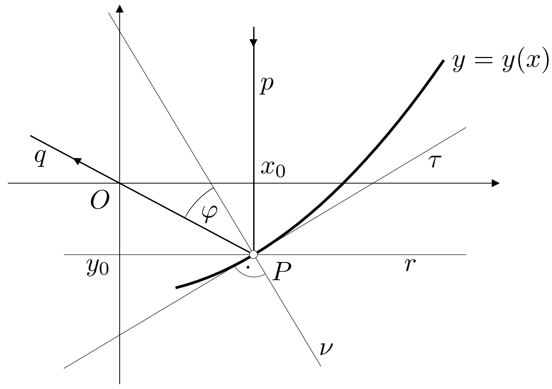
Zvolíme souřadnou soustavu tak, aby ohnisko bylo v jejím počátku O, přicházející paprsky byly rovnoběžné se svislou osou a směřovaly proti její orientaci (kreslete si obrázek 6.2). Uvažujme přicházející paprsek p, který se od zrcadla odráží v libovolném, ale pevně zvoleném bodě $P = (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. Nechť tvar zrcadla je v okolí tohoto bodu popsán funkcí $y = y(x)$; přitom samozřejmě $y(x_0) = y_0$.

Označme τ, resp. ν, tečnu, resp. normálu, k zrcadlu v bodě P, q přímku incidentní s odraženým paprskem PO, r vodorovnou přímku procházející bodem P. Nechť dále $\varphi = \sphericalangle \nu q$ je úhel, který svírá odražený paprsek s normálou ν. Úhel odrazu se rovná úhlu dopadu a tedy $\sphericalangle p\nu = \varphi$. Odtud plyne, že $\sphericalangle p\tau = \frac{1}{2}\pi - \varphi$. Dále platí $\sphericalangle r\tau = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle p\tau = \varphi$. Poněvadž τ je tečnou ke křivce o rovnici $y = y(x)$, platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \mathrm{tg}(\sphericalangle r\tau) = \mathrm{tg}\,\varphi. \tag{6.10}$$

Poněvadž přímky p a r jsou kolmé, je $\sphericalangle qr = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle p\nu - \sphericalangle \nu q = \frac{1}{2}\pi - 2\varphi$ a tedy

$$\mathrm{tg}(\sphericalangle qr) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = \mathrm{cotg}(2\varphi) = \frac{1 - (\mathrm{tg}\,\varphi)^2}{2\,\mathrm{tg}\,\varphi}. \tag{6.11}$$



Obrázek 6.2: K Archimédově úloze: $y = y(x)$ – zrcadlo, p – přicházející paprsek, q – odražený paprsek, P – bod dopadu a odrazu paprsku, O – ohnisko, τ – tečna k zrcadlu v bodě dopadu přicházejícího paprsku, ν – normála k zrcadlu, φ –úhel odrazu.

Současně

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle qr) = \frac{|y_0|}{x_0} = -\frac{y_0}{x_0}. \tag{6.12}$$

Spojením (6.10), (6.11) a (6.12) dostaneme rovnost

$$-\frac{y_0}{x_0} = \frac{1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)\right)^2}{2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)}.$$

Poněvadž bod $P = (x_0, y_0)$ byl libovolný, dostáváme pro tvar zrcadla diferenciální rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 1 = 2\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

To je rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci. Jedná se však o jednoduchou kvadratickou rovnici pro neznámou derivaci, takže ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \pm \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\,.$$

Pro $y < 0$ a $x > 0$ je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$, viz obrázek 6.2. Znaménko před odmocninou tedy musí být $+$. Dostáváme tak diferenciální rovnici pro tvar požadovaného zrcadla

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1}\,.$$

To je rovnice homogenní. Substitucí $u = u(x) = \frac{y(x)}{x}$, tedy $y(x) = xu(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ dostaneme rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení v implicitním tvaru je

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

tedy $\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right| = \ln|x| + const$. Odtud

$$u(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{C} - \frac{C}{x}\right),$$

kde C je integrační konstanta. V původních proměnných dostaneme rovnost

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{C} - C\right),$$

neboli $x^2 = C(C+2y)$. To je rovnice paraboly s ohniskem $(0,0)$ a řídící přímkou $x = -C$.

Název „Archimédova úloha“ vychází z tradované historky, podle níž Archimédes při obléhání Syrakus armádou římského vojevůdce Marcella v letech 214–212 př. n. l. z vyleštěných štítů obránců města sestavoval zrcadla, kterými soustředil sluneční paprsky a tak zapaloval lodě obléhatelů impregnované smolou.

6.4 Romeo a Julie

Romeo na plese zahlédl Julii a na první pohled se do ní zamiloval. Svoji zamilovanost začal Julii dávat najevo a tak se i ona do něho zamilovala. Pokusíme se popsat vývoj jejich citů, pokud by nedošlo k tragédii popsané Williamem Shakespearem.

Předpokládejme, že cit lze nějak kvantifikovat a označme $r = r(t)$ Romeův cit k Julii a $j = j(t)$ Juliin cit k Romeovi v čase t. Cit s kladným znaménkem budeme interpretovat jako okouzlení nebo zamilovanost[1], cit se záporným znaménkem jako odpor nebo nechuť. Romeův cit samozřejmě závisí na Juliině odezvě a současně je citem renesančního kavalíra, tedy dobyvatele: čím více náklonnosti Julie projevuje, tím je pro dobyvatele Romea méně přitažlivá. Tento jev vyjádříme tak, že Romeův cit k Julii se zmenšuje, pokud její k němu je kladný. V prvním přiblížení budeme změnu Romeova citu k Julii, tj. derivaci funkce r, považovat za úměrnou Juliinu citu k Romeovi se záporným koeficientem úměrnosti. Formálně to zapíšeme rovností

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -aj, \tag{6.13}$$

kde a je kladná konstanta. Naopak Juliin cit k Romeovi je povzbuzován Romeovými projevy náklonnosti. Touto úvahou dostaneme rovnici pro Juliin cit v prvním přiblížení jako

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = br, \tag{6.14}$$

kde $b > 0$. Na počátku se Romeo zamiloval a Julie o něm ani nevěděla, její cit k Romeovi byl nulový. Romeovu zamilovanost budeme považovat za jednotkový kladný cit. Dostáváme tak podmínky

$$r(0) = 1, \quad j(0) = 0. \tag{6.15}$$

[1]Používáme slovo „zamilovanost“, nikoliv „láska“. Láska totiž není jen citem, ale je z velké míry i záležitostí rozhodnutí a vůle; nelze ji proto jednoduše popisovat nějakým „přírodovědeckým“ způsobem. Samotný cit však lze do jisté míry biologickými nebo chemickými termíny popsat a proto ho lze i matematicky modelovat.

Diferenciální rovnice (6.13), (6.14) s počátečními podmínkami (6.15) představují model vývoje Romeových a Juliiných citů. Jedná se o homogenní systém dvou lineárních rovnic s konstantními koeficienty a lze ho tedy vyřešit metodami popsanými v 4.3, konkrétně postupem z 4.2.3 a 4.4.3.

Derivováním rovnice (6.13) a dosazením z rovnosti (6.14) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -a\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = -abr.$$

Vývoj Romeova vztahu k Julii je tedy popsán homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + abr = 0. \tag{6.16}$$

Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 + ab = 0$ má dva různé ryze komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{ab}$. Obecné řešení rovnice (6.16) tedy je tvaru

$$r(t) = A\cos\left(\sqrt{ab}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right).$$

Řešení musí splňovat počáteční podmínky (6.15), tedy

$$r(0) = 1, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(0) = -aj(0) = 0.$$

Odtud dostaneme $A = 1$, $B = 0$, takže $r(t) = \cos\left(\sqrt{ab}\,t\right)$ a podle rovnosti (6.13) dále platí

$$j(t) = -\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{a}\sqrt{ab}\,\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}\,\sin\left(\sqrt{ab}\,t\right).$$

Model (6.13), (6.14), (6.15) vývoje citů veronských milenců tedy předpovídá, že Romeovy city k Julii by periodicky kolísaly mezi zamilovaností a zhnusením, stejně tak Juliiny city k Romeovi. Pozitivní city k sobě navzájem mohou prožívat pouze na začátku příběhu, konkrétně do času

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}.$$

Shakespearovo řešení konfliktu tedy není tragédií, ale dobrým koncem. Kdyby příběh probíhal v neomezeném čase, pak pouze čtvrtinu z něho prožívají Romeo s Julií ve vzájemné náklonnosti, čtvrtinu ve vzájemném odporu a polovinu času s city rozdílnými. Povšimněme si ještě, že v případě $b > a$ kolísají Juliiny city s větší amplitudou než Romeovy, v případě $b < a$ je tomu naopak. Jinak řečeno, větším výkyvům citů (většímu utrpení?) je vystaven ten z dvojice, který je citově závislejší.

Vývoj citů lze modelovat i obecněji. Předpokládejme, že také úroveň vlastního citu ovlivňuje změnu tohoto citu. Můžeme tedy uvažovat model tvořený systémem rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \alpha_1 r - aj, \\ \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} &= br + \alpha_2 j, \end{aligned} \tag{6.17}$$

s počáteční podmínkou

$$r(0) = 1, \; j(0) = 0.$$

Záporný koeficient α_1 může vyjadřovat, že Romeo se svých citů bojí, nechce ztrácet vnitřní klid; kladný koeficient α_1 může znamenat, že se Romeo svými city nechá vést. Koeficient α_1 lze tedy považovat za jakési „umístění Romea na ose racionalita-romantismus“; koeficient α_2 lze interpretovat podobně pro Julii.

Modely vývoje milostných citů (6.13), (6.14) a (6.17) publikoval Steven H. Strogatz v článku

Strogatz, S. H. Love affairs and differential equations. *Mathematics Magazine.* 1988, Vol. 61, No. 1, p. 35.

Účelem článku ovšem nebylo vytvořit matematickou teorii zamilovanosti, ale navrhnout neobvyklý a pokud možno atraktivní způsob výkladu klasické látky – systému dvou obyčejných lineárních diferenciálních rovnic.

6.5 „Psí křivka“

Pes pronásleduje zajíce. Zajíc se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí u, pes běží ve směru k zajíci rovnoměrnou rychlostí v, $v > u$. Určete tvar dráhy psa a čas T, za který pes zajíce dohoní.

Zvolíme orthonormální souřadnou soustavu tak, aby se zajíc pohyboval po druhé ose souhlasně s její orientací a na počátku, tj. v čase $t_0 = 0$, se zajíc nacházel v bodě $(0, b)$ a pes v bodě $(-a, 0)$. Nechť pro určitost je $a > 0$; případ $a = 0$ je triviální a v případě $a < 0$ bude tvar dráhy zřejmě obrazem tvaru pro $a > 0$ v osové symetrii kolem druhé souřadné osy.

Situace je znázorněna na obr. 6.3 a). Dráhu psa vyjádříme jako funkci $y = y(x)$. V čase $t = 0$ je $x = -a$ a $y = 0$, tj.

$$y(-a) = 0. \tag{6.18}$$

Pes k zajíci směřuje od začátku, tj.

$$y'(-a) = \frac{b}{a}. \tag{6.19}$$

V jistém čase t, $t < T$, se pes nachází v bodě (x, y), $x \in (-a, 0)$, a zajíc v bodě $(0, b + ut)$. Poněvadž pes stále směřuje k zajíci, platí

$$y'(x) = \frac{b + ut - y(x)}{|x|} = \frac{y(x) - b - ut}{x},$$

neboli

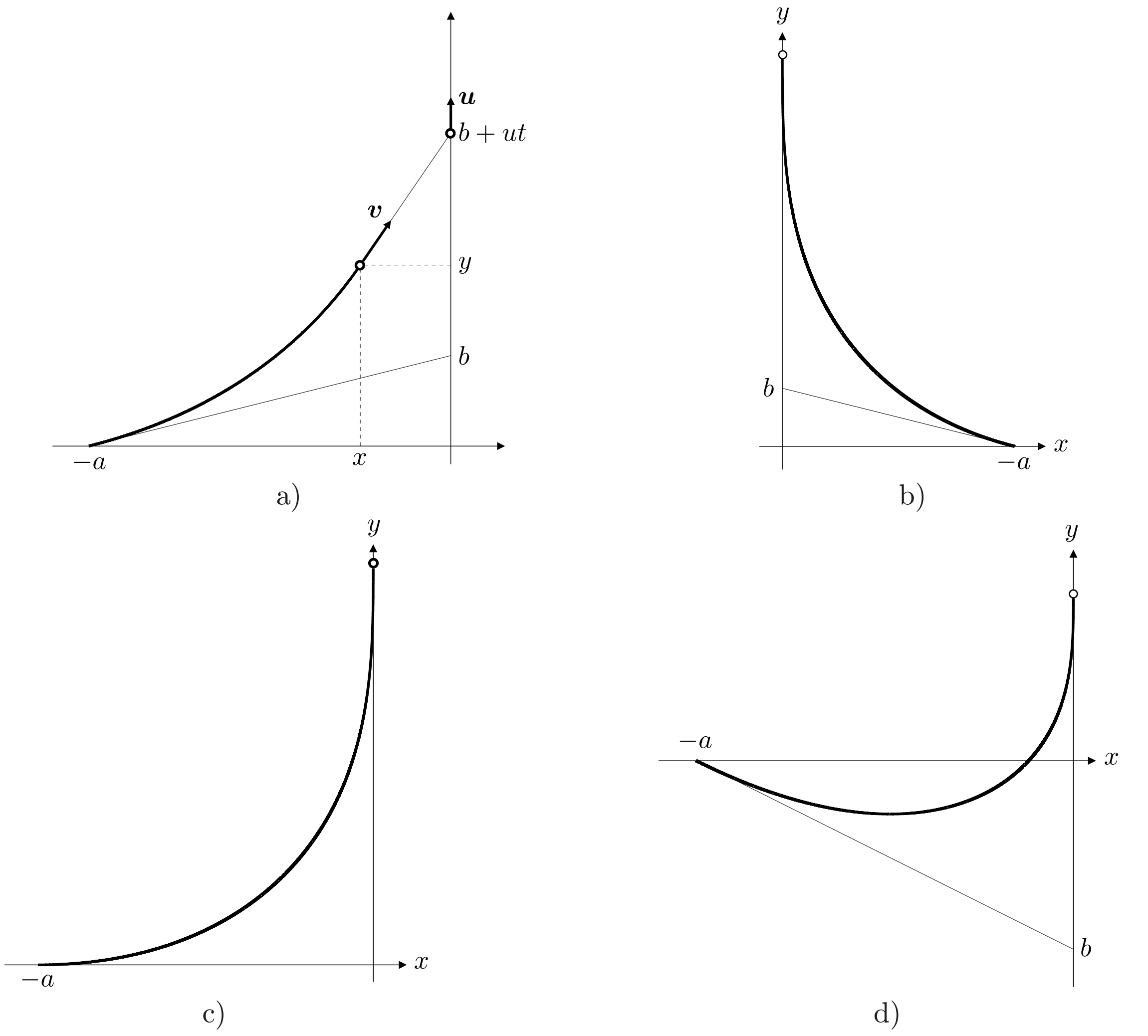
$$ut = y - xy'(x) - b. \tag{6.20}$$

Za čas t urazí pes dráhu délky vt. Této hodnotě tedy musí být rovna délka křivky (grafu funkce) $y = y(x)$ od bodu $(-a, 0)$ po bod (x, y), tedy

$$vt = \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2}\, \mathrm{d}\xi.$$

Z této rovnosti vyjádříme t a dosadíme do (6.20),

$$\frac{u}{v} \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2}\, \mathrm{d}\xi = y(x) - xy'(x) - b. \tag{6.21}$$



Obrázek 6.3: a) K odvození rovnice „psí křivky“. Vektor rychlosti zajíce $\boldsymbol{u}$ má v každém okamžiku souřadnice $(0, u)$, vektor rychlosti psa $\boldsymbol{v}$ má v každém okamžiku velikost v a v čase t směřuje k zajíci, tj. je rovnoběžný s vektorem o souřadnicích $(|x|, b + ut - y)$.
b) „Psí křivka“ pro $a < 0$, $b > 0$.
c) „Psí křivka“ pro $a > 0$, $b = 0$.
d) „Psí křivka“ pro $a > 0$, $b < 0$.

Označíme
$$s = \frac{u}{v}. \tag{6.22}$$
Podle předpokladu je $s < 1$. Obě strany rovnosti (6.21) zderivujeme podle x. Dostaneme
$$s\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2} = y'(x) - y'(x) - xy''(x)$$
a po úpravě
$$xy''(x) + s\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2} = 0. \tag{6.23}$$
Dráha psa je tedy řešením neautonomní nelineární diferenciální rovnice druhého řádu (6.23) s počátečními podmínkami (6.18), (6.19).

Rovnice (6.23) je typu 2.5.2. Proto zavedeme novou neznámou funkci $p = p(x) = y'(x)$. Dosadíme ji do rovnice (6.23) a počáteční podmínky (6.19). Po snadné úpravě dostaneme počáteční úlohu
$$p' = -\frac{s}{x}\sqrt{1 + p^2}, \qquad p(-a) = \frac{b}{a}.$$
Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Řešení úlohy v implicitním tvaru tedy podle 2.2.2 je
$$\int_{\frac{b}{a}}^{p} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = -s\int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$
Integrací dostaneme
$$\ln \frac{a\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}{b + \sqrt{a^2+b^2}} = \ln\left(-\frac{a}{x}\right)^s$$
a odtud
$$p = \frac{1}{2C}\left(C^2\left(-\frac{a}{x}\right)^s - \left(-\frac{x}{a}\right)^s\right),$$
kde
$$C = \frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{6.24}$$
Poněvadž $p = y'$ a funkce y splňuje podmínku (6.18), dostaneme řešení úlohy integrací poslední rovnosti, tedy
$$y(x) = \frac{1}{2C}\int_{-a}^{x}\left(C^2\left(-\frac{a}{\xi}\right)^s - \left(-\frac{\xi}{a}\right)^s\right)\mathrm{d}\xi =$$
$$= \frac{Ca}{2(1-s)}\left(1 - \left(-\frac{x}{a}\right)^{1-s}\right) - \frac{a}{2C(1+s)}\left(1 - \left(-\frac{x}{a}\right)^{1+s}\right).$$
Za konstanty s a C dosadíme z rovností (6.22) a (6.24). Po úpravách dostaneme „psí křivku“ ve tvaru
$$y(x) = \frac{v\left(vb + u\sqrt{a^2+b^2}\right)}{v^2 - u^2} - \frac{v}{2}\left(\frac{b - \sqrt{a^2+b^2}}{v+u}\left|\frac{x}{a}\right|^{1+\frac{u}{v}} + \frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{v-u}\left|\frac{x}{a}\right|^{1-\frac{u}{v}}\right).$$

Nalezená funkce y je sudá, vyjadřuje tedy tvar dráhy psa pro $a > 0$ i pro $a < 0$; v prvním případě bychom za definiční obor považovali interval $[-a, 0]$, ve druhém interval $[0, -a]$.

Pes dostihne zajíce v bodě $\big(0, y(0)\big)$. To znamená, že zajíc rychlostí u urazí dráhu délky $y(0) - b$ a čas, za který pes zajíce dohoní, je tedy roven

$$T = \frac{y(0) - b}{u} = \frac{1}{u}\left(\frac{v\left(vb + u\sqrt{a^2 + b^2}\right)}{v^2 - u^2} - b\right) = \frac{ub + v\sqrt{a^2 + b^2}}{v^2 - u^2}.$$

„Psí křivku“ („courbe chien“) jako první studoval v roce 1732 francouzský matematik Pierre Bouger (ten je známější jako účastník expedice do Peru v roce 1735, která změřila délku jednoho stupně zeměpisné délky na rovníku). Křivka je nejjednodušším případem křivek sledování (pursuit curves, pojem poprvé použil George Boole ve svém spisu „Treatise on Differential equations“ v roce 1859), které jsou definovány takto: jestliže body A a P se pohybují rovnoměrně, bod A po dané křivce a směr pohybu bodu P stále míří k bodu A, pak bod P opisuje křivku sledování.

Úloha bývá někdy formulována tak, že pes sleduje svého pána, nebo že liška honí králíka.

6.6 Epidemiologický model Daniela Bernoulliho

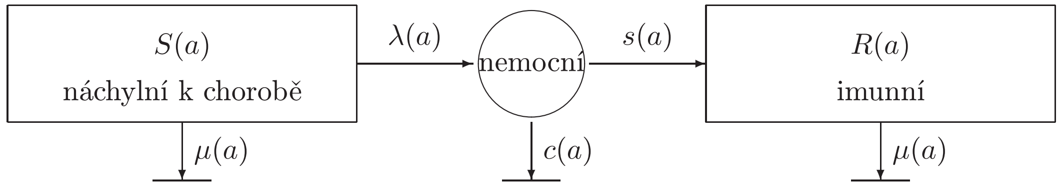
Uvažujme chorobu, která trvá krátce, někteří pacienti na ni zemřou, jiní se uzdraví a získají vůči nákaze imunitu; typickým představitelem takové infekce byly neštovice. Budeme modelovat epidemii této choroby, tj. její šíření v nějaké kohortě. Kohortou rozumíme skupinu osob narozených ve stejnou dobu.

Zavedeme označení: N počet osob zahrnutých do kohorty, a jejich věk (tj. čas od počátku), $S = S(a)$, resp. $R = R(a)$ počet osob věku a, které neprodělaly, resp. prodělaly, chorobu. Při tomto označení je $N = S(0) + R(0) = S(0)$, neboť novorozenci chorobu neprodělali, tj. $R(0) = 0$. Další symboly zavedeme na základě následujících předpokladů:

- Počet osob věku a, které zemřou z jiných příčin, než je uvažovaná infekce, je úměrná délce (krátkého) časového intervalu sledování Δa a počtu nenakažených osob $S(a)$. Konstantu úměrnosti — *přirozenou úmrtnost* ve věku a — označíme $\mu(a)$.
- Počet osob věku a, které se nakazí uvažovanou chorobou je úměrná délce sledování Δa a počtu $S(a)$ osob, které dosud chorobu neprodělaly a jsou tedy citlivé na infekci. Koeficient úměrnosti — *incidenci choroby* ve věku a — označíme $\lambda(a)$
- Počet nemocných osob věku a, které se uzdraví za časový interval Δa je úměrný počtu infikovaných osob tohoto věku a délce intervalu Δa. Koeficient úměrnosti — *index přežití* choroby osobami věku a — označíme $s(a)$.

Úmrtnost $\mu(a)$ lze interpretovat jako pravděpodobnost, že „zdravá“ osoba (tj. ta, která nemá uvažovanou chorobu) věku a zemře během časového intervalu délky Δa; incidenci $\lambda(a)$ jako pravděpodobnost, že se „zdravá“ osoba věku a, která není imunní vůči uvažované chorobě, nakazí během časového intervalu délky Δa; ukazatel přežití $s(a)$ jako pravděpodobnost, že nakažená osoba věku a se během časového intervalu délky Δa uzdraví. Budeme předpokládat, že onemocnění a uzdravení jsou jevy nezávislé, tj. že pravděpodobnost, že osoba citlivá k infekci se během časového intervalu délky Δa nakazí a uzdraví, je rovna $s(a)\lambda(a)$. Dále zavedeme *letalitu choroby* ve věku a vztahem

$$c(a) = 1 - s(a);$$



Obrázek 6.4: Schéma vývoje kohorty ohrožené chorobou

lze ji interpretovat jako pravděpodobnost, že nemocná osoba věku a během časového intervalu délky Δa zemře. Proměnné

$$u = u(a) = \frac{S(a)}{N}, \quad \text{resp. } w = w(a) = \frac{R(a)}{N}$$

vyjadřují (klasickou) pravděpodobnost, že osoba se dožila věku a a neprodělala, resp. prodělala, chorobu. Novorozenec určitě chorobu neprodělal, tedy platí

$$u(0) = 1, \quad w(0) = 0. \tag{6.25}$$

Vývoj kohorty, v níž probíhá choroba, lze schematicky znázornit obrázkem 6.4 a předpoklady vyjádřit ve tvaru rovností:

$$S(a + \Delta a) = S(a) - \mu(a)S(a)\Delta a - \lambda(a)S(a)\Delta a = S(a) - \big(\mu(a) + \lambda(a)\big)S(a)\Delta a,$$

$$\begin{aligned} R(a + \Delta a) = R(a) + s(a)\lambda(a)S(a)\Delta a - \mu(a)R(a)\Delta a = \\ = R(a) + \big(1 - c(a)\big)\lambda(a)S(a)\Delta a - \mu(a)R(a)\Delta a. \end{aligned}$$

V první z uvedených rovností převedeme na levou stranu $S(a)$ a ve druhé z nich $R(a)$, rovnosti vydělíme výrazem $N\Delta a$ a provedeme limitní přechod $\Delta a \to 0$. Pro zjednodušení modelu budeme předpokládat, že funkce u a w jsou diferencovatelné; takový předpoklad je v případě velké kohorty dostatečně realistický. Dostaneme tak systém neautonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} &= -\big(\mu(a) + \lambda(a)\big)u, \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}a} &= \big(1 - c(a)\big)\lambda(a)u \; - \mu(a)w; \end{aligned} \tag{6.26}$$

jejich řešení splňuje počáteční podmínky (6.25).

První rovnice systému (6.26) je lineární homogenní rovnicí pro neznámou funkci u. Její řešení s počáteční podmínkou (6.25) je při označení

$$M(a) = \int\limits_0^a \mu(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \quad \Lambda(a) = \int\limits_0^a \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{6.27}$$

podle 2.3.1 rovno

$$u(a) = \mathrm{e}^{-\Lambda(a) - M(a)}. \tag{6.28}$$

Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice systému (6.26) a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}a} \;=\; -\mu(a)w + \big(1 - c(a)\big)\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a) - M(a)},$$

což je lineární nehomogenní rovnice pro neznámou funkci w. Její řešení s počáteční podmínkou (6.25) je opět podle 2.3.1 rovno

$$w(a) = \mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right) - \mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}. \tag{6.29}$$

Dosud provedené úvahy a výpočty lze shrnout: Pravděpodobnosti $u(a)$, resp. $w(a)$, že se osoba dožije věku a a neprodělá, resp. prodělá, chorobu, jsou řešením soustavy rovnic (6.26) s počátečními podmínkami (6.25) a jsou dány výrazy (6.28), resp. (6.29), kde funkce M a Λ jsou dány výrazy (6.27).

Pravděpodobnost, že se osoba dožije věku a za předpokladu, že choroba se v kohortě neobjevuje (tj. $\lambda \equiv 0$ a v důsledku toho také $\Lambda \equiv 0$), je rovna přímo funkci u s $\Lambda \equiv 0$, tj.

$$\ell_0(a) = \mathrm{e}^{-M(a)}.$$

Pravděpodobnost, že se osoba dožije věku a pokud se choroba vyskytuje, je rovna

$$\begin{aligned}\ell(a) = u(a) + w(a) = \mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right) = \\ = \ell_0(a) \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right).\end{aligned}$$

Pravděpodobnost dožití věku a je tedy součinem pravděpodobnosti dožití věku a při přirozené úmrtnosti a faktoru, který závisí pouze na incidenci a letalitě choroby.

Označme dále

$$x(a) = \frac{u(a)}{\ell(a)}, \quad z(a) = \frac{w(a)}{\ell(a)} = \frac{\ell(a) - u(a)}{\ell(a)} = 1 - x(a);$$

Veličina $x(a)$, resp. $z(a)$, vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že osoba věku a neprodělala, resp. prodělala, chorobu za podmínky, že se věku a dožila.

Poněvadž

$$x(a) = \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}}{\mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right)} = \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha}, \tag{6.30}$$

platí rovnost $x(0) = 1$ a dále

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(a)}{\mathrm{d}a} &= \frac{-\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)} \left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right) + \mathrm{e}^{-\Lambda(a)}c(a)\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{\left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right)^2} = \\ &= -\lambda(a) \left(\frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha} - \frac{c(a)\mathrm{e}^{-2\Lambda(a)}}{\left(1 - \int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right)^2} \right) = \\ &= -\lambda(a)x(a)\big(1 - c(a)x(a)\big).\end{aligned}$$

Relativní zastoupení osob věku a, které v uvažované kohortě neprodělaly chorobu, je tedy veličina $x(a)$ daná formulí (6.30), která je současně řešením počáteční úlohy pro Bernoulliovu rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} = -\lambda(a)x\big(1 - c(a)x\big), \quad x(0) = 1. \tag{6.31}$$

Vývoj zastoupení osob, které neprodělaly chorobu, tedy nezávisí na přirozené úmrtnosti μ. Úlohu (6.31) můžeme vyřešit metodami popsanými v 2.3.2 a přesvědčit se, že řešení je stejné jako (6.30), nebo podrobněji

$$x(a) = \frac{\mathrm{e}^{\int_a^0 \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha}}{1 - \int_0^a \lambda(\xi)c(\xi)\mathrm{e}^{\int_a^\xi \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha}\mathrm{d}\xi}.$$

Zejména pro incidenci choroby a letalitu choroby nezávislé na věku dostaneme

$$x(a) = \frac{1}{c + (1-c)\mathrm{e}^{\lambda a}}.$$

Poznamenejme ještě, že v teorii přežití se funkce ℓ_0, μ, M nazývají *funkce přežití, riziková funkce* a *kumulativní riziková funkce* (v uvedeném pořadí). Pokud

$$\lim_{a\to\infty} M(a) = \int_0^\infty \mu(a)\mathrm{d}a = \infty,$$

pak pro funkci přežití platí

$$\ell_0(a) = 1 - F(a),$$

kde F je distribuční funkce náhodné veličiny „věk dožití jedince z kohorty“.

Uvedený model šíření epidemie neštovic publikoval Daniel Bernoulli (1700–1782) v článku

Bernoulli, D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. *Hist. Acad R. Sci. Paris.* 1760/1766, p.1–45.

v němž hledal odpověď na otázku, zda zavádět očkování proti neštovicím, přestože tato operace někdy končí smrtí.

Na základě tabulek úmrtí, které publikoval královský astronom Edmond Haley (1656–1742)

Halley E. An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives. *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* 1693, vol. 17, p. 596–610.

odhadl D. Bernoulli hodnoty incidence a letality neštovic nezávislé na věku jako $\lambda = \frac{1}{8}$, $c = \frac{1}{8}$; skutečnost, že mu koeficienty vyšly stejné, je náhoda.

6.7 Udržitelný rybolov

Představme si nějakou vodní nádrž, v níž žijí ryby. Tato nádrž je uzavřená v tom smyslu, že ryby z ní ani do ní nemigrují. Úživnost této nádrže budeme považovat za konstantní. Populaci ryb považujeme za homogenní (nerozlišujeme věk, velikost, pohlaví ani jiné vlastnosti jedinců) a všechny její charakteristiky kromě velikosti považujeme za konstantní v čase. Označíme-li $x = x(t)$ velikost populace ryb v čase t, pak vývoj této veličiny lze modelovat logistickou diferenciální rovnicí

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

kde r je vnitřní koeficient růstu populace a K je kapacita (úživnost) prostředí; oba parametry r a K jsou kladné.

Rybolov s konstantním úlovkem za jednotku času

Ryby však nejsou ponechány svému vývoji, jejich populace je využívána. Rybolov můžeme popsat tak, že z populace ryb je pravidelně odstraňován jistý počet jedinců, za jednotku času je vyloveno určité množství ryb. (To si lze například představit tak, že u jezera žijí rybáři, kteří mají pevně daný počet loděk, každý den vyrazí na lov a loví tak dlouho, až své čluny naplní.) Označme h množství ryb ulovených za jednotku času; parametr h je kladný. Pak vývoj populace ryb, jejíž velikost byla na začátku rovna hodnotě $x_0 \geq 0$, je popsán počáteční úlohou pro diferenciální rovnici

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - h, \qquad x(0) = x_0. \tag{6.32}$$

Základní otázkou je, zda rybolov je udržitelný, tj. zda v dostatečně dlouhém časovém horizontu bude populace ryb přežívat nebo ji lov vyhubí.

Rovnice v úloze (6.32) je Riccatiho, podle 4.5 ji řešíme substitucí

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{y'(t)}{y(t)}. \tag{6.33}$$

Dosazení do rovnice (6.32) dává

$$\frac{K}{r}\frac{y''y - (y')^2}{y^2} = x' = r\frac{K}{r}\frac{y'}{y} - \frac{r}{K}\left(\frac{K}{r}\frac{y'}{y}\right)^2 - h,$$

tj.

$$\frac{K}{r}\frac{y''}{y} - \frac{K}{r}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -\frac{K}{r}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + K\frac{y'}{y} - h.$$

Odtud snadnou úpravou dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - ry' + \frac{rh}{K}y = 0. \tag{6.34}$$

Její charakteristická rovnice (sr. 4.4.3) je

$$\lambda^2 - r\lambda + \frac{rh}{K} = 0. \tag{6.35}$$

Označme $D = 1 - \dfrac{4h}{rK}$. Pak $D < 1$, neboť parametry r, K, h jsou kladné. Při řešení úlohy (6.32) rozlišíme tři případy podle znaménka veličiny D.

(i) $D > 0$, tj. $h < \frac{1}{4}rK$.

V tomto případě má charakteristická rovnice (6.35) dva reálné různé kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{r}{2}\left(1 \pm \sqrt{D}\right)$$

a protože $D < 1$, jsou oba kořeny kladné. Obecné řešení lineární rovnice (6.34) je

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r\left(1+\sqrt{D}\right)t} + B\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r\left(1-\sqrt{D}\right)t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t}\left(A + B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right),$$

kde A, B jsou nějaké konstanty. Platí tedy

$$\begin{aligned} y'(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t}\left(\frac{r}{2}(1+\sqrt{D})\left(A + B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right) - Br\sqrt{D}\,\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right) = \\ = \frac{r}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}r(1+\sqrt{D})t}\left((1+\sqrt{D})A + (1-\sqrt{D})B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}\right). \end{aligned}$$

Odtud a z transformačního vztahu (6.33) dostaneme obecné řešení rovnice z úlohy (6.32) ve tvaru

$$x(t) = \frac{K}{2}\frac{(1+\sqrt{D})A + (1-\sqrt{D})B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}{A + B\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}.$$

Konstanty A, B získáme z počáteční podmínky v úloze (6.32):

$$x_0 = \frac{K}{2}\frac{(1+\sqrt{D})A + (1-\sqrt{D})B}{A+B} = \frac{K}{2}\left(1 + \sqrt{D}\,\frac{A-B}{A+B}\right).$$

To je jedna rovnice pro dvě neznámé a hodnoty A, B z ní nelze vypočítat. Lze však určit jejich poměr

$$\frac{2x_0}{K} - 1 = \sqrt{D}\,\frac{A-B}{A+B}, \quad \text{tj.} \quad \left(2x_0 - K - K\sqrt{D}\right)A = -B\left(2x_0 - K + K\sqrt{D}\right).$$

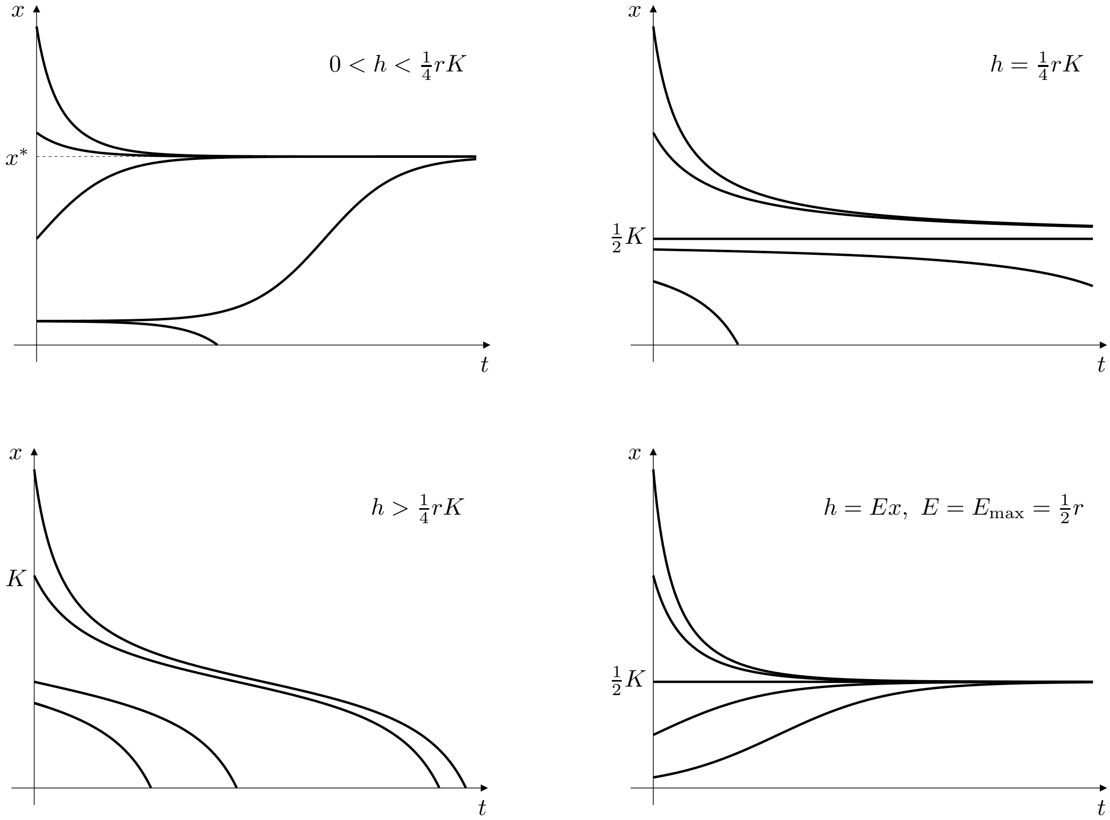
Řešení úlohy (6.32) je tedy dáno formulí

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{K}{2}\frac{(1+\sqrt{D})\left(K(1-\sqrt{D}) - 2x_0\right) - (1-\sqrt{D})\left(K(1+\sqrt{D}) - 2x_0\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}{K(1-\sqrt{D}) - 2x_0 - \left(K(1+\sqrt{D}) - 2x_0\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}} = \\ = \frac{K}{r}\frac{rx_0(1+\sqrt{D}) - 2h - \left(rx_0(1+\sqrt{D}) - 2h\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}{2x_0 - K(1-\sqrt{D}) - \left(2x_0 - K(1+\sqrt{D})\right)\mathrm{e}^{-r\sqrt{D}\,t}}, \end{aligned}$$

neboť $1 - D = \dfrac{4h}{rK}$.

Nyní můžeme vyšetřovat průběh funkce x v závislosti na počáteční hodnotě (parametru) x_0. Pokud je $x_0 > \frac{1}{2}K(1-\sqrt{D})$, pak je funkce x kladná pro jakoukoliv hodnotu nezávisle proměnné t a platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = K\frac{1+\sqrt{D}}{2};$$



Obrázek 6.5: Modely rybolovu. Rybolov s konstantním úlovkem za časovou jednotku, tj. řešení úlohy (6.32) pro různé hodnoty intenzity lovu h a pro různé počáteční hodnoty x_0 (nahoře a vlevo dole). Rybolov s konstantním loveckým úsilím, tj. řešení úlohy (6.37) s úsilím E přinášejícím maximální udržitelný úlovek pro různé počáteční hodnoty x_0 (vpravo dole).

zejména pro $x_0 = \frac{1}{2}K\big(1+\sqrt{D}\big)$ je funkce x konstantní, $x(t) \equiv \frac{1}{2}K\big(1+\sqrt{D}\big)$. Rybolov zredukuje velikost populace ryb na hodnotu $x^* = \frac{1}{2}K\big(1+\sqrt{D}\big)$.

Pokud je $x_0 = \frac{1}{2}K\big(1-\sqrt{D}\big)$, pak je funkce x konstantní, $x(t) \equiv \frac{1}{2}K\big(1-\sqrt{D}\big)$.

Ovšem, pokud je $x_0 < \frac{1}{2}K\big(1-\sqrt{D}\big)$, pak pro

$$t_E = \frac{1}{r\sqrt{D}} \ln \frac{2h - rx_0\big(1-\sqrt{D}\big)}{2h - rx_0\big(1+\sqrt{D}\big)}$$

je $x(t_E) = 0$. To znamená, že lov ryby vyhubí.

Řešení počáteční úlohy (6.32) s hodnotou $h \in \big(0, \frac{1}{4}rK\big)$ a s různými počátečními hodnotami je zobrazeno na obr. 6.5 vlevo nahoře.

(ii) $D > 0$, tj. $h = \frac{1}{4}rK$.

V tomto případě má charakteristická rovnice (6.35) dvojnásobný reálný kladný kořen $\lambda = \frac{1}{2}r$. Obecné řešení lineární rovnice (6.34) v tomto případě je rovno

$$y(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}.$$

Pro toto řešení musí platit $y(0) \neq 0$, jinak by transformace (6.33) nebyla definována v pravém okolí počáteční hodnoty. Odtud plyne, že $A \neq 0$ a řešení můžeme upravit na tvar

$$y(t) = A\left(1 + \frac{B}{A}t\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt} = A(1 + Ct)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt},$$

kde $C = \dfrac{B}{A}$. Derivace řešení je rovna

$$y'(t) = A\left(C + \frac{r}{2}(1 + Ct)\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}$$

a obecné řešení rovnice z úlohy (6.32) je

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{C + \frac{r}{2}(1 + Ct)}{1 + Ct} = \frac{K}{2} + \frac{K}{r}\frac{C}{1 + Ct}.$$

Toto řešení má splňovat počáteční podmínku v úloze (6.32), takže

$$C = \frac{r}{2K}(2x_0 - K).$$

Řešení úlohy (6.32) je tedy v případě $h = \frac{1}{4}rK$ dáno formulí

$$x(t) = K\left(\frac{1}{2} + \frac{2x_0 - K}{2K + r(2x_0 - K)t}\right).$$

Pokud $x_0 \geq \frac{1}{2}K$, je toto řešení kladné pro každé $t \geq 0$. Zejména pro $x_0 = \frac{1}{2}K$ je řešení konstantní, $x(t) \equiv \frac{1}{2}K$. Pokud naopak $x_0 < \frac{1}{2}K$, je řešení kladné pouze pro $t \in [0, t_E)$, kde

$$t_E = \frac{2K}{r(K - 2x_0)}$$

a $x(t_E) = 0$. Řešení úlohy (6.32) v případě $h = \frac{1}{4}rK$ pro různé počáteční hodnoty je znázorněno na obr. 6.5 vpravo nahoře.

V případě $h = \frac{1}{4}rK$ je tedy rybolov udržitelný pouze pokud byla počáteční velikost populace ryb alespoň na polovině úživnosti prostředí. V takovém případě rybolov dlouhodobě udržuje velikost populace na hodnotě $\frac{1}{2}K$, neboť

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{K}{2}.$$

Pokud je počáteční velikost populace ryb menší, lov ryby vyhubí v čase t_E.

(iii) $D < 0$, tj. $h > \frac{1}{4}rK$.

V tomto případě má charakteristická rovnice (6.35) komplexně sdružené kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{r}{2} \pm \mathrm{i}\varphi, \quad \text{kde } \varphi = \frac{r}{2}\sqrt{-D} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{4h}{rK} - 1}$$

a obecné řešení lineární rovnice (6.34) je tvaru

$$y(t) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}rt}\sin(\varphi t + \psi),$$

kde A, ψ jsou konstanty. Jeho derivace je rovna

$$y'(t) = Ae^{\frac{1}{2}rt}\left(\frac{r}{2}\sin(\varphi t+\psi)+\varphi\cos(\varphi T+\psi)\right)$$

a řešení rovnice z úlohy (6.32) podle transformačního vztahu (6.33) je dáno formulí

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{r\sin(\varphi t+\psi)+2\varphi\cos(\varphi t+\psi)}{2\sin(\varphi t+\psi)} = \frac{K}{2}+\frac{K\varphi}{r}\operatorname{cotg}(\varphi t+\psi) =$$
$$= \frac{K}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4h}{rK}-1}\,\operatorname{cotg}(\varphi t+\psi)\right).$$

Aby toto řešení splnilo počáteční podmínku v úloze (6.32), musí platit

$$x_0 = \frac{K}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4h}{rK}-1}\,\operatorname{cotg}\psi\right),$$

tedy

$$\psi = \operatorname{arccotg}\left(\frac{2x_0-K}{K}\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\right).$$

Řešení úlohy (6.32) je nyní kladné pouze na intervalu $[0,t_E)$, kde t_E je nejmenší kladné řešení rovnice

$$\frac{K}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4h}{rK}-1}\,\operatorname{cotg}(\varphi t_E+\psi)\right) = 0,$$

tedy

$$t_E = \frac{1}{\varphi}\left(\operatorname{arccotg}\left(-\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\right)-\psi\right) = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\left(\frac{\pi}{2}-\psi+\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{rK}{4h-rK}}\right).$$

Pro $h > \frac{1}{4}rK$ tedy rybolov nemůže být udržitelný. Řešení úlohy (6.32) v případě $h > \frac{1}{4}rK$ pro různé počáteční hodnoty je znázorněno na obr. 6.5 vlevo dole.

Z rozboru řešení modelu (6.32) plyne, že rybolov může být udržitelný pouze v případě, že není příliš intenzivní a počáteční populace ryb je dostatečně velká, konkrétně když

$$h \le \frac{1}{4}rK \quad \text{a} \quad x_0 \ge \frac{K}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4h}{rK}}\right).$$

Maximální udržitelný úlovek je tedy

$$h_{\max} = \frac{1}{4}rK. \tag{6.36}$$

Rybolov s konstantním úsilím

K modelování rybolovu můžeme přistoupit i jinak. Předpokládejme, že nikoliv úlovek za jednotku času, ale úsilí vynaložené na lov je konstantní. To si můžeme představit například tak, že rybáři mají pevnou denní pracovní dobu, po kterou vlečou sítě. Úlovek za jednotku času je v takovém případě úměrný množství ryb, které jsou k dispozici, tj. $h = Ex$, kde kladná konstanta E vyjadřuje vynaložené úsilí.

Místo modelu (6.32) tedy uvažujeme model

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - Ex, \qquad x(0) = x_0. \tag{6.37}$$

Rovnici upravíme na tvar

$$x' = -\frac{r}{K}x^2 + (r - E)x$$

a vidíme, že se opět jedná o Riccatiho rovnici. Substituce (6.33) ji převede na tvar

$$\frac{K}{r}\frac{y''}{y} - \frac{K}{r}\left(\frac{y'}{y}\right)^2 = -\frac{r}{K}\left(\frac{K}{r}\frac{y'}{y}\right)^2 + (r - E)\frac{K}{r}\frac{y'}{y},$$

z něhož po úpravě dostaneme lineární homogenní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - (r - E)y' = 0. \tag{6.38}$$

Příslušná charakteristická rovnice $\lambda^2 - (r - E)\lambda = 0$ má dva reálné kořeny

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} 0, \\ r - E. \end{cases} \tag{6.39}$$

Pokud $E \neq r$, jsou tyto kořeny různé a obecné řešení rovnice (6.38) je tvaru

$$y(t) = A + B\mathrm{e}^{(r-E)t}.$$

Jeho derivace je rovna $y'(t) = B(r - E)\mathrm{e}^{(r-E)t}$, takže zpětnou transformací (6.33) dostaneme řešení rovnice z úlohy (6.37) jako

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{B(r - E)\mathrm{e}^{(r-E)t}}{A + B\mathrm{e}^{(r-E)t}}.$$

Pro $x(0) = x_0 > 0$ musí být $B \neq 0$ a řešení můžeme upravit na tvar

$$x(t) = \frac{K(r - E)}{r\left(1 + D\mathrm{e}^{-(r-E)t}\right)};$$

hodnotu konstanty $D = \dfrac{A}{B}$ určíme z počáteční podmínky úlohy (6.37),

$$D = \frac{K(r - E)}{rx_0} - 1 = \frac{1}{rx_0}\big(K(r - E) - rx_0\big).$$

Řešení úlohy (6.37) je tedy v případě $E \neq r$ dáno formulí

$$x(t) = \frac{K(r - E)x_0}{rx_0 - \big(rx_0 - K(r - E)\big)\mathrm{e}^{-(r-E)t}}; \tag{6.40}$$

povšimněme si, že tato funkce vyjadřuje řešení problému (6.37) i pro $x_0 = 0$. Řešení (6.40) úlohy (6.37) je pro libovolnou počáteční hodnotu $x_0 \geq 0$ definováno na celém intervalu $[0, \infty)$ a platí pro něho

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} K\left(1 - \dfrac{E}{r}\right), & E < r, \\ 0, & E > r. \end{cases}$$

Pokud $E = r$, oba kořeny (6.39) charakteristické rovnice splývají do dvojnásobného kořene $\lambda_{1,2} = 0$. Obecné řešení lineární rovnice (6.38) je v tomto případě rovno

$$y(t) = A + Bt,$$

takže z transformačního vztahu (6.33) plyne, že obecné řešení rovnice v úloze (6.37) je

$$x(t) = \frac{K}{r}\frac{B}{A + Bt} = \frac{K}{r}\frac{1}{D + t}.$$

Hodnota konstanty D nyní je $D = \dfrac{K}{rx_0}$, takže řešení úlohy (6.37) je

$$x(t) = \frac{Kx_0}{K + rx_0 t}.$$

Tato funkce je také při libovolném $x_0 \geq 0$ definována na celém intervalu $[0, \infty)$ a platí pro ni

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Z rozboru řešení úlohy (6.37) vidíme, že rybolov je dlouhodobě udržitelný (tj. řešení $x = x(t)$ úlohy (6.37) je kladné pro všechna $t \geq 0$) v případě $E < r$. Na rozdíl od předchozího modelu (6.32) však i neudržitelný rybolov vyhubí ryby v dlouhodobém horizontu, nikoliv v konečném čase. Jinak řečeno: je-li ochrana ryb (nebo jiného obnovitelného zdroje) prováděna pevným omezením úlovku, může dojít ke katastrofickému vývoji — rychlé likvidaci ryb. Ochrana pomocí zpětné vazby, tj. omezováním úlovku na základě aktuálního množství ryb, je bezpečnější.

Uvažujme nyní udržitelný rybolov papsaný modelem (6.37) za situace, kdy velikost populace ryb je na limitní hodnotě

$$x^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

Úlovek za jednotku času je v takovém případě roven $h = Ex^*$. Tento úlovek lze chápat jako závislý na vynaloženém úsilí, tj. jako funkci

$$h = h(E) = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

To je konkávní kvadratická funkce, která nabývá svého maxima pro $E = E_{\max} = \frac{1}{2}r$. Maximální úlovek za jednotku času je tedy

$$h_{\max} = h(E_{\max}) = \frac{1}{4}rK.$$

To je stejný výsledek jako (6.36), tj. v případě rybolovu s konstantním úlovkem za jednotku času popsaného modelem (6.32). Řešení úlohy (6.37) s úsilím $E = E_{\max} = \frac{1}{2}r$ je znázorněno na obrázku 6.5 vpravo dole.

Optimalizace udržitelného rybolovu

Nyní můžeme řešit problém optimalizace rybolovu. Vnitřní koeficient růstu populace ryb je pro konkrétní druh konstanta, tu ovlivnit nelze. Úživnost prostředí však lze měnit, například eutrofizací příslušné vodní nádrže (přikrmováním ryb). V takovém případě můžeme počáteční velikost x_0 považovat za kapacitu přirozeného prostředí. Zvyšování úživnosti prostředí ale něco stojí. Předpokládejme, že náklady na eutrofizaci rybníka, které zvýší jeho úživnost na hodnotu K, jsou vyjádřeny funkcí $n(K)$. Cenu ulovených ryb při intenzitě h označíme $c(h)$ a náklady na něho označíme $l(h)$. Zisk z rybolovu je tedy roven $c(h) - l(h) - n(K)$.

Maximální udržitelný rybolov má intenzitu $h = \frac{1}{4}rK$. Chceme-li tedy maximalizovat zisk, hledáme maximum funkce

$$f(K) = c\left(\tfrac{1}{4}rK\right) - l\left(\tfrac{1}{4}rK\right) - n(K)$$

za podmínky

$$x_0 \geq \frac{K}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4h}{rK}}\right).$$

To se ovšem snáze řekne, než udělá; funkce c a n totiž nemusí být známy.

Uvedené modely diskutovali Beddington a May v článku

Beddington, J. R., May, R. M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment. *Science.* 1977, vol. 197, p. 463–465.

Přestože se jedná o modely velice jednoduché, přinášejí důležitý vhled do problematiky řízení využívání obnovitelných zdrojů.

6.8 Nerelativistický model nestacionárního Vesmíru

Seriózní modely Vesmíru jako celku jsou konstruovány v rámci obecné teorie relativity, Ovšem již Newtonovy zákony (a tedy středoškolská fyzika) umožňují jistý vhled do vývoje Vesmíru, zejména mohou ukázat význam jeho současné hustoty pro jeho další osud.

Budeme si tedy představovat, že Vesmír je umístěn v klasicky nekonečném euklidovském trojrozměrném prostoru. Vesmír sám nemůže být nekonečný, nemůže tento hypotetický absolutní prostor rovnoměrně vyplnit. To snadno nahlédneme, pokud se za bezoblačné noci a mimo městské osvětlení podíváme na oblohu. Uvidíme tmu a hvězdy. Kdyby byl Vesmír nekonečný, v každém směru by náš pohled nakonec na nějakou hvězdu narazil a noční obloha by celá zářila jako polední slunce. Uvedený argument pro konečnost Vesmíru však není úplně přesvědčivý – mohla by v něm být nějaká mezihvězdná nebo mezigalaktická mračna, která vzdálenější hvězdy zastíní; nebo by světlo mohlo během dlouhé cesty Vesmírem zestárnout a přestat svítit. Avšak dalším argumentem pro konečnost Vesmíru může být existence gravitačního zákona. V nekonečném Vesmíru by se v každém směru nacházelo nekonečné množství hmoty a gravitační působení těchto hmot na jakékoliv těleso by se vzájemně vyrušila. Pokud tedy chceme zůstat v přehledném světě klasické fyziky, tj. ve světě, v němž působí obecné Newtonovy zákony pohybu i zákon gravitační, musí hmotný vesmír (což je z pohledu novověké materialistické přírodovědy celý Vesmír) být konečný, byť se nachází v nekonečném absolutním prostoru.

Z prostorové omezenosti Vesmíru plyne také skutečnost, že nemůže být neproměnný v čase; čas si v souladu s newtonovskou fyzikou představujeme jako rovnoměrně plynoucí nezávisle na jakémkoliv procesu, tedy jako jednorozměrný euklidovský prostor. Konečný Vesmír nemůže mít stále stejnou rozlohu – gravitační síla by totiž každou částici přitahovala do těžiště Vesmíru a ten by se postupně zhroutil a vytvořil nějaké těleso obrovské hustoty. O trvání Vesmíru tato úvaha ještě nic neříká: Vesmír mohl mít počátek a při něm dostat nějaký impuls, který způsobuje jeho neustálé rozpínání až po úplné „vyvanutí"; nebo mohl být na počátku veliký a postupně se smršťuje; žádný počátek ani konec nemusí mít, jen se v průběhu času nějak periodicky nebo neperiodicky mění a podobně. Také proto chceme vývoj Vesmíru nějak modelovat. Modelovaný Vesmír bude homogenní (v každém místě stejný) a izotropní (v každém směru stejný); to celkem dobře odpovídá pozorování na dostatečně velké prostorové škále. K tomu budeme ještě předpokládat, že platí zákon zachování hmoty a přírodní zákony, zejména zákon gravitační, jsou na čase nezávislé, jsou věčné.

Model Vesmíru je tedy postaven na předpokladech:

(i) Vesmír je homogenní koule o poloměru $R > 0$.

(ii) Poloměr Vesmíru se v čase mění, $R = R(t)$. Současný poloměr Vesmíru označíme R_0.

(iii) Vesmír má konstantní hmotnost M; samozřejmě je $M > 0$.

(iv) V celém Vesmíru platí Newtonův gravitační zákon a gravitační konstanta $G > 0$ nezávisí na čase.

Z astronomických pozorování je známo, že se Vesmír rozpíná; čím jsou galaxie od sebe vzdálenější, tím rychleji se od sebe vzdalují. Změnu velikosti Vesmíru, tedy derivaci jeho poloměru $R'(t)$, budeme proto považovat za úměrnou jeho velikosti. Spolu s předpokladem (ii) tak pro poloměr Vesmíru dostáváme počáteční podmínky

$$R(0) = R_0, \quad R'(0) = HR_0, \tag{6.41}$$

kde $H > 0$ je Hubbleova konstanta[2].

Uvažujme částici (galaxii) o hmotnosti μ na „hranici Vesmíru", tj. ve vzdálenosti R od jeho středu. Podle předpokladů (i), (iii) a (iv) na ni působí gravitační síla orientovaná do středu Vesmíru, tedy síla daná vztahem

$$F = -G\frac{M\mu}{R^2},$$

která částici uděluje zrychlení R''. Podle zákona síly je $F = \mu R''$, tedy

$$R'' = -G\frac{M}{R^2}. \tag{6.42}$$

Diferenciální rovnice druhého řádu (6.42) spolu s počátečními podmínkami (6.41) představuje model vývoje velikost Vesmíru.

Označme ϱ_0 současnou hustotu Vesmíru. Podle předpokladu (iii) platí $M = \frac{4}{3}\pi R_0^3\varrho_0$. Dále zavedeme bezrozměrný poloměr Vesmíru r a bezrozměrný čas τ vztahy

$$r = \frac{R}{R_0}, \qquad \tau = Ht. \tag{6.43}$$

[2]Přesněji řečeno, současná hodnota Hubbleovy konstanty; tento parametr by se mohl v průběhu vývoje Vesmíru měnit.

Pak pravá strana rovnice (6.42) je rovna

$$-G\frac{M}{R^2} = -\frac{G}{(R_0 r)^2}\frac{4}{3}\pi R_0^3 \varrho_0 = -\frac{4\pi G R_0 \varrho_0}{3r^2},$$

její levá strana je

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R_0 r\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = R_0 H^2 \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2},$$

takže rovnice (6.42) se transformuje na rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{4\pi G \varrho_0}{3H^2}\frac{1}{r^2}.$$

Rozměr veličiny $\dfrac{H^2}{G}$ v jednotkách SI je $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, což znamená, že tato veličina vyjadřuje hustotu hmotnosti. To nás opravňuje k zavedení *kritické hustoty* vztahem

$$\varrho_{\mathrm{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{6.44}$$

Při tomto označení rovnici (6.42) přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_0}{\varrho_{\mathrm{krit}}}\frac{1}{r^2}. \tag{6.45}$$

Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{R}{R_0}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{HR_0}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

a $\tau = 0$ právě tehdy, když $t = 0$, takže podle druhé rovnosti (6.41) je

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(0) = \frac{1}{HR_0}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{1}{HR_0}HR_0 = 1.$$

Dostáváme tak počáteční podmínky pro funkci r ve tvaru

$$r(0) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(0) = 1. \tag{6.46}$$

Transformace (6.43) a označení (6.44) tedy převádí počáteční úlohu (6.42), (6.41) na úlohu (6.45), (6.46).

Pro zjednodušení zápisu ještě označíme

$$\sigma = \frac{\varrho_0}{\varrho_{\mathrm{krit}}}$$

a rovnici (6.45) přepíšeme ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\sigma}{2r^2}. \tag{6.47}$$

Řešení úlohy (6.47), (6.46)

Explicitní autonomní rovnici druhého řádu (6.47) můžeme podle 2.5.1 převést na implicitní rovnici prvního řádu ve tvaru

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 2\int\left(-\frac{\sigma}{2r^2}\right)\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{r} + const.$$

Z počátečních podmínek (6.46) dále plyne, že

$$1 = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(0)\right)^2 = \frac{\sigma}{r(0)} + const = \sigma + const,$$

tj. že integrační konstanta je rovna $1-\sigma$. Úloha (6.47), (6.46) se tedy transformuje na úlohu

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{\sigma+(1-\sigma)r}{r}, \quad r(0)=1. \tag{6.48}$$

V okolí počáteční hodnoty je derivace funkce r podle druhé rovnosti v (6.46) blízká hodnotě 1, zejména tedy $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} > 0$ a rovnici můžeme vyřešit vzhledem k derivaci. Úlohu (6.47), (6.46) tedy transformujeme na tvar

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{\frac{\sigma+(1-\sigma)r}{r}}, \quad r(0)=1. \tag{6.49}$$

Z první rovnosti a z (6.47) vidíme, že

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} > 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2} < 0$$

pro všechna přípustná r, tj. pro $r>0$ v případě $\sigma \le 1$ a pro $r \in \left(0, \frac{\sigma}{1-\sigma}\right)$ v případě $\sigma > 1$. To znamená, že řešení úlohy (6.49) je rostoucí konkávní funkce. Tento výsledek můžeme interpretovat tak, že poloměr Vesmíru se v průběhu času zvětšuje, Vesmír expanduje, a rychlost expanze se přitom snižuje.

Rovnice v (6.49) je autonomní, řešení úlohy je podle 2.2.2 implicitně dáno rovností

$$\tau = \int_1^r \sqrt{\frac{x}{\sigma+(1-\sigma)x}}\,\mathrm{d}x.$$

Substituce

$$u^2 = \frac{x}{\sigma+(1-\sigma)x}, \quad \text{tj. } x = \frac{\sigma u^2}{1-(1-\sigma)u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\sigma u}{\left(1-(1-\sigma)u^2\right)^2}\mathrm{d}u$$

převede integrál na pravé straně rovnosti na integrál z racionální funkce

$$I(r) = 2\sigma \int_1^{\sqrt{\frac{r}{\sigma+(1-\sigma)r}}} \left(\frac{u}{1-(1-\sigma)u^2}\right)^2 \mathrm{d}u. \tag{6.50}$$

Řešení úlohy (6.47), (6.46) je tedy implicitně dáno rovností

$$\tau = I(r), \tag{6.51}$$

kde výraz $I(r)$ je integrál zavedený rovností (6.50). Nyní musíme rozlišit tři případy podle hodnoty parametru σ, poměru aktuální hustoty Vesmíru k hustotě kritické.

1. $\sigma = 1$, tj. $\varrho_0 = \varrho_{\rm krit}$

V tomto případě se integrál v (6.50) redukuje na tabulkový integrál

$$I(r) = 2\int_1^{\sqrt{r}} u^2 \mathrm{d}u = \tfrac{2}{3}\left(\sqrt{r^3} - 1\right).$$

Po dosazení do rovnosti (6.51) můžeme řešení úlohy (6.47), (6.46) vyjádřit ve tvaru

$$r(\tau) = \sqrt[3]{\left(\tfrac{3}{2}\tau + 1\right)^2}.$$

Tato funkce je definována pro libovolné τ, její první derivace

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}\tau + 1}}$$

je definována pro $\tau > -\frac{2}{3}$. Dále platí

$$\lim_{\tau\to-\frac{2}{3}+} r(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = \infty, \qquad \lim_{\tau\to-\frac{2}{3}+} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \infty, \qquad \lim_{\tau\to\infty} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = 0.$$

Odtud a z obecné úvahy provedené za (6.49) plyne, že úplné řešení úlohy (6.45), (6.46) je definováno na intervalu $(-\frac{2}{3}, \infty)$, funkce r je na tomto intervalu kladná, rostoucí a konkávní. V čase $\tau = -\frac{2}{3}$ má funkce r singularitu (nulovou hodnotu a nekonečnou derivaci) — poloměr Vesmíru byl nulový a rychlost jeho rozpínání nekonečná. Tento čas tedy můžeme považovat za okamžik vzniku Vesmíru, hodnota $\alpha_p = \frac{2}{3}$ vyjadřuje stáří Vesmíru. Stáří Vesmíru můžeme podle druhého z transformačních vztahů (6.43) vyjádřit také v časových jednotkách jako

$$A_p = \frac{\alpha_p}{H} = \frac{2}{3H}.$$

Je-li tedy současná hustota Vesmíru rovna hustotě kritické, pak se Vesmír vyvíjí od počáteční singularity (nulového poloměru) v čase A_p před současností tak, že jeho poloměr roste neomezeně v prostoru i v čase. Rychlost jeho růstu přitom klesá z nekonečna (počáteční exploze, big bang) k nule, tj. v nekonečném čase se rozpínání Vesmíru zastaví. Takový Vesmír se nazývá *parabolický.*

2. $\sigma < 1$, tj. $\varrho_0 < \varrho_{\rm krit}$

V tomto případě je

$$I(r) = \left[\frac{\sigma u}{(1-\sigma)\big(1-(1-\sigma)u^2\big)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(1-\sigma)^3}} \ln\frac{1+\sqrt{1-\sigma}u}{1-\sqrt{1-\sigma}u}\right]_{u=1}^{\sqrt{\frac{r}{\sigma+(1-\sigma)r}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma r + (1-\sigma)r^2} - 1}{1-\sigma} - \frac{1}{2\sqrt{(1-\sigma)^3}} \ln\frac{\left(1-\sqrt{1-\sigma}\right)\left(\sqrt{\sigma+(1-\sigma)r} + \sqrt{(1-\sigma)r}\right)}{\left(1+\sqrt{1-\sigma}\right)\left(\sqrt{\sigma+(1-\sigma)r} - \sqrt{(1-\sigma)r}\right)}$$

a tato funkce je definována pro libovolné $r \geq 0$. Zejména platí

$$I(0) = -\frac{1}{1-\sigma}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\sigma}}\ln\frac{1-\sqrt{1-\sigma}}{1+\sqrt{1-\sigma}}\right).$$

Označme pravou stranu této rovnosti $-\alpha_h$. Pak platí

$$\lim_{\tau\to-\alpha_h+} r(\tau) = 0, \tag{6.52}$$

což znamená, že v čase $-\alpha_h$ měl Vesmír nulový poloměr. Tento čas lze považovat za počátek Vesmíru, takže jeho stáří nyní vyjádříme výrazem

$$A_h = \frac{\alpha_h}{H} = \frac{1}{(1-\sigma)H}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1-\sigma}}\ln\frac{1-\sqrt{1-\sigma}}{1+\sqrt{1-\sigma}}\right).$$

Již víme, že funkce $r = r(\tau)$ je rostoucí a konkávní. Dále je

$$\lim_{r\to\infty} I(r) = \infty$$

a tedy také

$$\lim_{\tau\to\infty} r(\tau) = \infty.$$

Z vyjádření derivace v (6.49), z předchozí rovnosti a z (6.52) dále plyne

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r\to\infty}\sqrt{\frac{\sigma}{r}+1-\sigma} = \sqrt{1-\sigma}, \qquad \lim_{\tau\to-\alpha_h+}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r\to 0+}\sqrt{\frac{\sigma}{r}+1-\sigma} = \infty.$$

Je-li tedy současná hustota Vesmíru menší než hustota kritické, pak se Vesmír opět vyvíjí od počáteční singularity v čase A_n před současností tak, že jeho poloměr roste neomezeně v prostoru i v čase. Rychlost jeho růstu přitom klesá z nekonečné k jisté kladné hodnotě. V tomto případě se tedy rozpínání Vesmíru nezastaví ani v nekonečném čase. Takový Vesmír se nazývá *hyperbolický.*

3. $\sigma > 1$, tj. $\varrho_0 > \varrho_{\mathrm{krit}}$

V tomto případě je

$$I(r) = \left[\frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma-1)^3}}\operatorname{arctg} u\sqrt{\sigma-1} - \frac{\sigma u}{(\sigma-1)\big(1+(\sigma-1)u^2\big)}\right]_{u=1}^{\sqrt{\frac{r}{\sigma-(\sigma-1)r}}} =$$

$$= \frac{1-\sqrt{\sigma r-(\sigma-1)r^2}}{\sigma-1} + \frac{\sigma}{\sqrt{(\sigma-1)^3}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{r(\sigma-1)}\sigma-(\sigma-1)r - \operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}\right).$$

Tato funkce je definována pro $r \in \left[0, \frac{\sigma}{\sigma-1}\right)$. Označme pro stručnost $r_m = \frac{\sigma}{\sigma-1}$. Platí

$$I(0) = \frac{1}{\sigma-1}\left(1 - \frac{\sigma\operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{\sigma-1}}\right) < -\tfrac{2}{3},$$

$$0 < \lim_{r\to r_m-} I(r) = \frac{1}{\sigma-1}\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma-1}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}\right)\right) < \infty;$$

platnost první nerovnosti ověříme tak, že podle de l'Hôpitalova pravidla vypočítáme

$$\lim_{\sigma\to 0+} I(0) = \lim_{\sigma\to 0+} \frac{\sqrt{\sigma-1} - \sigma \operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{(\sigma-1)^3}} = -\tfrac{2}{3}$$

a dále

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} I(0) = \frac{1}{2(\sigma-1)^2}\left((2-\sigma)\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\sigma-1}}{\sqrt{\sigma-1}} - 1\right) < 0$$

pro $\sigma > 0$. Označme dále

$$\alpha_e = -I(0) \quad \text{a} \quad \omega_e = \lim_{r\to r_m-} I(r).$$

Pak je $\alpha_e > 0$, $\omega_e > 0$, $r(-\alpha_e) = 0$, $r(\omega_e) = r_m$ a podle první rovnosti v (6.49) je

$$\lim_{\tau\to-\alpha_e+} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r\to 0-} \sqrt{\frac{\sigma}{r} + 1 - \sigma} = \infty, \qquad \lim_{\tau\to\omega_e-} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = \lim_{r\to r_m-} \sqrt{\frac{\sigma}{r} + 1 - \sigma} = 0.$$

To znamená, že funkce r roste z nulové hodnoty v čase $\tau = -\alpha_e$ ke konečné hodnotě r_m v konečném čase $\tau = \omega_e$ a její derivace přitom klesá z nekonečna k nule. Rovnost (6.51) tedy nepopisuje úplné řešení úlohy (6.47), (6.46) (sr. větu 5 v 3.2).

Řešení úlohy (6.47), (6.46) se $\sigma > 1$ prodloužíme za bod ω_e tak, že budeme řešit rovnici (6.47) s novou počáteční podmínkou

$$t(\omega_e) = r_m, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}(\omega_e) = 0. \tag{6.53}$$

Pro zjednodušení zápisu nejprve posuneme počátek času do bodu ω_e, tj. zavedeme novou nezávisle proměnnou s vztahem $s = \tau - \omega_e$. Pak je

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\sigma}{2r^2}.$$

Úloha (6.47), (6.53) se tedy transformuje na úlohu

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\sigma}{2r^2}, \quad r(0) = r_m, \ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}(0) = 0. \tag{6.54}$$

Uvažujme nyní funkci q nezávisle proměnné s definovanou vztahem $q(s) = r(-s)$. Pak je $q'(s) = -r'(-s)$, $q''(s) = r''(-s)$, takže funkce q splňuje vztahy

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{\sigma}{2q^2}, \quad q(0) = r_m, \ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}(0) = 0.$$

Funkce $q = q(s)$ je řešením stejné počáteční úlohy (6.54) jako funkce $r = r(s)$. Z jednoznačnosti řešení úlohy (6.54) nyní plyne, že $r(s) = q(s) = r(-s)$, tedy že řešení této úlohy je funkce sudá.

Z provedené úvahy můžeme usoudit, že řešení $r = r(\tau)$ úlohy (6.47), (6.46) se $\sigma > 1$ lze prodloužit na interval $[\omega_e, 2\omega_e + \alpha_e)$ a přitom bude platit $r(\omega_e + s) = r(\omega_e - s)$ pro každé $s \in (0, \alpha_e + \omega_e)$, tj. graf funkce r bude symetrický kolem osy $\tau = \omega_e$.

Úplné řešení $r = r(\tau)$ úlohy (6.47), (6.46) se $\sigma > 1$ je tedy definováno na intervalu $(-\alpha_e, 2\omega_e + \alpha_e)$. Přitom

$$r(-\alpha_e) = 0 = r(2\omega_e + \alpha_e), \quad r(\omega_e) = r_m,$$

funkce r je konkávní, rostoucí na intervalu $(-\alpha_e, \omega_e]$ a klesající na intervalu $[\omega_e, 2\omega_e + \alpha_e)$. Dostáváme tak stáří Vesmíru, dobu jeho expanze a dobu jeho existence

$$A_e = \frac{\alpha_e}{H}, \quad \Omega_e = \frac{\omega_e}{H}, \quad \text{a} \quad T_e = \frac{2(\alpha_e + \omega_e)}{H}$$

(v uvedeném pořadí).

Je-li současná hustota Vesmíru větší než hustota kritická, pak vesmír expanduje z počáteční singularity v čase A_e před současností. Jeho expanze se zpomaluje, v jistém okamžiku v budoucnosti se zastaví a vesmír se bude smršťovat až do singularity konečné (big crunch). Doba trvání tohoto procesu je T_e. Takový Vesmír se nazývá *eliptický*.

Počáteční úlohu (6.48) pro implicitní diferenciální rovnici jsme řešili vyřešením rovnice vzhledem k derivaci, tj. převedením implicitní rovnice na explicitní. Alternativně bychom úlohu (6.48) mohli řešit bezprostředně metodou 2.4 pro řešení implicitní rovnice. Řešení bychom pak dostali v parametrickém tvaru.

Povšimněme si, že znalost gravitační konstanty G, současné hodnoty Hubbleovy konstanty H a současné hustoty Vesmíru ϱ_0 umožňuje odhadnout stáří Vesmíru a v případě Vesmíru eliptického i dobu jeho trvání. O velikosti Vesmíru však studovaný model neříká nic; tu lze odhadovat až při použití rovnic obecné relativity.

Skutečnost, že expanzi Vesmíru a Hubbleovu zákonu vzdalování galaxií, obvykle vysvětlovaným na základě Einsteinových rovnic obecné relativity, lze v hlavních rysech porozumět již v rámci Newtonovy teorie gravitace, ukázali angličtí kosmologové Arthur Milne (1896–1950) a William McCrea (1904–1999):

Milne E.A. A Newtonian Expanding Universe. *Quaterly Journal of Mathematics* 1934, vol. 5, p. 64–72.
McCrea W.H., Milne E.A. Newtonian Universes and the Curvature Space. *Quaterly Journal of Mathematics* 1934, vol. 5, p.73–80

Za zmínku stojí také to, že E. A. Milne výrazně preferoval nekonečný vesmír, který dává prostor neomezenému počtu evolučních experimentů, které Bůh (nebo božská bytost) provádí. Tomuto tématu věnoval např. knihu

Milne E.A. *Modern Cosmology and the Christian Idea of God.* Clarendon, Oxford 1952.

Kapitola 7

Makroekonomické modely

7.1 Harrodův-Domarův model ekonomického růstu

Základní ekonomickou veličinou je produkce. Produkovat může subjekt, který vlastní kapitál. Kapitálem jsou nejen peníze, ale především budovy, stroje, zařízení a podobně. Kapitál vzniká a obnovuje se investicemi. Budeme tedy uvažovat tři ekonomické ukazatele, tj. tři časově závislé proměnné – produkci $Y = Y(t)$, kapitál $K = K(t)$ a investice $I = I(t)$. Kdekoliv je vyvíjena jakákoliv ekonomická aktivita, tam je nějaká produkce; proto je veličina Y kladná. A jak již bylo řečeno, z toho, že je produkce plyne, že byl kapitál; tedy i veličina K je kladná.

První model dynamiky produkce sestavíme na základě tří postulátů:

HD1 Kapitál vzniká investicemi a mizí amortizací.

HD2 Do tvorby kapitálu je investován stálý podíl produktu.

HD3 Relativní přírůstek kapitálu se projevuje relativním přírůstkem produkce.

Označme δ podíl kapitálu, který se za jednotku času znehodnotí amortizací, κ čas, za který se z investované částky stane kapitál. Typicky je $\kappa = 1$, neboť investice z jednoho období jsou v následujícím období již kapitálem. S těmito symboly upřesníme postulát **HD1** jako rovnost

$$K(t + \Delta t) = K(t) + \frac{1}{\kappa} I(t)\Delta t - \delta K(t)\Delta(t),$$

neboli

$$\frac{K(t + \Delta t) - K(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\kappa} I(t) - \delta K(t).$$

Budeme dále předpokládat, že čas plyne spojitě a veličina K je diferencovatelná. Pak můžeme limitním přechodem $\Delta t \to 0$ vyjádřit postulát **HD1** ve tvaru diferenciální rovnice

$$K' = \frac{1}{\kappa} I - \delta K. \tag{7.1}$$

Předpoklad **HD2** je vyjádřen rovností

$$I = (1 - s)Y, \tag{7.2}$$

kde $s \in (0, 1)$. Parametr s vyjadřuje podíl produkce, který není investován, tedy je spotřebován nebo uspořen. Z nerovnosti $s < 1$ a kladnosti veličiny Y plyne, že také veličina I je kladná.

Předpoklad **HD3** formálně zapíšeme jako rovnost

$$\frac{K'}{K} = \frac{Y'}{Y}. \tag{7.3}$$

Z této rovnosti plyne

$$0 = \frac{K'}{K} - \frac{Y'}{Y} = \frac{K'Y - KY'}{Y^2}\frac{Y}{K} = \left(\frac{K}{Y}\right)'\frac{Y}{K}.$$

Poněvadž veličiny K a Y jsou kladné, plyne odtud, že $\left(\dfrac{K}{Y}\right)' = 0$ a tedy existuje konstanta $r \in \mathbb{R}$, že

$$\frac{K}{Y} = r, \tag{7.4}$$

neboli

$$K = rY. \tag{7.5}$$

Naopak, z této rovnosti plyne $K' = rY'$ a vydělením této rovnosti rovností (7.5) dostaneme rovnost (7.3). Předpoklad **HD3** lze tedy ekvivalentně vyjádřit rovností (7.3) nebo (7.5).

Z rovností (7.3), (7.1), (7.2) a (7.5) nyní dostaneme

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{(1-s)Y}{K} - \delta = \frac{1-s}{\kappa r} - \delta,$$

tedy

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1-s}{\kappa r} - \delta = const, \tag{7.6}$$

relativní rychlost růstu produkce je za předpokladů **HD1**, **HD2** a **HD3** konstantní. Označme ji g a z rovnice (7.6) dostaneme

$$Y(t) = Y_0 e^{gt},$$

kde $Y_0 = Y(0)$ je počáteční produkce. Znaménko konstanty g určuje, zda produkce roste nebo klesá. Konstanta r je podle (7.4) poměrem produkce a kapitálu, vyjadřuje tedy *kapitálovou náročnost jednotky produkce*. Závěr analýzy modelu nyní můžeme přeformulovat:

$$\begin{aligned}
&\text{je-li } r < \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce roste,}\\
&\text{je-li } r = \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce stagnuje,}\\
&\text{je-li } r > \frac{1-s}{\kappa\delta} \text{ pak produkce klesá.}
\end{aligned}$$

Nebo stručně: je-li kapitálová náročnost jednotky produkce příliš velká, pak produkce nemůže růst.

7.2 Solowův-Swanův neoklasický model růstu

Budeme uvažovat uzavřenou ekonomiku, tj. takovou, že jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce, nikoliv zahraniční obchod. Kromě (agregátní) produkce $Y = Y(t)$, kapitálu $K = K(t)$ a investic $I = I(t)$ do modelu zahrneme i práci $L = L(t)$. Práci pro potřeby modelu stotožníme s vytvářenou hodnotou[1], měříme ji tedy ve stejných jednotkách (penězích) jako veličiny Y, K, nebo I. Práce vždy vytváří hodnotu, proto je veličina L kladná.

Budeme předpokládat, že kapitál a investice splňují postuláty **HD1** a **HD2**, tedy rovnosti (7.1) a (7.2). Dále budeme postulovat:

SS1 Relativní růst (změna) práce je konstantní, odpovídá přirozenému přírůstku (nebo úbytku) obyvatelstva.

SS2 Jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce.

Postulát **SS1** lze zapsat jako rovnost

$$\frac{L'}{L} = \lambda, \tag{7.7}$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta. Postulát **SS2** zapíšeme rovností

$$Y = f(K, L). \tag{7.8}$$

Funkce f se nazývá *(agregátní) produkční funkce.* Poněvadž všechny tři veličiny K, L, Y považujeme za kladné, je

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty).$$

Aby funkce f vystihovala ekonomickou realitu, budeme předpokládat, že vyhovuje třem přirozeným požadavkům

pf1 Malá změna produkčního faktoru vyvolá malou změnu produkce, přitom zvětšení výrobního faktoru nevede ke zmenšení produkce.

pf2 Produkce není závislá na tom, v jakých (peněžních) jednotkách vyjadřujeme produkci a produkční faktory.

pf3 Platí *zákon klesajících výnosů:* dodatečná jednotka produkčního faktoru nevytvoří větší produkt, než jednotka předcházející a mezní produkt při neomezeném růstu produkčního faktoru klesá k nule.

Postulát **pf1** říká, že produkční funkce je spojitá a neklesající v každé své proměnné. Změna jednotky je totéž, co vynásobení proměnné nějakou kladnou konstantou. Postulát **pf2** tedy požaduje, aby pro každé $\alpha > 0$ platilo

$$f(\alpha K, \alpha K) = \alpha Y = \alpha f(K, L), \tag{7.9}$$

tj. produkční funkce je homogenní prvního řádu. Označme na chvíli jednotku kapitálu ΔK. Zákon klesajících výnosů pro kapitál nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$f(K, L) - f(K - \Delta K, L) \geq f(K + \Delta K, L) - f(K, L) \xrightarrow[K \to \infty]{} 0$$

pro libovolnou hodnotu L. Uvedenou nerovnost můžeme také přepsat ve tvaru

$$f(K, L) \geq \frac{1}{2} f(K - \Delta K, L) + \frac{1}{2} f(K + \Delta K, L).$$

[1]Poznamenejme, že hodnota obecně není totéž, co produkce.

Analogicky vyjádříme zákon klesajících výnosů pro práci. Obecně přeformulujeme (zesílíme!) postulát **pf3** výrokem: pro každé $\gamma \in (0,1)$ a všechny $K_1, K_2, L_1, L_2 > 0$ platí

$$f\big(\gamma K_1 + (1-\gamma)K_2, \gamma L_1 + (1-\gamma)L_2\big) \geq \gamma f(K_1, L_1) + (1-\gamma) f(K_2, L_2), \tag{7.10}$$

tj. funkce f je konkávní, a

$$\lim_{K\to\infty} \big(f(K+K_1, L_1) - f(K, L_1)\big) = 0 = \lim_{L\to\infty} \big(f(K, L+L_1) - f(K_1, L)\big). \tag{7.11}$$

Nyní zavedeme novou veličinu k, nazvanou *míra vybavenosti práce kapitálem,* vztahem

$$k = \frac{K}{L}. \tag{7.12}$$

S využitím rovností (7.1), (7.7), (7.2), (7.8) a (7.9) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{k'}{k} &= \frac{L}{K}\left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{L}{K}\frac{K'L - KL'}{L^2} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta - \lambda = \frac{1-s}{\kappa}\frac{Y}{K} - (\delta+\lambda) = \\ &= \frac{1-s}{\kappa}\frac{f(K,L)}{K} - (\delta+\lambda) = \frac{1-s}{\kappa}\frac{L}{K} f\left(\frac{K}{L}, 1\right) - (\delta+\lambda) = \frac{1-s}{\kappa}\frac{f(k,1)}{k} - (\delta+\lambda). \end{aligned}$$

Tímto způsobem dostáváme *základní dynamickou rovnici neoklasického modelu*

$$k' = -(\delta+\lambda)k + \frac{1-s}{\kappa} f(k,1). \tag{7.13}$$

Funkci $f(\,\cdot\,,1) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ nazýváme *produkční funkce v intenzivním tvaru.* Je to spojitá neklesající konkávní funkce, pro kterou podle (7.11) platí

$$\lim_{k\to\infty} \big(f(k+k_1, 1) - f(k,1)\big) = 0$$

pro každé $k_1 > 0$. Z monotonie a nezápornosti funkce $f(\,\cdot\,,1)$ plyne existence limity

$$\lim_{k\to 0+} f(k,1) = f_0 \geq 0.$$

Fázovým prostorem jednorozměrné autonomní rovnice (7.13) je interval $(0,\infty)$. Stacionární bod k^* této rovnice splňuje rovnost

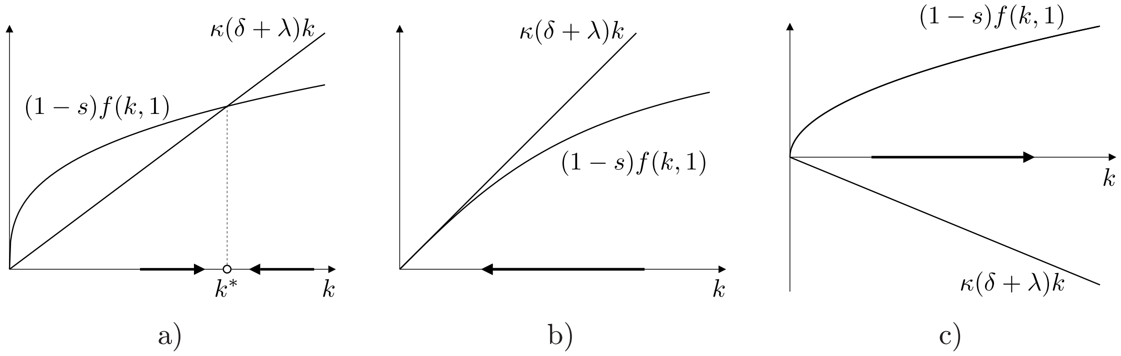
$$\kappa(\delta+\lambda)k^* = (1-s) f(k^*, 1). \tag{7.14}$$

Izolovaný stacionární bod rovnice (7.13) v jejím fázovém prostoru existuje právě tehdy, když $\delta + \lambda > 0$, tj. případný úbytek obyvatelstva (práce) je pomalejší, než amortizace kapitálu, a současně existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$f(k,1) > \kappa \frac{\delta+\lambda}{1-s} k \tag{7.15}$$

pro $k \in (0,\varepsilon)$, viz obr. 7.1. V takovém případě je pravá strana rovnice (7.13) kladná pro $k < k^*$ a záporná pro $k > k^*$. To znamená, že za takové situace pro každé řešení $k = k(t)$ rovnice (7.13) platí

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*,$$



Obrázek 7.1: Řešení rovnice (7.14) pro stacionární bod k^* základní dynamické rovnice neoklasického modelu (7.13). Na vodorovné ose je současně fázový portrét rovnice (7.13). a) $\delta+\lambda>0$ a je splněna podmínka (7.15). b) Není splněna podmínka (7.15). c) Neplatí $\delta+\lambda>0$.

vybavenost práce kapitálem se ustálí na konstantní hodnotě $k^*>0$.

Podle (7.9) platí rovnost

$$f(k,1)=f\left(\frac{K}{L},1\right)=\frac{1}{L}f(K,L)=\frac{Y}{L}.$$

Odtud plyne, že pro kapitálovou náročnost produkce $r=r(t)$ platí

$$r=\frac{Y}{K}=\frac{Y}{L}\frac{L}{K}=\frac{f(k,1)}{k}.$$

Ze spojitosti funkce $f(\,\cdot\,,1)$ nyní plyne, že existuje limita

$$r^*=\lim_{t\to\infty}r(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{K(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f\big(k(t),1\big)}{k(t)}=\frac{f(k^*,1)}{k^*}, \tag{7.16}$$

tj. kapitálová náročnost produkce se ustálí na jisté hodnotě. Porovnáním se vztahem (7.4), který je ekvivalentní s postulátem **HD3** vidíme, že Harrodův-Domarův model je limitním případem modelu Solowova-Swanova. Harrodův-Domarův model popisuje *rovnovážnou ekonomiku,* v níž produkce roste stejně rychle jako kapitál.

Pokud $\delta+\lambda>0$, ale není splněna podmínka (7.15), pak je pravá strana rovnice (7.13) záporná; každé její řešení tedy konverguje k nule. Pokud $\delta+\lambda<0$, pak je pravá strana rovnice (7.13) kladná a každé její řešení diverguje do nekonečna. V obou takových případech ekonomika spěje ke kolapsu – vymizí kapitál nebo práce (tj. veškeré obyvatelstvo bude nezaměstnané). V reálné ekonomice tedy úbytek obyvatelstva nemůže být rychlejší než amortizace kapitálu a mezní produkt malého kapitálu musí být dostatečně velký.

7.2.1 Speciální produkční funkce

Leontiefova produkční funkce

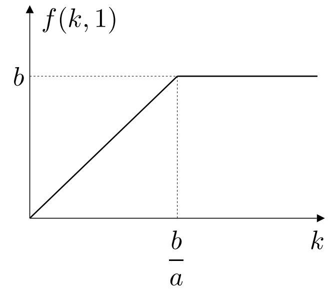
$$f(K,L)=\min\{aK,bL\},$$

kde a, b jsou kladné konstanty, vyjadřuje předpoklad, že kapitál a práce mají na produktu pevný podíl. V případě, že $aK<bL$, tj. je nedostatek kapitálu, k produkci přispívá veškerý

kapitál, ale část práce je neproduktivní. V případě, že $aK > bL$, tj. je nedostatek pracovní síly, zůstává část kapitálu ladem. Pouze v nepravděpodobném případě $aK = bL$ je veškerý kapitál i práce produktivní.

Produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = \min\{ak, b\}.$$



Kladný izolovaný stacionární bod rovnice (7.13) s Leontiefovou produkční funkcí existuje pouze tehdy, když je splněna podmínka (7.15), v tomto případě konkrétně když

$$a > \kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s},$$

tj. podíl kapitálu na produkci je dostatečně velký, kapitál je dostatečně efektivně využíván. Za takové situace je $f(k^*,1) = b$, takže podle (7.14) je

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{L(t)} = k^* = \frac{(1-s)b}{\kappa(\delta+\lambda)}.$$

Odtud a z předchozí nerovnosti dostaneme

$$\lim_{t\to\infty}\frac{aK(t)}{bL(t)} = \frac{a(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)} > 1,$$

což znamená, že ve stabilizované ekonomice je $bL < aK$ a tedy v ní zůstává nevyužitý kapitál. Naopak, pokud by platila opačná nerovnost

$$a < \kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s},$$

ekonomika by konvergovala k nulové vybavenosti práce kapitálem a v důsledku toho k nulové produkci. Ani jeden ze scénářů samozřejmě nepředstavuje žádoucí stav.

Dvakrát diferencovatelná produkční funkce

Produkční funkce $f = f(K,L)$ je podle **pf1** neklesající a podle (7.10) konkávní v obou svých proměnných. U dvakrát diferencovatelné produkční funkce tyto požadavky poněkud zesílíme – budeme předpokládat, že funkce f je v obou svých proměnných rostoucí a ryze konkávní, tj. že pro všechna kladná K, L splňuje nerovnosti

$$\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial K^2}(K,L) < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial L}(K,L) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial L^2}(K,L) < 0. \tag{7.17}$$

Zákon klesajících výnosů ve tvaru

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = 0 = \lim_{L\to\infty}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) \tag{7.18}$$

doplníme předpokladem: pokud se v ekonomice objeví nový produkční faktor, pak jeho mezní výnos je obrovský; přesněji řečeno, budeme předpokládat, že platí

$$\lim_{K\to 0+}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = \infty = \lim_{L\to 0+}\frac{\partial f}{\partial K}(K,L). \tag{7.19}$$

Podmínky (7.18) a (7.19) se nazývají *Inadovy*. Produkční funkce, která má vlastnosti (7.9), (7.17), (7.18) a (7.19) se nazývá *neoklasická*.

Tvrzení: V neoklasické funkci jsou oba produkční faktory podstatné, zmizí-li jeden z nich, zmizí i produkce, tj.

$$\lim_{K\to 0+} f(K,L) = 0 = \lim_{L\to 0+} f(K,L). \tag{7.20}$$

Pokud některý z produkčních faktorů roste neomezeně, pak neomezeně roste i produkce, tj.

$$\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \infty = \lim_{L\to\infty} f(K,L). \tag{7.21}$$

Důkaz: Pro funkci f podle de l'Hospitalova pravidla a podle Inadovy podmínky (7.18) platí

$$\lim_{L\to\infty} \frac{f(K,L)}{L} = \lim_{L\to\infty} \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = 0 \quad \text{pro libovolné } K > 0.$$

Z homogenity funkce f nyní plyne

$$0 = \lim_{L\to\infty} \frac{f(K,L)}{L} = \lim_{L\to\infty} f\left(\frac{K}{L},1\right) = \lim_{k\to 0+} f(k,1)$$

a dále

$$\lim_{K\to 0+} f(K,L) = \lim_{K\to 0+} L\, f\left(\frac{K}{L},1\right) = L \lim_{k\to 0+} f(k,1) = 0,$$

což je první z rovností (7.20).

Z homogenity funkce f, z de l'Hospitalova pravidla a z Inadovy podmínky (7.19) plyne

$$\lim_{K\to\infty} f(K,L) = \lim_{K\to\infty} \frac{f\left(1,\dfrac{L}{K}\right)}{\dfrac{1}{K}} = \lim_{K\to\infty} \frac{-\dfrac{L}{K^2}\, f'_{|2}\left(1,\dfrac{L}{K}\right)}{-\dfrac{1}{K^2}} = L \lim_{l\to 0+} f'_{|2}(1,l) = \infty$$

(symbol $f'_{|2}(x,y)$ označuje parciální derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (x,y)). To je první z rovností (7.21). Platnost druhých rovností (7.20) a (7.21) ukážeme analogicky. $\square$

Z první rovnosti (7.20), de l'Hospitalova pravidla a druhé Inadovy podmínky (7.19) plyne

$$\lim_{k\to 0+} \frac{f(k,1)}{k} = \lim_{k\to 0+} \frac{\partial f(k,1)}{\partial k} = \infty.$$

Z této rovnosti dále plyne, že je splněna podmínka (7.15).

Rovnice (7.13) s neoklasickou produkční funkcí f má jediné kladné stacionární řešení k^*, které je globálně asymptoticky stabilní.

Cobbova-Douglasova produkční funkce

$$f(K,L) = AK^bL^{1-b},$$

kde $A > 0$, $b \in (0,1)$ je neoklasická; o tom se lze přesvědčit snadným přímým výpočtem. Konstanta A vyjadřuje produkci při jednotkovém kapitálu i práci. Z rovnosti

$$Y = AK^bL^{1-b}$$

je vidět, že k danému množství kapitálu K a požadované produkci Y lze určit potřebné množství práce

$$L = \sqrt[1-b]{\frac{Y}{AK^b}},$$

které tuto produkci zajistí. Naopak, k danému množství práce L lze určit množství kapitálu

$$K = \sqrt[b]{\frac{Y}{AL^{1-b}}},$$

které zajistí požadovanou produkci Y. Cobbova-Douglasova produkční funkce tedy vyjadřuje produkci v takové ekonomice, v níž jsou *kapitál a práce neomezeně substituovatelné.*

Cobbova-Douglasova produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = Ak^b,$$

takže základní rovnice neoklasického modelu (7.13) je tvaru

$$k' = -(\delta+\lambda)k + A\frac{1-s}{\kappa}k^b. \tag{7.22}$$

To je rovnice Bernoulliova, kterou podle 2.3.2 řešíme substitucí

$$x = k^{1-b}.$$

Tato substituce převede rovnici (7.22) na lineární nehomogenní rovnici

$$x' = -(1-b)(\delta+\lambda)x + A\frac{(1-s)(1-b)}{\kappa},$$

která má podle 2.3.1 řešení

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}\right)\mathrm{e}^{-(1-b)(\delta+\lambda)t} + \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)},$$

kde x_0 je počáteční hodnota. Poněvadž pro $\delta+\lambda>0$ platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)},$$

dostaneme pro ustálenou hodnotu vybavenosti práce kapitálem vyjádření

$$k^* = \lim_{t\to\infty} k(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt[1-b]{x(t)} = \sqrt[1-b]{\frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}},$$

tedy

$$(k^*)^{1-b} = \frac{A(1-s)}{\kappa(\delta+\lambda)}.$$

Odtud s využitím definice Cobbovy-Douglasovy produkční funkce a porovnáním se vztahem (7.16) dostaneme

$$\frac{\kappa(\delta+\lambda)}{1-s} = \frac{A}{(k^*)^{1-b}} = \frac{A(k^*)^b}{k^*} = \frac{f(k^*,1)}{k^*} = r^*.$$

Poměr produkce a kapitálu v rovnovážné ekonomice s neomezeně substituovatelnou prací a kapitálem je tedy rovna konstantě

$$\kappa\frac{\delta+\lambda}{1-s}.$$

7.3 Goodwinův model hospodářského cyklu

Práce v Solowovu-Swanovu modelu je abstraktní veličina, představuje vlastně hodnotu prací vytvořenou. Nyní budeme jako práci $L = L(t)$ označovat množství zaměstnaného obyvatelstva, které za svou práci dostává mzdu $W = W(t)$. Přesněji řečeno, W označuje nějakou střední hodnotu mzdy jednoho pracovníka. Dále budeme uvažovat množství $N = N(t)$ práceschopného (nebo práceochotného) obyvatelstva. Pro zjednodušení zavedeme ještě veličiny: *produktivita práce*

$$a = \frac{Y}{L} \tag{7.23}$$

(střední množství produktu vytvořeného jedním pracujícím člověkem), *relativní zaměstnanost*

$$v = \frac{L}{N} \tag{7.24}$$

a *podíl mzdy na produkci*

$$u = \frac{W}{a} = \frac{WL}{Y}. \tag{7.25}$$

Ekonomiku budeme považovat za rovnovážnou, tj. budeme předpokládat, že produkce Y, kapitál K a investice I splňují postuláty **HD1** a **HD3** Harrodova-Domarova modelu, tedy rovnost (7.1) a ekvivalentní rovnosti (7.3), (7.4). Dále budeme postulovat:

G1 Veškerá čistá produkce, tj. produkce bez vyplacených mezd, je investována.

G2 Relativní změna počtu obyvatel je konstantní.

G3 Projevuje se stálý technický pokrok, tj. konstantní relativní růst produktivity práce.

G4 Změna mzdové sazby závisí na zaměstnanosti.

Postulát **G1** nahrazuje předpoklad o investování **HD2** z Harrodova-Domarova modelu. Postuláty **G1**, **G2** a **G3** zapíšeme po řadě rovnostmi

$$I = Y - WL, \tag{7.26}$$

$$\frac{N'}{N} = \beta, \tag{7.27}$$

$$\frac{a'}{a} = \alpha, \tag{7.28}$$

kde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ jsou nějaké konstanty. V postulátu **G4** budeme změnu považovat za relativní a postulát zpřesníme vyjádřením

$$\frac{W'}{W} = \varphi(v), \tag{7.29}$$

kde $\varphi : [0,1) \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce, jejímž grafem je *Phillipsova křivka.* Její vlastnosti, které byly zjištěny empiricky, formálně vyjádříme tak, že funkce φ je na svém definičním oboru rostoucí a konvexní, zejména

$$\varphi'(v) > 0 \quad \text{pro } v \in [0,1) \tag{7.30}$$

a splňuje nerovnosti

$$\varphi(0) = \varphi_0 < 0, \tag{7.31}$$

tj. při malé zaměstnanosti (velké nezaměstnanosti) mzdy klesají (je-li práce vzácná, lidé jsou ochotni pracovat za nízkou mzdu),

$$\lim_{v\to 1-} \varphi(v) = \varphi_1 > 0, \tag{7.32}$$

tj. při velké zaměstnanosti mzdy rostou (chceme-li při téměř plné zaměstnanosti získat nového pracovníka, musíme ho přeplatit); přitom připouštíme i $\varphi_1 = \infty$ (to je dokonce obvyklejší předpoklad).

Podle (7.1), (7.26), (7.4) a (7.25) platí

$$\frac{K'}{K} = \frac{1}{\kappa}\frac{I}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{Y - WL}{K} - \delta = \frac{1}{\kappa}\frac{Y}{K}\left(1 - \frac{WL}{Y}\right) - \delta = \frac{r}{\kappa}(1-u) - \delta.$$

Odtud a z rovnosti (7.3) při označení $\sigma = \dfrac{r}{\kappa}$ dostaneme

$$\frac{Y'}{Y} = \sigma(1-u) - \delta. \tag{7.33}$$

Nyní vyjádříme relativní změnu zaměstnanosti pomocí rovností (7.24), (7.23), (7.27), (7.33) a (7.28).

$$\begin{aligned}\frac{v'}{v} = \frac{N}{L}\left(\frac{L}{N}\right)' = \frac{N}{L}\frac{L'N - LN'}{N^2} = \frac{L'}{L} - \frac{N'}{N} = \frac{a}{Y}\left(\frac{Y}{a}\right)' - \beta = \frac{a}{Y}\frac{Y'a - Ya'}{a^2} - \beta = \\ = \frac{Y'}{Y} - \frac{a'}{a} - \beta = \sigma(1-u) - \delta - \alpha - \beta.\end{aligned}$$

Tedy při označení $\gamma = \sigma - \alpha - \beta - \delta$ máme

$$\frac{v'}{v} = -\sigma u + \gamma. \tag{7.34}$$

Relativní změnu podílu mzdy na produkci vyjádříme pomocí rovností (7.25), (7.29) a (7.28).

$$\frac{u'}{u} = \frac{a}{W}\left(\frac{W}{a}\right)' = \frac{a}{W}\frac{W'a - Wa'}{a^2} = \frac{W'}{W} - \frac{a'}{a} = \varphi(v) - \alpha,$$

tj.

$$\frac{u'}{u} = \varphi(v) - \alpha. \tag{7.35}$$

Rovnice (7.35) a (7.34) představují model vývoje podílu mezd na produkci a relativní zaměstnanosti. Můžeme je přepsat v obvyklém tvaru

$$\begin{aligned} u' &= u\big(\varphi(v) - \alpha\big),\\ v' &= v(\gamma - \sigma u);\end{aligned} \tag{7.36}$$

připomeňme, že fázový prostor systému (7.36) je množina $\Omega = [0,\infty) \times [0,1)$ a že parametry α, σ jsou kladné.

Ze druhé rovnice systému (7.36) plyne diferenciální nerovnost $u' \le \gamma v$ a tedy podle srovnávací věty 8 je platí

$$v(t) \le v(0)\mathrm{e}^{\gamma t}.$$

Uvažujme nejprve $\gamma < 0$. Pak

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$

Ze spojitosti funkce φ a podmínky (7.30) odtud plyne, že existuje $t_1 \geq 0$ takové, že $\varphi\big((v(t)\big) \leq 0$ pro $t \geq t_1$. Podle první rovnice systému (7.36) pro $t \geq t_1$ platí $u'(t) \leq -\alpha u(t)$, takže $u(t) \leq u(t_1)\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Proto také

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0.$$

Případ $\gamma < 0$ popisuje ekonomiku, která spěje k podivnému stavu – nikdo nepracuje a na produkci se mzda nepodílí[2].

Dále budeme realističtěji předpokládat, že $\gamma > 0$.

Pokud $\varphi_1 < \alpha$, pak z první rovnice systému (7.36) plyne, že $u' \leq u(\varphi_1 - \alpha)$ a tedy pro všechna $t \geq 0$ je

$$u(t) \leq u(0)\mathrm{e}^{(\varphi_1-\alpha)t}.$$

To znamená, že existuje $t_2 \geq 0$ takové, že

$$u(t) \leq \frac{\gamma}{2\sigma} \quad \text{pro } t \geq t_2.$$

Podle druhé rovnice systému (7.36) pro $t \geq t_2$ platí

$$v'(t) = v(t)\big(\gamma - \sigma u(t)\big) \geq v(t)\left(\gamma - \sigma\frac{\gamma}{2\sigma}\right) = \frac{1}{2}\gamma v(t),$$

takže $v(t) \geq v(t_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\gamma t}$. To znamená, že existuje $T \geq t_2$ takové, že

$$\lim_{t\to T-} v(t) = 1.$$

Podle věty 5 řešení nelze prodloužit za čas T. V případě $\varphi_1 < \alpha$ tedy ekonomika v konečném čase dospěje k plné zaměstnanosti, ale v tom okamžiku přestanou platit „ekonomické zákony“, ze kterých byl Goodwinův model sestaven[3].

Je-li $\varphi_1 > \alpha$ (což je zejména splněno, pokud $\varphi_1 = \infty$), pak existuje $v^* \in (0,1)$ takové, že $\varphi(v^*) = \alpha$, tj. $v^* = \varphi^{-1}(\alpha)$. Systém (7.36) má v tomto případě dva stacionární body

$$(0,0) \quad \text{a} \quad (u^*, v^*) = \left(\frac{\gamma}{\sigma}, \varphi^{-1}(\alpha)\right).$$

Variační matice systému (7.36) je

$$\mathsf{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi(v) - \alpha & u\varphi'(v) \\ -\sigma v & \gamma - \sigma u \end{pmatrix},$$

tedy

$$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 - \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \det \mathsf{J}(0,0) = \gamma(\varphi_0 - \alpha) < 0,$$

[2] To připomíná lidovou charakteristiku reálného socialismu, který fungoval v sedmdesátých a osmdesátých letech dvacátého století v Československé socialistické republice: „Občané předstírají, že pracují, stát předstírá, že platí.“

[3] Ekonomika s plnou zaměstnaností a s malým až zanedbatelným podílem mezd na produkci je snem komunistů — všichni budou pracovat (práce se stane první životní nutností), ale peníze již za komunismu nebudou. Tomuto ideálu se v realitě nejvíce přiblížil Pol Pot.

$$\mathsf{J}(u^*,v^*)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\gamma}{\sigma}\varphi'(v^*)\\ -\sigma v^* & 0\end{pmatrix},\qquad \det\mathsf{J}(u^*,v^*)=\gamma v^*\varphi'(v^*)>0,\quad \operatorname{tr}\mathsf{J}(u^*,v^*)=0.$$

Podle 5.3.1 je triviální stacionární bod $(0,0)$ sedlo. O typu stacionárního bodu (u^*,v^*) nelze podle tohoto kritéria rozhodnout.

Budeme hledat vyjádření trajektorií systému (7.36). Vydělením jeho rovnic dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{v(\gamma-\sigma u)}{u\big(\varphi(v)-\alpha\big)},$$

což je obyčejná rovnice se separovanými proměnnými. Podle 2.2.2 je její řešení implicitně dáno rovností

$$\int\frac{\varphi(v)-\alpha}{v}\mathrm{d}v=\int\frac{\gamma-\sigma u}{u}\mathrm{d}u,$$

po úpravě

$$\sigma u-\ln\left(u^\gamma v^\alpha\right)+\int\limits_{v_0}^{v}\frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x=const;$$

přitom $v_0\in(0,1)$ je nějaká konstanta vyjadřující počáteční zaměstnanost. Levou stranu poslední rovnosti označíme $G(u,v)$. Trajektorie systému (7.36) jsou tedy vrstevnicemi funkce G.

Poněvadž platí

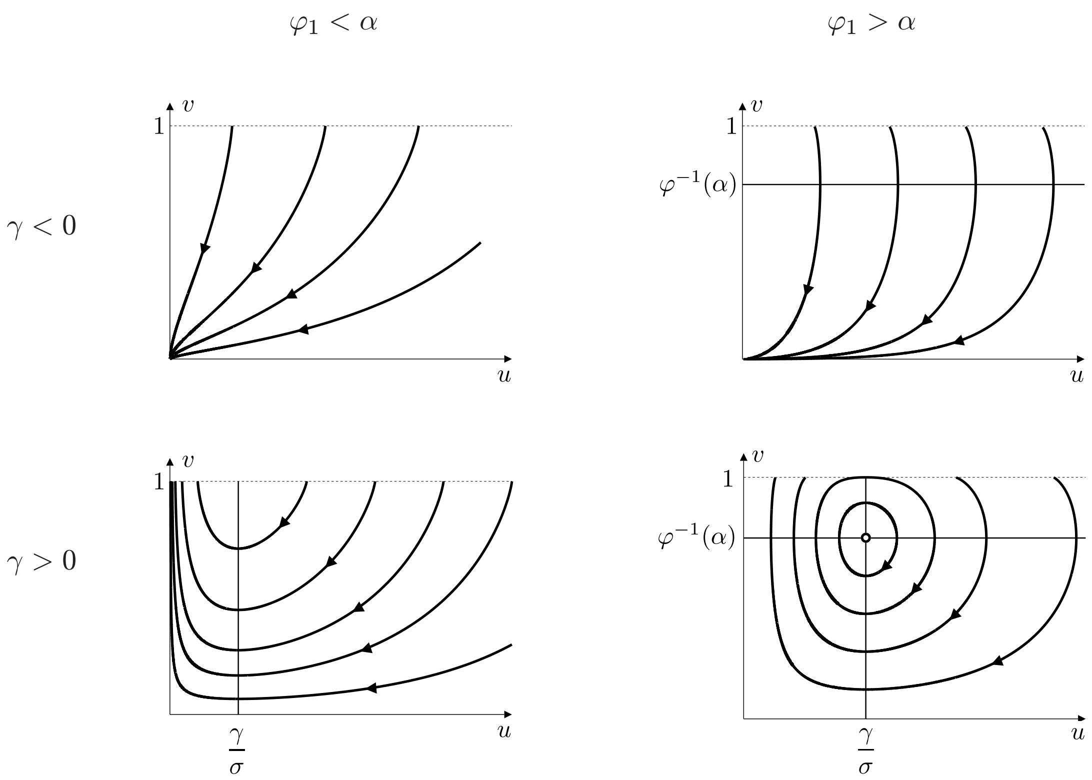
$$\frac{\partial G}{\partial u}=\sigma-\frac{\gamma}{u}=-\frac{\gamma-\sigma u}{u},\qquad \frac{\partial G}{\partial u}(u^*,v^*)=0,$$
$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\varphi(v)}{v}-\frac{\alpha}{v}=\frac{\varphi(v)-\alpha}{v},\qquad \frac{\partial G}{\partial v}(u^*,v^*)=0,$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}=\frac{\gamma}{u^2}>0,\qquad \frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v}=0,$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}=\frac{v\varphi'(v)-\big(\varphi(v)-\alpha\big)}{v^2},\qquad \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(u^*,v^*)=\frac{\varphi'(v^*)}{v^*}>0,$$

je stacionární bod (u^*,v^*) lokálním minimem funkce G, a ta je v nějakém jeho okolí konvexní. To znamená, že trajektorie systému (7.36) začínající v okolí stacionárního bodu (u^*,v^*) jsou uzavřenými křivkami, stacionární bod je střed.

Možné umístění nulklin ve fázovém prostoru spolu s trajektoriemi systému (7.36) je znázorněno na obr. 7.2. Vidíme, že i v případě $\gamma>0$, $\varphi_1>\alpha$ je možné, že vývoj ekonomiky dospěje v konečném čase k plné zaměstnanosti a malému podílu mzdy na produkci, pokud je počáteční stav ekonomiky dostatečně daleko od rovnováhy. Jinak zaměstnanost kolísá kolem jisté rovnovážné hodnoty, v ekonomice se střídají období prosperity a útlumu; Goodwinův model tedy svým způsobem vysvětlil vznik a nevyhnutelnost hospodářského cyklu.

Obecně platí

$$\nabla G(u,v)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\gamma-\sigma u}{u}\\ \dfrac{\varphi(v)-\alpha}{v}\end{pmatrix},\quad \text{tedy}\quad \nabla G(u,v)^T\begin{pmatrix}u\big(\varphi(v)-\alpha\big)\\ v(\gamma-\sigma u)\end{pmatrix}=0,$$



Obrázek 7.2: Trajektorie a nulkliny systému (7.36) pro možné kombinace parametrů

což znamená, že funkce G je prvním integrálem (invariantem) systému (7.36). Dále při označení $x = \ln u$, $y = \ln v$ dostaneme

$$x' = \varphi\left(\mathrm{e}^{y}\right) - \alpha, \qquad y' = \gamma - \sigma \mathrm{e}^{x}. \tag{7.37}$$

Systém (7.36) lze tedy transformovat na systém bipartitní; fázovým prostorem transformovaného systému je množina $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

Pro funkci

$$H(x,y) = G\left(\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{y}\right) = \sigma \mathrm{e}^{x} - \gamma x - \alpha y + \int_{v_0}^{\mathrm{e}^{y}} \frac{\varphi(\eta)}{\eta} \mathrm{d}\eta = \sigma \mathrm{e}^{x} - \gamma x - \alpha y + \int_{\ln v_0}^{y} \varphi(\mathrm{e}^{\xi}) \mathrm{d}\xi$$

(integrál jsme transformovali substitucí $\xi = \ln \eta$) platí

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sigma \mathrm{e}^{x} - \gamma, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\alpha + \varphi\left(\mathrm{e}^{y}\right),$$

takže systém (7.37) můžeme přepsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla H(x,y).$$

Systém (7.37) je tedy hamiltonovský s hamiltoniánem H.

Kapitola 8

Chemická kinetika

8.1 Základní reakce enzymů

Uvažujme reakci nějakého substrátu S a enzymu E, které spolu vytvoří nestabilní komplex SE, z kterého dále vznikne nějaký produkt P a volný enzym.[1] Schematicky tuto reakci můžeme zapsat takto

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE, \qquad SE \overset{k_2}{\to} P + E,$$

nebo stručně

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE \overset{k_2}{\to} P + E.$$

Dvojitá šipka $\rightleftharpoons$ vyjadřuje, že reakce je vratná, jednoduchá šipka $\to$ vyjadřuje, že reakce může probíhat jen jedním směrem. Kladné parametry k_1, k_{-1}, k_2 označují reakční rychlost. Zhruba řečeno, za jednotku času vznikne z jednotkového množství substrátu S za přítomnosti jednotkového množství enzymu E množství k_1 komplexu SE a podobně. Přesně budou reakční rychlosti zavedeny dále.

Označme $s = s(t) \ldots$ koncentrace substrátu S v čase t,
$e = e(t) \ldots$ koncentrace enzymu E v čase t,
$c = c(t) \ldots$ koncentrace komplexu SE v čase t,
$p = p(t) \ldots$ koncentrace produktu P v čase t.

Michaelis a Menten[2] navrhli jako model vývoje koncentrací v čase následující systém čtyř obyčejných nelineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -k_1 se + k_{-1}c,\\
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= -k_1 se + (k_{-1} + k_2)c,\\
\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} &= k_1 se - (k_{-1} + k_2)c,\\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= k_2 c
\end{aligned} \tag{8.1}$$

[1] Místo o enzymu bychom mohli mluvit o katalyzátoru, substrát by představoval výchozí látku a produkt výslednou.

[2] L. Michaelis, M. I. Menten. Die Kinetik der Invertinwirkung. *Biochem. Z.* **49**, 333-369, 1913

Tento model vyjadřuje, že změny koncentrací považujeme za přímo úměrné koncentracím, reakční rychlosti k jsou příslušné koeficienty úměrnosti. Budeme předpokládat, že na počátku je koncentrace substrátu rovna s_0 a koncentrace enzymu je rovna e_0, komplex SE ani produkt P nejsou na počátku přítomny. Spolu se systémem (8.1) tedy uvažujeme počáteční podmínky

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0. \tag{8.2}$$

Nejprve si všimněme, že veličina p se nevyskytuje v prvních třech rovnicích systému (8.1). Koncentrace s, e a c jsou tedy řešením prvních tří rovnic z (8.1), koncentraci produktu můžeme vyjádřit ze čtvrté rovnice integrací

$$p(t) = k_2 \int_0^t c(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{8.3}$$

Množství enzymu E se v průběhu reakce nemění a enzym se vyskytuje jednak jako volný a jednak jako vázaný v komplexu SE. To vzhledem k počáteční podmínce (8.2) znamená, že by mělo platit $e(t) + c(t) = e_0$ pro všechna $t \geq 0$. Model (8.1) je skutečně v tomto smyslu adekvátní, neboť

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e + c) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0, \quad (e + c)(0) = e_0.$$

Veličina $e+c$ je prvním integrálem systému (8.1) a proto koncentraci enzymu můžeme vyjádřit jako

$$e(t) = e_0 - c(t) \tag{8.4}$$

a dosadit do první a třetí rovnice systému (8.1). Dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c, \qquad \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c. \tag{8.5}$$

Časový průběh koncentrací substrátu S a komplexu SE je tedy řešením systému dvou obyčejných autonomních nelineárních diferenciálních rovnic (8.5) s počáteční podmínkou

$$s(0) = s_0, \quad c(0) = 0, \tag{8.6}$$

průběh koncentrací volného enzymu E a produktu P je dána výrazy (8.4) a (8.3).

Změníme měřítko tak, aby všechny veličiny byly bezrozměrné, tj. zavedeme substituci

$$\tau = k_1 e_0 t, \qquad x = \frac{s}{s_0}, \qquad y = \frac{c}{e_0}; \tag{8.7}$$

veličina x vyjadřuje koncentraci substrátu a veličina y koncentraci komplexu SE v jednotkách počáteční koncentrace substrátu a enzymu. Časová jednotka je určena rychlostí reakce substrátu a enzymu. Platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{s}{s_0}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{s_0}\big(- k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c\big)\frac{1}{k_1 e_0} = -\frac{s}{s_0} + \frac{c}{e_0}\frac{s}{s_0} + \frac{k_{-1}}{s_0 k_1}\frac{c}{e_0} = \\ = -x + \left(x + \frac{k_{-1}}{k_1 s_0}\right) y,\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{c}{e_0}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{e_0}\big(k_1e_0s - (k_1s + k_{-1} + k_2)c\big)\frac{1}{k_1e_0} = \frac{s}{e_0} - \frac{s}{e_0}\frac{c}{e_0} - \frac{k_{-1}+k_2}{k_1e_0}\frac{c}{e_0} =$$
$$= \frac{s_0}{e_0}x - \frac{s_0}{e_0}\left(x + \frac{k_{-1}+k_2}{k_1s_0}\right)y.$$

Při označení

$$K = \frac{k_{-1}+k_2}{k_1s_0}, \qquad \lambda = \frac{k_2}{k_1s_0}, \qquad \varepsilon = \frac{e_0}{s_0} \tag{8.8}$$

se systém (8.5) substitucí (8.7) transformuje na systém

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -x + (x + K - \lambda)y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\big(x - (x+K)y\big) \tag{8.9}$$

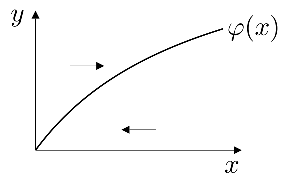
s počátečními podmínkami

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \tag{8.10}$$

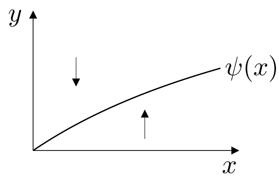
Poznamenejme, že parametry K, λ a ε jsou kladné a $K > \lambda$.

Úlohu (8.9), (8.10) nelze řešit explicitně. Proto ji budeme analyzovat ve fázovém prostoru. Nulklinu proměnné x můžeme vyjádřit jako graf funkce

$$\varphi(x) = \frac{x}{x + K - \lambda}.$$



Derivace $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$ je pro $y > \varphi(x)$ kladná, pro $y < \varphi(x)$ záporná. Situace je znázorněna na obrázku:



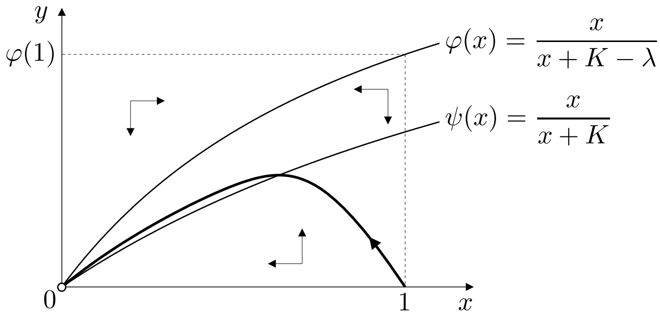
Podobně vyjádříme y-nulklinu jako graf funkce $\psi(x) = \dfrac{x}{x+K}$ a vyšetříme znaménka derivací:

Poněvadž $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ a $\varphi(x) > \psi(x)$ pro všechna $x > 0$, vypadá fázový portrét systému (8.9) tak, jak je znázorněno na obr. 8.1 Vidíme, že systém (8.9) má jediný stacionární bod $(0,0)$ a že množina $M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \varphi(1)\big\}$ je jeho pozitivně invariantní množinou (na úsečce $\{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$ směřují trajektorie nahoru, na úsečce $\big\{\big(x,\varphi(1)\big) : 0 \le x \le 1\big\}$ dolů, na úsečce $\{(0,y) : 0 \le v \le \varphi(1)\}$ směřují trajektorie doprava a na úsečce $\{(1,y) : 0 \le v \le \varphi(1)\}$ doleva). Variační matice systému (8.9) v obecném bodě (x,y) je

$$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} y-1 & x+K-\lambda \\ \frac{1}{\varepsilon}(1-y) & -\frac{1}{\varepsilon}(x+K) \end{pmatrix},$$

takže ve stacionárním bodě $(0,0)$ platí

$$\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & K-\lambda \\ \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{K}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{tr}\mathsf{J}(0,0) = -\frac{K+\varepsilon}{\varepsilon} < 0, \qquad \det\mathsf{J}(0,0) = \frac{\lambda}{\varepsilon} > 0,$$



Obrázek 8.1: Fázový portrét systému (8.9) a jeho trajektorie s počátečním bodem (8.9) a hodnotou parametru $\varepsilon = \frac{10}{11}$.

$$\left(\operatorname{tr} \mathsf{J}(0,0)\right)^2 - 4 \det \mathsf{J}(0,0) = \left(\frac{K+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{4\lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left((K+\varepsilon)^2 - 4\lambda\varepsilon\right) =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(K^2 + 2K\varepsilon + \varepsilon^2 - 4\lambda\varepsilon + \lambda^2 - \lambda^2\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(K^2 - \lambda^2 + 2K\varepsilon + (\lambda - \varepsilon)^2\right) > 0,$$

neboť $K > \lambda$. Stacionární bod $(0,0)$ je podle 5.3.1 stabilní uzel (což bylo vidět z fázového portrétu i bez výpočtů). Pro řešení úlohy (8.9), (8.10) tedy platí

$$\lim_{\tau\to\infty} x(\tau) = 0, \qquad \lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = 0.$$

Výsledkem reakce je vyčerpání veškerého substrátu S, nebude volný ani vázaný s enzymem v komplexu SE. Z trajektorie řešení úlohy (8.9), (8.10), která je rovněž zobrazena na obr. 8.1, je také vidět, že složka x řešení této úlohy k nule monotonně klesá. Složka y nejdříve roste, v jistém čase τ_0 dosáhne svého maxima

$$y_{\max} = \frac{x(\tau_0)}{x(\tau_0) + K} = 1 - \frac{K}{x(\tau_0) + K}$$

a pak monotonně klesá k nule.

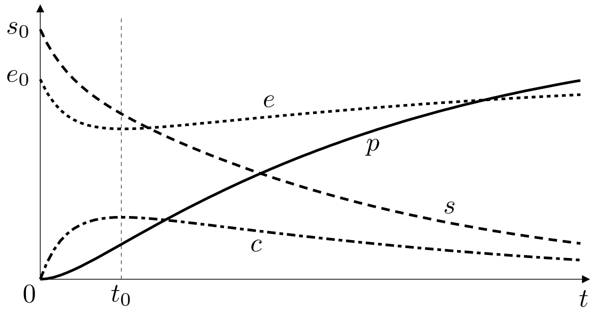
Nyní můžeme kvalitativně popsat řešení původní úlohy (8.1), (8.2), viz obr. 8.2. Koncentrace s substrátu S monotonně klesá k nule. Koncentrace c komplexu SE roste ke své maximální hodnotě, která je menší než byla počáteční koncentrace e_0 enzymu E, a pak monotonně klesá k nule. Koncentrace e volného enzymu E nejprve klesá, v okamžiku t_0, kdy je koncentrace komplexu SE maximální, dosáhne svého minima a pak monotonně roste k počáteční hodnotě e_0. Koncentrace p produktu P roste z nulové hodnoty, růst se nejprve zrychluje (funkce je konvexní), od okamžiku t_0 se začne zpomalovat (funkce je konkávní).

8.2 Přibližné řešení transformované úlohy

Charakteristickým rysem reakcí enzymu se substrátem je to, že koncentrace enzymu je výrazně menší, než koncentrace substrátu, $e_0 \ll s_0$. To vzhledem k (8.8) znamená, že

$$0 < \varepsilon \ll 1,$$

parametr ε je „skoro nula“. Také můžeme říci, že pravá strana druhé rovnice systému (8.9) je „skoro nekonečno“, nebo že pravá strana první rovnice tohoto systému je zanedbatelně malá



Obrázek 8.2: Průběh řešení úlohy (8.1), (8.2)

ve srovnání s pravou stranou druhé rovnice. Veličina x se mění „nesrovnatelně pomaleji", než veličina y, takže veličina x je vzhledem k y „skoro konstantní". Z těchto důvodů budeme x ve druhé z rovnic systému (8.9) považovat za konstantní parametr a tuto rovnici vyřešíme. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, takže její řešení splňující druhou podmínku z dvojice (8.10), tj. podmínku $y(0) = 0$, dostaneme ve tvaru

$$y(\tau) = \frac{x}{x+K}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x+K}{\varepsilon}\tau}\right). \tag{8.11}$$

Platí pro ně

$$y_0 = \lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = \frac{x}{x+K}.$$

„Rychle se měnící" proměnná veličina (funkce) y se tedy „velice rychle" ustálí na hodnotě y_0. Ovšem hodnota x se také mění, i když „pomalu". Tato změna je popsána první rovnicí systému (8.9). V ní můžeme proměnou y považovat za parametr rovný ustálené hodnotě y_0. S využitím počáteční podmínky (8.10) tak dostaneme počáteční úlohu

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -x + (x+K-\lambda)\frac{x}{x+K} = -\lambda\frac{x}{x+K}, \qquad x(0) = 1.$$

Řešení této úlohy, které je „trochu jiné" než řešení původní úlohy (8.9), (8.10) a proto ho označíme symbolem x_0, je implicitně dáno rovností

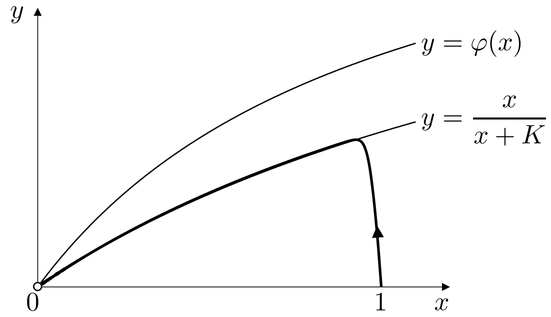
$$x_0(\tau) + K\ln x_0(\tau) = 1 - \lambda\tau. \tag{8.12}$$

Takto definovanou funkci x_0 můžeme považovat za první složku přibližného řešení úlohy (8.9), (8.10). Její druhou složku vyjádříme jako

$$y_0(\tau) = \frac{x_0(\tau)}{x_0(\tau)+K}; \tag{8.13}$$

tato funkce však nesplňuje druhou z počátečních podmínek (8.10).

Funkce $x_0(\,\cdot\,)$, $y_0(\,\cdot\,)$ definované vztahy (8.12) a (8.13) se nazývá *pseudo-* nebo *quasi-stacionární aproximace řešení* úlohy (8.9), (8.10). V mnoha aplikacích je tato aproximace dostatečně přesná. Na obrázku 8.3 je trajektorie řešení úlohy (8.9), (8.10) s hodnotou parametru $\varepsilon = \frac{1}{10}$; vidíme, že trajektorie řešení s „malou" hodnotou parametru ε skutečně od jistého bodu téměř splývá s y-nulklinou, tj. s funkcí $y = \dfrac{x}{x+K}$.



Obrázek 8.3: Nulkliny systému (8.9) a jeho trajektorie s počáteční podmínkou (8.10) a hodnotou parametru $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Řešení úlohy (8.9), (8.10) si tedy lze představit tak, že v „kratičkém časovém intervalu“ od začátku reakce se veličina x (relativní množství substrátu) „nestačí změnit“, takže má stále počáteční hodnotu 1. V tomto „kratičkém čase“ veličina y (relativní množství komplexu SE vzhledem k množství enzymu) rychle dosáhne své quasi-stacionární hodnoty. Tento „rychlý nárůst“ je popsán rovností (8.11) do níž je dosazeno $x = 1$, quasi-stacionární hodnota je tedy $1/(1+K)$. Dále se veličiny x a y vyvíjejí tak, jak je popsáno rovnostmi (8.12) a (8.13).

Ještě můžeme specifikovat délku zmíněného „kratičkého časového intervalu“ pro dosažení quasi-stacionárního stavu. Předpokládejme, že jsme schopni měřit koncentrace s relativní přesností γ. Pak čas δ, za nějž veličina y naroste do quasi-stacionární hodnoty $1/(1+K)$ je přibližně dána přibližnou rovnicí

$$\frac{1}{1+K}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1+K}{\varepsilon}\delta}\right) \approx (1-\gamma)\frac{1}{1+K},$$

tedy

$$\delta \approx \frac{\varepsilon}{1+K}\ln\frac{1}{\gamma}. \tag{8.14}$$

Popsanou aproximaci řešení lze získat i jiným způsobem méně se odvolávajícím na intuici: řešení úlohy (8.9), (8.10) budeme hledat ve tvaru Taylorových řad v proměnné ε. Předpokládejme tedy, že řešení úlohy (8.9), (8.10) je tvaru

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau), \qquad y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(\tau).$$

Za předpokladu, že tyto řady, chápané jako řady funkcí proměnné τ, konvergují stejnoměrně (k tomu při $\varepsilon < 1$ stačí, aby všechny funkce $x_0(\,\cdot\,)$, $y_0(\,\cdot\,)$ byly ohraničené stejnou konstantou), platí

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}\tau}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}\tau}, \quad \text{tj. } \varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}\tau}$$

a současně

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -x + (x + K - \lambda)y = -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau) + K - \lambda\right) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(\tau) = \\
= -\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(\tau) + (K - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(\tau) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right) \varepsilon^n = \\
= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x_n + (K - \lambda) y_n + \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right) \varepsilon^n = \\
= -x_0 + (x_0 + K - \lambda) y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-x_n + (K - \lambda) y_n + \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right) \varepsilon^n,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = x - (x + K)y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_n - K y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right) \varepsilon^n = \\
= x_0 - (x_0 + K) y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x_n - K y_n - \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right) \varepsilon^n.
\end{aligned}
$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin ε získáme nekonečný systém rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}\tau} &= -x_0 + (x_0 + K - \lambda) y_0, & 0 &= x_0 - (x_0 + K) y_0, \\
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\tau} &= -x_1 + (K - \lambda) y_1 + x_0 y_1 + x_1 y_0, & \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}\tau} &= x_1 - K y_1 - x_0 y_1 - x_1 y_0, \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
$$

Z první dvojice rovnic dostaneme

$$
y_0(\tau) = \frac{x_0(\tau)}{x_0(\tau) + K}, \qquad x_0(\tau) + K \ln x_0(\tau) = C - \lambda\tau,
$$

tedy quasi-stacionární aproximaci řešení (8.12), (8.13). V tomto případě však tato aproximace závisí na jedné integrační konstantě C a ta závisí na počátečních podmínkách. Počáteční podmínky (8.10) lze zapsat ve tvaru

$$
1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n(0), \qquad 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(0),
$$

takže z věty o jednoznačnosti Taylorových řad plyne

$$
x_0(0) = 1, \quad y_0(0) = 0, \quad x_n(0) = y_n(0) = 0 \text{ pro } n = 1, 2, \ldots
$$

První z těchto podmínek lze splnit volbou $C = 1$ stejně jako v (8.12), ale druhou z nich splnit nelze. Odtud plyne, že alespoň jedna ze složek x, y řešení úlohy (8.9), (8.10) nemůže být analytickou funkcí parametru ε.

Aby bylo možné splnit počáteční podmínky, je třeba v pravém okolí bodu $\tau = 0$ hledat řešení úlohy (8.9), (8.10) jiným způsobem. Zavedeme novou nezávisle proměnnou

$$\sigma = \frac{\tau}{\varepsilon}. \tag{8.15}$$

Pro $\varepsilon \to 0$ je $\sigma \to \infty$, takže změnou časového měřítka (8.15) „natáhneme malé okolí“ $[0, \delta)$ na „velice dlouhou dobu“. Substitucí (8.15) se úloha (8.9), (8.10) transformuje na úlohu

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma} = -\varepsilon X + \varepsilon(X + K - \lambda)Y, \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\sigma} = X - (X + K)Y, \tag{8.16}$$

$$X(0) = 1, \qquad Y(0) = 0. \tag{8.17}$$

Kvalitativní analýza úlohy (8.16), (8.10) dá stejné výsledky jako v 8.1.

Řešení úlohy (8.16), (8.17) budeme opět hledat ve tvaru Taylorových řad v proměnné ε, tj. ve tvaru

$$X(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n X_n(\sigma), \qquad Y(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Y_n(\sigma).$$

Pak je

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}X_0}{\mathrm{d}\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}X_n}{\mathrm{d}\sigma}, \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}Y_0}{\mathrm{d}\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}\sigma}$$

a současně

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-X_{n-1} + (K - \lambda)Y_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} X_i Y_{n-i-1} \right) \varepsilon^n,$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\sigma} = X_0 - (X_0 + K)Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n - KY_n - \sum_{i=0}^{n} X_i Y_{n-i} \right) \varepsilon^n.$$

Z počátečních podmínek (8.17) dostaneme

$$X_0(0) = 1, \quad Y_0(0) = 0, \qquad X_n(0) = Y_n(0) = 0 \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

Nulté aproximace X_0, Y_0 řešení úlohy (8.16), (8.10) jsou řešením počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}X_0}{\mathrm{d}\sigma} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}Y_0}{\mathrm{d}\sigma} = X_0 - (X_0 + K)Y_0, \qquad X_0(0) = 1, \qquad Y_0(0) = 0,$$

takže

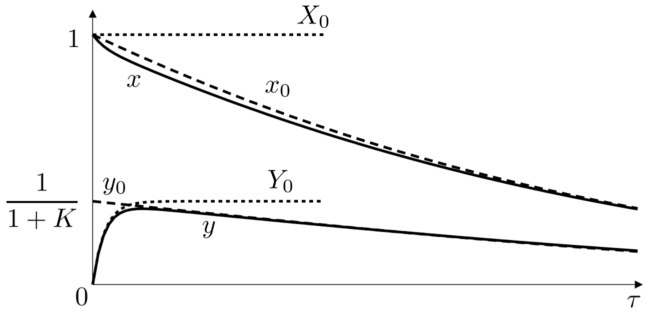
$$X_0(\sigma) = 1, \qquad Y_0(\sigma) = \frac{1}{K + 1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(K+1)\sigma}\right).$$

Vrátíme se k původní nezávisle proměnné $\tau = \varepsilon\sigma$ a dostaneme novou aproximaci řešení úlohy (8.9), (8.10) ve tvaru

$$X_0(\tau) = 1, \qquad Y_0(\tau) = \frac{1}{K + 1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{K+1}{\varepsilon}\tau}\right); \tag{8.18}$$

tyto funkce splňují počáteční podmínky (8.10).

Řešení úlohy (8.9), (8.10) lze v okolí bodu $\tau = 0$, tj. na intervalu $[0, \delta)$ pro vhodné malé kladné číslo δ, aproximovat funkcemi (8.18). Tato část řešení úlohy se nazývá *singulární* nebo



Obrázek 8.4: Řešení úlohy (8.9), (8.10) s parametrem $\varepsilon = 0.2$. Plná čára — přesné řešení, čárkovaná čára — vnější řešení, tečkovaná čára — vnitřní řešení.

vnitřní řešení. Na intervalu (δ, ∞) lze použít quasi-stacionární aproximaci (8.12), (8.13); tato část řešení úlohy se nazývá *nesingulární* nebo *vnější řešení.*

No obr. 8.4 je znázorněno přibližné a přesné řešení úlohy (8.9), (8.10) s parametrem $\varepsilon = 0.2$; vidíme, že již v tomto případě je přibližné řešení dosti blízké přesnému. Navíc, první složka řešení, tj. funkce x, je i v pravém okolí nuly přesněji aproximována vnějším řešením než vitřním.

Ještě odhadneme parametr δ — časový okamžik, od něhož vnější řešení lépe než vnitřní aproximuje druhou složku řešení úlohy (8.9), (8.10). Je to taková hodnota nezávisle proměnné, v níž mají funkce y_0 a Y_0 stejnou hodnotu, $y_0(\delta) = Y_0(\delta)$. Takové číslo δ existuje podle Bolzanovy věty, neboť

$$y_0(0) - Y_0(0) = \frac{1}{1+K} > 0, \qquad \lim_{\delta\to\infty} \big(y_0(\delta) - Y_0(\delta)\big) = -\frac{1}{K+1} < 0.$$

Můžeme tedy řešit soustavu rovnic

$$\frac{1}{K+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{K+1}{\varepsilon}\delta}\right) = \frac{\xi}{\xi + K}, \qquad \xi + K \ln \xi = 1 - \lambda\delta.$$

Vyjádřit řešení explicitně pomocí elementárních funkcí nelze, proto řešení odhadneme. Označme na chvíli $F(\xi) = \xi + K \ln \xi - 1 + \lambda\delta$. Pak je

$$F(1) = \lambda\delta > 0, \quad \lim_{\xi\to 0+} F(\xi) = -\infty < 0, \quad F'(\xi) = 1 + \frac{K}{\xi} \text{ pro } \xi > 0.$$

To znamená, že řešení druhé z rovnic, tj. rovnice $F(\xi) = 0$, leží v intervalu $(0, 1)$ a funkce F je na tomto intervalu rostoucí. Odtud dále plyne, že existuje konstanta $\tilde{\xi} \in (0, 1)$ taková, že pro řešení ξ druhé z rovnic platí

$$0 < \xi \leq \tilde{\xi} < 1.$$

Z první rovnice nyní dostaneme

$$0 < \delta = \frac{\varepsilon}{K+1} \ln \frac{\xi + K}{K(1-\xi)} \leq \frac{\varepsilon}{K+1} \ln \frac{\tilde{\xi} + K}{K(1-\tilde{\xi})}.$$

Tato nerovnost vyjadřuje, že hodnota δ je malá stejného řádu, jako ε, tj. $\delta = O(\varepsilon)$. Tento odhad souhlasí s vyjádření. (8.14).

Řešení původní úlohy (8.5), (8.6) můžeme nyní zapsat ve tvaru

$$s(t) = s_0 x_0(k_1 e_0 t) + O\left(\frac{e_0}{s_0}\right),$$

$$c(t) = \begin{cases} \dfrac{k_1 s_0 e_0}{k_1 s_0 + k_{-1} + k_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1 s_0 + k_{-1} + k_2)t}\right) + O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right), & 0 \leq t \leq O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right), \\ \dfrac{k_1 s_0 x_0(k_1 e_0 t)}{k_1 s_0 x_0(k_1 e_0 t) + k_{-1} + k_2} + O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right), & t \geq O\left(\dfrac{e_0}{s_0}\right); \end{cases}$$

přitom funkce $x_0(\,\cdot\,)$ je implicitně dána rovnicí (8.12).

Kapitola 9

Model populace produkující škodlivé odpady

Označme $N = N(t)$ velikost nějaké populace v čase t. *Specifická míra růstu* nebo *růstový koeficient* p této populace je definován jako relativní změna velikosti populace, tj.

$$p = \frac{N'}{N}.$$

Vývoj populace je tedy modelován diferenciální rovnicí

$$N' = pN. \tag{9.1}$$

V případě konstantního růstového koeficientu dostaneme klasický Malthusův[1] model růstu populace $N(t) = N_0 e^{pt}$, kde $N_0 = N(0)$ je počáteční velikost populace. V něm je exponenciální růst (pro $p > 0$) nebo úbytek (pro $p < 0$) velikosti populace nerealistický.

Model (9.1) se přiblíží realitě, pokud specifickou míru růstu p nebudeme považovat za nezávislou konstantu populace, ale za veličinu závislou na její velikosti, tedy $p = p(N)$, nebo obecněji na nějakých „projevech“ její velikosti, tj. $p = p\big(\mathcal{F}(N)\big)$, kde $\mathcal{F}$ je nějaký funkcionál, tedy zobrazení z množiny funkcí do množiny reálných čísel.

V tomto oddílu budeme uvažovat populaci, která produkuje odpady svého metabolismu, které jsou toxické, nebo přinejmenším zmenšují schopnost přežívání populace. Tyto odpady se v prostředí hromadí, ale také rozkládají, mizí nebo přeměňují v něco, co populaci neomezuje. Budeme tedy předpokládat:

1. V čistém prostředí (bez uvažovaných odpadů) je specifická míra růstu rovna nějaké konstantě r (*vnitřnímu koeficientu růstu, intrinsic growth rate*).

2. V každém okamžiku populace produkuje odpad, jehož množství je úměrné velikosti populace. Množství odpadu vyprodukovaného v čase t označíme $P_p(t)$; platí pro něho $P_p(t) = cN(t)$, kde c je nějaká kladná konstanta.

3. Odpad se rozkládá konstantní relativní rychlostí $\delta > 0$, tj. označíme-li $P(t)$ množství odpadu v čase t a neuvažujeme jeho produkci, platí

$$P'(t) = -\delta P(t). \tag{9.2}$$

[1] Správněji malthusovský, Thomas Robert Malthus (1766–1834) model v takovém tvaru nikdy nepublikoval.

4. Specifická míra růstu populace klesá s rostoucím množstvím odpadu. Budeme uvažovat nejjednodušší možnost, že tato závislost je lineární.

5. Existuje jistá velikost populace $K > 0$, při které je populace se svým prostředím v dynamické rovnováze, její velikost se v čase nemění. Konstanta K představuje *kapacitu prostředí* (*úživnost*) pro uvažovanou populaci.

Uvažujme na chvíli idealizovanou situaci, že pouze v čase s vzniklo množství $P_p(s)$ odpadu a žádný další odpad není do prostředí dodáván. Množství odpadu v čase $t > s$ tedy bude podle předpokladů 2. a 3. řešením rovnice (9.2) s počáteční podmínkou $P(s) = P_p(s) = cN(s)$, tj. $P(t) = cN(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}$. V reálné situaci se však odpad v prostředí kumuluje, v čase t ho tedy bude množství, které zůstalo ze všech odpadů vzniklých až do okamžiku t, tj. množství odpadu závislé na celé předchozí historii velikosti populace bude

$$\mathcal{F}(N) = \int_{-\infty}^{t} cN(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s.$$

Předpoklad 4. lze nyní přepsat ve tvaru

$$p = p\big(\mathcal{F}(N)\big) = \alpha - \beta\mathcal{F}(N),$$

kde $\beta > 0$. Z předpokladu 1. plyne, že $p(0) = r$, tj. $\alpha = r$. Pro funkci $\tilde{N} = \tilde{N}(t) \equiv K$ podle předpokladu 5. nyní platí

$$0 = p\big(\mathcal{F}(\tilde{N})\big) = r - \beta\mathcal{F}(\tilde{N}) = r - \beta c\int_{-\infty}^{t} K\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s = r - \frac{\beta cK}{\delta}\left[\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\right]_{s=-\infty}^{t} = r - \frac{\beta cK}{\delta}.$$

Odtud dostaneme, že $\beta c = \dfrac{r\delta}{K}$ a specifická míra růstu populace je

$$p = r\left(1 - \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{t} N(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s\right).$$

Model (9.1) je tedy nyní ve tvaru integrodiferenciální[2] rovnice

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{t} N(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s\right). \tag{9.3}$$

Zavedeme nové neznámé funkce x a y novou nezávisle proměnnou τ následujícími vztahy:

$$\tau = rt, \quad x(\tau) = \frac{\delta}{rK}N\left(\frac{\tau}{r}\right), \quad y(\tau) = \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s.$$

[2] V této rovnici vystupuje neznámá funkce N za znakem integrálu i jako derivovaná.

Pak

$$x'(\tau)=\frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\delta}{rK}N'\left(\frac{\tau}{r}\right)\frac{1}{r}=\frac{\delta}{r^2K}rN\left(\frac{\tau}{r}\right)\left(1-\frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}}N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right)=$$

$$=\frac{\delta}{rK}\frac{rK}{\delta}x(\tau)\left(1-\frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}}N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right)=x(\tau)\big(1-y(\tau)\big),$$

$$y'(\tau)=\frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\delta}{K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}}N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s=$$

$$=\frac{\delta}{K}\left(\frac{1}{r}N\left(\frac{\tau}{r}\right)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-\frac{\tau}{r}\right)}-\frac{\delta}{r}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}}N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right)=$$

$$=\frac{\delta}{rK}N\left(\frac{\tau}{r}\right)-\frac{\delta}{r}\frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}}N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s=x(\tau)-\frac{\delta}{r}y(\tau).$$

Rovnice (9.3) se tedy transformuje na dvourozměrný autonomní systém

$$\begin{aligned}x'&=x(1-y),\\ y'&=x-\frac{\delta}{r}y.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Nejprve si všimněme, že uzavřený první kvadrant $\bar{\mathbb{R}}^2_+=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0, y\geq 0\big\}$ je pozitivně invariantní množinou tohoto systému. Uzavřená polopřímka $\{(0,y):\ y\geq 0\}$ je totiž pozitivně invariantní množinou ($x(t)\equiv 0$, $y(t)=y_0\mathrm{e}^{-(\delta/r)t}$ je řešením systému (9.4) pro každé $y_0\geq 0$), pro řešení s počáteční podmínkou $x(0)=x_0>0$, $y(0)=0$ platí $x'(0)>0$, $y'(0)>0$ a tedy příslušná trajektorie směřuje dovnitř prvního kvadrantu.

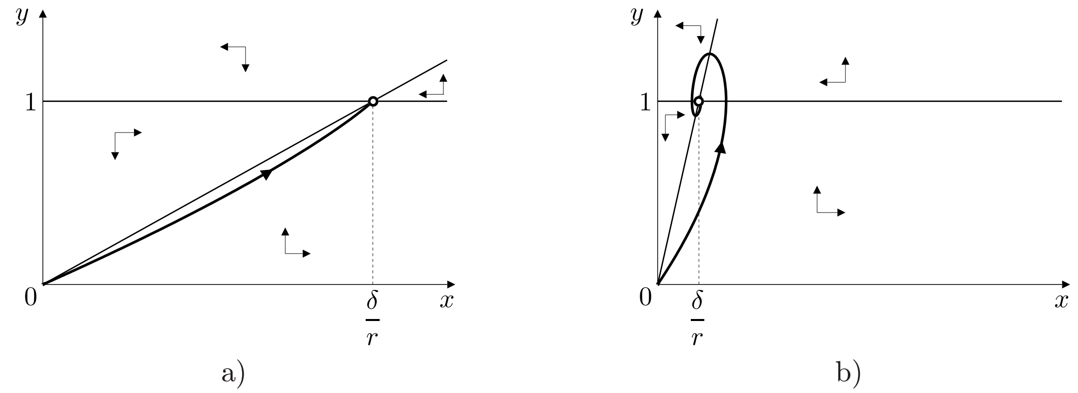
Systém (9.4) má stacionární body$(0,0)$ a $(x^*,y^*)=\left(\dfrac{\delta}{r},1\right)$ a jeho variační matice je

$$\mathsf{J}(x,y)=\begin{pmatrix}1-y & -x\\ 1 & -\dfrac{\delta}{r}\end{pmatrix}.$$

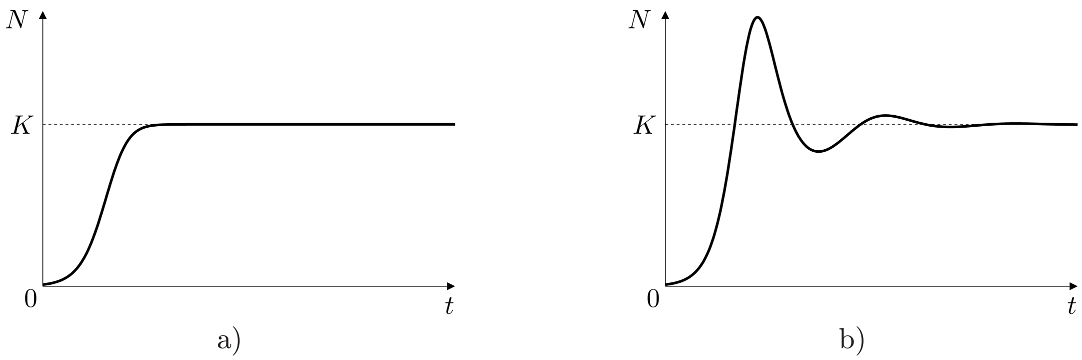
Tedy $\mathsf{J}(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -\dfrac{\delta}{r}\end{pmatrix}$, $\det\mathsf{J}(0,0)=-\dfrac{\delta}{r}>0$, takže stacionární bod $(0,0)$ je sedlo. Dále

$$\mathsf{J}(x^*,y^*)=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\delta}{r}\\ 1 & -\dfrac{\delta}{r}\end{pmatrix},\qquad \det\mathsf{J}(x^*,y^*)=\frac{\delta}{r}>0,\qquad \operatorname{tr}\mathsf{J}(x^*,y^*)=-\frac{\delta}{r}<0,$$

$$\big(\operatorname{tr}\mathsf{J}(x^*,y^*)\big)^2-4\det\mathsf{J}(x^*,y^*)=\frac{\delta}{r^2}(\delta-4r),$$



Obrázek 9.1: Fázový portrét systému (9.4) a jeho trajektorie s počáteční podmínkou $0 < x(0) \ll 1$, $y(0) = 0$. a) $\delta \geq 4r$, b) $\delta < 4r$. Oba obrázky mají stejné měřítko na ose x.



Obrázek 9.2: Průběh řešení úlohy (9.3), (9.5). a) $\delta = 4r$, b) $\delta = \frac{1}{2}r$.

takže v případě $\delta \geq 4r$ je vnitřní stacionární bod (x^*, y^*) stabilní uzel, v opačném případě se jedná o stabilní ohnisko. Fázové portréty systému systému (9.4) v obou případech jsou znázorněny na obr. 9.1.

S využitím Dulacova kriteria (věta 22) vyloučíme existenci cyklu v prvním kvadrantu. Položíme $q(x, y) = \dfrac{1}{x}$. Pak

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}x(1-y) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x}\left(x - \frac{\delta}{r}y\right) = -\frac{\delta}{rx} < 0$$

pro všechna $x > 0$. Uvnitř prvního kvadrantu tedy neexistuje cyklus systému (9.4).

Uvažujme nyní situaci, že na počátku (v čase $t = 0$) se dostane malá populace do nového prostředí. K rovnici (9.3) přidáme tedy počáteční podmínky

$$N(0) = N_0, \qquad N(t) = 0 \text{ pro } t < 0. \tag{9.5}$$

Počáteční podmínky pro systém (9.4) v tomto případě budou

$$x(0) = \frac{\delta}{rK}N_0, \qquad y(0) = \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{0} N(s)\mathrm{e}^{\delta s}\mathrm{d}s = 0;$$

Trajektorie systému (9.4) s těmito počátečními podmínkami jsou také zobrazeny na obr. 9.1. Z provedené analýzy systému (9.4) plyne, že pro řešení N počáteční úlohy (9.3), (9.5) platí

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{rK}{\delta} x^* = K;$$

funkce N konverguje k hodnotě K v případě $\delta \geq 4r$ monotonně, viz obr. 9.2 a), v opačném případě s tlumenými oscilacemi, viz obr. 9.2 b).

Kapitola 10

Lotkovy-Volterrovy systémy

$$x_i' = x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{10.1}$$

Tyto systémy modelují vývoj společenstva (časové změny velikostí jednotlivých populací, z nichž se společenstvo skládá). Neznámé funkce a parametry interpretujeme následovně:

$x_i = x_i(t)$ ... velikost i-té populace

b_i ... růstový koeficient izolované i-té populace (vnitřní koeficient růstu i-té populace)

$b_i > 0$ ... i-tá populace je soběstačná (producent)

$b_i \leq 0$ ... i-tá populace závisí na jiných populacích (konzument)

a_{ii} ... koeficient vnitrodruhových vztahů i-té populace

$a_{ii} > 0$ ... v i-té populaci se projevuje vnitrodruhová konkurence

$a_{ii} < 0$ ... v i-té populaci se projevuje vnitrodruhová kooperace

a_{ij} ... koeficient vlivu j-té populace na i-tou

$\min\{a_{ij}, a_{ji}\} > 0$ ... i-tá a j-tá populace jsou ve vztahu konkurence

$\max\{a_{ij}, a_{ji}\} < 0$ ... i-tá a j-tá populace jsou ve vztahu mutualismu (symbiózy)

$a_{ij} < 0 < a_{ji}$ ... j-tá populace je kořistí (hostitelem) i-té populace;
i-tá populace je predátorem (parazitem) j-té populace

$a_{ij} > 0$ ... j-tá populace je amenzalistou i-té populace

$a_{ij} < 0$ ... j-tá populace je komenzalistou i-té populace

Fázový prostor systému (10.1) je n-rozměrný uzavřený kladný orthant

$$\bar{\mathbb{R}}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

10.1 Vztah Lotkových-Volterrových systémů a Verhulstovy logistické rovnice

Logistickou rovnici
$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$
v níž jsou oba parametry r (vnitřní koeficient růstu) a K (kapacita prostředí pro modelovanou populaci) kladné, lze považovat za jednorozměrný Lotkův-Volterrův systém s $b_1 = r$ a $a_{11} = r/K$, tedy za model soběstačné populace s vnitrodruhovou konkurencí (tak byla Verhulstova rovnice sestavena). Také platí $K = b_1/a_{11}$; odtud lze usoudit, že pro soběstačnou populaci s vnitrodruhovou konkurencí představuje podíl vnitřního koeficientu růstu a koeficientu vnitrodruhové konkurence kapacitu prostředí neovlivněnou ostatními populacemi společenstva.

Jinou interpretaci logistické rovnice lze získat následující úvahou: Označme
$$y = 1 - \frac{x}{K} = \frac{K - x}{K}.$$
Poněvadž $y' = -x'/K$, dostaneme
$$\begin{aligned} x' &= rxy \\ y' &= -\frac{r}{K}xy. \end{aligned} \tag{10.2}$$
Jedná se o dvojrozměrný Lotkův-Volterrův systém s parametry
$$b_1 = b_2 = 0, \quad a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = r, \quad a_{21} = -\frac{r}{K}.$$
Proměnnou y lze interpretovat jako relativní dostupnost zdrojů pro modelovanou populaci vzhledem k celkové kapacitě prostředí K. Velikost populace a relativní dostupnost zdrojů jsou tedy ve vztahu predace, obě tyto „složky společenstva“ nejsou ani producenty ani konzumenty a neprojevuje se u nich žádný vnitrodruhový vztah.

Poznamenejme, že systém (10.2) nemá izolované stacionární body.

Systém (10.2) lze také přepsat ve vektorovém tvaru
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \frac{r}{K}\begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ K \end{pmatrix} = \frac{r}{K}\begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}\nabla(x + Ky).$$
Matice
$$\mathsf{S} = \mathsf{S}(x,y) = \frac{r}{K}\begin{pmatrix} 0 & xy \\ -xy & 0 \end{pmatrix}$$
je antisymetrická. To znamená, že systém (10.2) je hamiltonovský a funkce $H(x,y) = x + Ky$ je jeho hamiltoniánem (sr. definici 24 a větu 31). Invariantem systému (10.2) je součet velikosti populace a (absolutní) dostupnosti zdrojů. Tento invariant je podle definičního vztahu proměnné y také roven
$$x + Ky = x + K\left(1 - \frac{x}{K}\right) = K,$$
což je kapacita prostředí z Verhulstovy logistické rovnice. Tyto výsledky jsou matematicky triviální, umožňují ale alternativní interpretaci kapacity prostředí a tím snad i lepší vhled do problematiky populační ekologie.

10.2 Obecné vlastnosti Lotkových-Volterrových systémů

Zavedeme označení

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

matice A se nazývá *matice interakcí společenstva*. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ položíme

$$\operatorname{diag} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_n \end{pmatrix}$$

a vektory ze standardní orthonormální báze n-rozměrného vektorového prostoru označíme $\boldsymbol{e_j}$,

$$\boldsymbol{e^j} = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ je Kroneckerův symbol.}$$

Systém (10.1) lze zapsat jako vektorovou rovnici

$$\boldsymbol{x}' = \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) \,. \tag{10.3}$$

Je-li matice A regulární, existuje nejvýše jeden stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ systému (10.1) takový, že všechny jeho složky jsou kladné. Takový stacionární bod budeme nazývat *vnitřní.* Pokud vnitřní stacionární bod existuje, lze tuto skutečnost interpretovat jako možnou koexistenci všech populací společenstva, přičemž koexistující populace mají dynamicky stálé velikosti dané složkami vektoru $\boldsymbol{x}^*$.

Parciální derivace pravé strany rovnice (10.3) podle j-té proměnné je

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \right) (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) + \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) \right) = \\ = \operatorname{diag} \boldsymbol{e}^j \, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}) + \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \left(-\mathsf{A} \cdot \boldsymbol{e}^j \right)$$

a pro vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ platí $\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{x}^* = \mathsf{O}$. Proto variační matice systému (10.1) ve vnitřním stacionárním bodě $\boldsymbol{x}^*$ je

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) = -\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}.$$

Odtud a z 28 plyne:

Věta 32. *Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému (10.1), jehož všechny složky jsou nenulové. Mají-li všechna vlastní čísla matice $\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}$ kladnou reálnou část, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (10.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Pokud existuje vlastní číslo matice $\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}$ které má zápornou reálnou část, pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (10.1) nestabilní.

Poznámka 13. Pro čtvercovou matici M položme $\mathcal{S}\mathsf{M} = \frac{1}{2}\left(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T\right)$. Matice $\mathcal{S}\mathsf{M}$ je zřejmě symetrická.

Pro každý n-rozměrný vektor $\boldsymbol{v}$ a čtvercovou matici M řádu n platí

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\mathcal{S}\mathsf{M}\boldsymbol{v}.$$

Důkaz: Poněvadž $\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v}$ je číslo, tj. čtvercová matice řádu 1, platí

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v}\right)^T = \boldsymbol{v}^T\mathsf{M}^T\boldsymbol{v}.$$

Odtud plyne

$$\boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T\left(\frac{1}{2}(\mathsf{M}+\mathsf{M}^T) - \frac{1}{2}\mathsf{M}^T\right)\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T\,\mathcal{S}\mathsf{M}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T\mathsf{M}^T\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T\,\mathcal{S}\mathsf{M}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T\mathsf{M}\boldsymbol{v}$$

a tato rovnost je již ekvivalentní s dokazovaným vztahem. □

Věta 33. *Buď $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ vnitřní stacionární bod systému (10.1). Jestliže existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými a existuje okolí U bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in U$ je výraz*

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T\ \mathcal{S}(\operatorname{diag}\boldsymbol{c}\,\mathsf{A})\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \tag{10.4}$$

nezáporný, pak funkce

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\xi - x_i^*}{\xi}\mathrm{d}\xi$$

je ljapunovskou funkcí systému (10.1), tj. konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (10.1) je stejnoměrně stabilní.

Pokud je výraz (10.4) pro všechna $\boldsymbol{x} \in U \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ kladný, pak je toto řešení stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Důkaz: Funkce V je definována pro všechna $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$. Platí

$$V(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i^*} \frac{\xi - x_i^*}{\xi}\mathrm{d}\xi = 0.$$

Pro každé $x_i > 0$ je

$$\int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\xi - x_i^*}{\xi}\mathrm{d}\xi \geq 0,$$

neboť integrovaná funkce je kladná pro $x_i > x_i^*$ (tj. v případě, že horní mez integrálu je větší, než dolní mez) a záporná pro $x_i < x_i^*$ (horní mez integrálu menší než dolní mez). Rovnost nastane právě tehdy, když $x_i = x_i^*$. Odtud plyne, že pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ a takové, že všechny jeho složky jsou kladné, platí $V(\boldsymbol{x}) > 0$.

Dále podle věty o derivaci integrálu jako funkce horní meze platí

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i},$$

a poněvadž $\boldsymbol{b} = \mathsf{A}\boldsymbol{x}^*$, platí dále

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*,$$

takže derivace funkce V vzhledem k systému (10.1) je

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i} x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_i^*) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_i^*) c_i a_{ij} (x_j - x_j^*) = - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T (\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) =$$

$$= - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T \mathcal{S} (\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

(poslední rovnost plyne z poznámky 13). Věta nyní plyne z věty 29 a a jejího důsledku 8. □

Důsledek 10. *Nechť systém* (10.1) *má vnitřní stacionární bod* $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

Jestliže existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ *se všemi složkami kladnými takový, že matice*

$$\mathcal{S} (\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\, \mathsf{A}) \tag{10.5}$$

je pozitivně semidefinitní, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ *systému* (10.1) *je stejnoměrně stabilní.*

Pokud je matice (10.5) *pozitivně definitní, pak konstantní řešení* $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ *systému* (10.1) *je stejnoměrně asymptoticky stabilní.*

Poznámka 14. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 33. Ljapunovská funkce systému (10.1) je tvaru

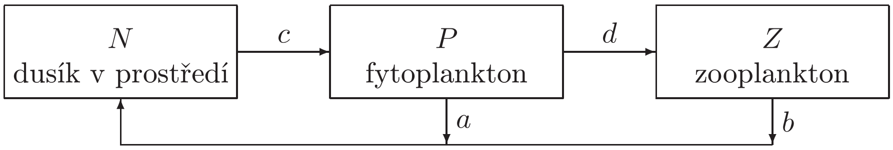
$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_i^* \left(1 - \ln \frac{x_i}{x_i^*} \right) \right)$$

a její derivace vzhledem k systému (10.1) je rovna

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T \mathcal{S} (\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \mathsf{A}) (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*).$$

10.3 Koloběh dusíku v planktonu

Uvažujme proces schématicky znázorněný na obrázku 10.1: Ve fytoplanktonu probíhá fotosyntéza a při ní se dusík z okolního prostředí váže v jeho buňkách; fytoplankton slouží jako potrava pro zooplankton, takže dusík ze zkonzumovaného fytoplanktonu se stává součástí zooplanktonu. Plankton v důsledku svého metabolismu dusík opět vylučuje do okolního prostředí a také při rozkladu mrtvého planktonu se dusík uvolňuje. Dusík z prostředí není odebírán ani není nějakým způsobem do něho přidáván. Dusíku vylučovaného planktonem je tím více, čím je více planktonu, dusíku vázaného ve fytoplanktonu přibývá tím více, čím je více volného dusíku a fytoplanktonu; dusíku vázaného v zooplanktonu přibývá tím více, čím více je fytoplanktonu pozřeného zooplanktonem a toho je tím více, čím více je fytoplanktonu i zooplanktonu. Označme po řadě N, P a Z množství dusíku v prostředí, vázaného ve fytoplanktonu a vázaného v zooplanktonu. Všechny tyto veličiny se mění s časem, tj. $N = N(t)$,



Obrázek 10.1: Schéma koloběhu dusíku

$P = P(t)$ a $Z = Z(t)$. Celkové množství dusíku v systému je rovno $V = N + P + Z$. Koloběh dusíku lze nejjednodušeji modelovat systémem rovnic

$$\begin{aligned} N' &= aP + bZ - cNP, \\ P' &= cNP - dPZ - aP, \\ Z' &= dPZ - bZ; \end{aligned}$$

všechny parametry a, b, c, d jsou kladné.

Nejprve si všimněme, že $V' = N' + P' + Z' = 0$, což znamená, že celkové množství dusíku V je konstantní. Proto lze množství dusíku v prostředí vyjádřit jako $N(t) = V - P(t) - Z(t)$ a dosadit do druhé a třetí rovnice systému. Dostaneme

$$\begin{aligned} P' &= (Vc - a)P - cP^2 - (c + d)PZ &&= P\big(Vc - a - cP - (c + d)Z\big), \\ Z' &= -bZ + dPZ &&= Z\big(-b + dP\big). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Jedná se tedy o Lotkův-Volterrův systém s vektorem růstových koeficientů a maticí interakcí

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} Vc - a \\ -b \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} c & -(c + d) \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

To je systém typu dravec-kořist; dravcem je zooplankton, kořistí fytoplankton. Variační matice systému (10.6) v obecném bodě je

$$\mathsf{J}(P, Z) = \begin{pmatrix} Vc - a - 2cP - (c + d)Z & -(c + d)P \\ dZ & -b + dP \end{pmatrix},$$

Systém (10.6) má vždy triviální stacionární bod

$$\boldsymbol{s_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vyjadřující nepřítomnost planktonu. Variační matice v triviálním stacionárním bodě, její stopa a determinant jsou

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0}) = \begin{pmatrix} Vc - a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) = c\left(V - \frac{a}{c}\right) - b, \quad \det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) = -bc\left(V - \frac{a}{c}\right),$$

Pokud pro množství dusíku platí

$$V > \frac{a}{c}, \tag{10.7}$$

pak $\det\big(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\big) < 0$ a podle 5.3.1 to znamená, že triviální stacionární bod $\boldsymbol{s_0}$ je sedlo. Pokud naopak

$$V < \frac{a}{c},$$

pak $\det\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\right) > 0$, $\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\right) < -b < 0$ a $\Big(\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\right)\Big)^2 - 4\det\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_0})\right) = (Vc-a+b)^2 \geq 0$, což znamená, že $\boldsymbol{s_0}$ je stabilní uzel.

Je-li splněna nerovnost (10.7), pak má systém (10.6) další stacionární bod

$$\boldsymbol{s_1} = \begin{pmatrix} V - \dfrac{a}{c} \\ 0 \end{pmatrix},$$

vyjadřující dynamicky stálé množství fytoplanktonu bez přítomnosti zooplanktonu. Variační matice systému (10.7) ve stacionárním bodě $\boldsymbol{s_1}$ je

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1}) = \begin{pmatrix} -c\left(V-\frac{a}{c}\right) & -(c+d)\left(V-\frac{a}{c}\right) \\ 0 & d\left(V-\frac{a}{c}\right)-b \end{pmatrix},$$

její stopa a determinant jsou

$$\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\right) = d\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right) - c\left(V-\frac{a}{c}\right), \quad \det\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\right) = -cd\left(V-\frac{a}{c}\right)\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right).$$

Pokud navíc množství dusíku splňuje podmínku

$$V > \frac{a}{c} + \frac{b}{d}, \tag{10.8}$$

pak $\det\left(\mathsf{J}(s_1)\right) < 0$ a stacionární bod je sedlo. Je-li naopak

$$V < \frac{a}{c} + \frac{b}{d},$$

pak $\det\left(\mathsf{J}(s_1)\right) < 0$, $\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\right) < 0$ a

$$\Big(\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\right)\Big)^2 - 4\det\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s_1})\right) = \left[d\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right) + c\left(V-\frac{a}{c}\right)\right]^2 \geq 0,$$

což znamená, že stacionární bod je stabilní uzel.

Vnitřní stacionární bod systému (10.6) je

$$\begin{pmatrix} P^* \\ Z^* \end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{d(c+d)}\begin{pmatrix} 0 & -(c+d) \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Vc-a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{d} \\ \dfrac{c}{c+d}\left(V-\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že $P^* > 0$ a pokud je splněna podmínka (10.8), pak také $Z^* > 0$; v takovém případě je tedy možná koexistence fyto- i zooplanktonu. Dále platí

$$\begin{aligned} \mathsf{J}(P^*, Z^*) &= -\begin{pmatrix} \dfrac{b}{d} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \dfrac{c}{c+d}\left(V-\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -(c+d) \\ d & c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b(c+d)}{d} \\ -\dfrac{cd}{c+d}\left(V-\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{d}\right) & -\dfrac{c^2}{c+d}\left(V-\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Je-li splněna podmínka (10.8), pak

$$\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(P^*,Z^*)\right) = -\frac{c^2}{c+d}\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right) < 0, \quad \det\left(\mathsf{J}(P^*,Z^*)\right) = bc\left(V-\frac{a}{c}-\frac{b}{d}\right) > 0,$$

což znamená, že reálná část vlastních čísel variační matice $\mathsf{J}(P^*, Z^*)$ je záporná, a tedy vnitřní stacionární řešení (P^*, Z^*) systému (10.6) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Povšimněme si, že kladná stacionární hodnota P^* nezávisí na celkovém množství dusíku V. Pokud se tedy zvětší přísun živin, nemá z toho užitek fytoplankton, ale jeho predátor zooplankton.

Z dosud provedených úvah a výpočtů lze učinit závěr, že přežívání planktonu je závislé na celkovém množství dusíku v prostředí:

(i) $V < \dfrac{a}{c}$ plankton nepřežívá,

(ii) $\dfrac{a}{c} < V < \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d}$ přežívá pouze fytoplankton,

(iii) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} < V$ fyto- i zooplankton dlouhodobě koexistují.

Povšimněme si, že podmínku (iii) lze splnit pouze v případě

$$V > \frac{b}{d}; \tag{10.9}$$

v opačném případě by totiž mělo být $V - \dfrac{b}{d} > \dfrac{a}{c} > 0$ a současně $V - \dfrac{b}{d} \leq 0$.

Výsledky lze ovšem interpretovat i jinak. Předpokládejme, že platí podmínka (10.9) a příslušné nerovnosti i závěry z nich plynoucí přepíšeme do tvaru:

(i) $c < \dfrac{a}{V}$ plankton nepřežívá,

(ii) $\dfrac{a}{V} < c < \dfrac{a}{V} + \dfrac{ab}{V(Vd-b)}$ přežívá pouze fytoplankton,

(iii) $\dfrac{a}{V} + \dfrac{ab}{V(Vd-b)} < c$ fyto- i zooplankton dlouhodobě koexistují.

Koeficient c vyjadřuje, s jakou intenzitou je dusík z prostředí vázán do biomasy fytoplanktonu. Tato vazba vzniká procesem fotosyntézy, jejíž intenzita roste s množstvím slunečního světla a to se mění s ročním obdobím. Při stálém množství dusíku se s rostoucím množstvím světla nejprve objeví fytoplankton, poté i zooplankton; v zimě se plankton nevyskytuje, na jaře se nejprve objeví fytoplankton a poté s prodlužujícím se dnem i zooplankton.

10.4 Dissipativita konkurenčních systémů

Uvažujme společenstvo n soběstačných populací, z nichž každá projevuje vnitrodruhovou konkurenci a každá z populací je amenzalistou jiné nebo ji neovlivňuje (zejména tedy každé dvě populace mohou být ve vztahu konkurence). Vývoj takového společenstva lze modelovat systémem (10.1) s kladnými parametry b_i, a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$ a s nezápornými parametry a_{ij}

pro $i \neq j$. S využitím poznámky 11 ukážeme, že takový systém je dissipativní, tedy že všechny složky jeho řešení jsou ohraničené:

Nechť $\varepsilon > 0$ a $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou libovolná. Položme

$$K_i = \frac{b_i}{a_{ii}} + \varepsilon, \qquad \delta_i = \varepsilon a_{ii}.$$

Pak $K_i > 0$, $\delta_i > 0$ a pro všechna $x_j \geq K_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} x_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \leq x_i(b_i - a_{ii}x_i) \leq x_i(b_i - a_{ii}K_i) = x_i a_{ii}\left(\frac{b_i}{a_{ii}} - K_i\right) = \\ = x_i a_{ii}(K_i - \varepsilon - K_i) = -\varepsilon x_i a_{ii} = -\delta_i x_i, \end{aligned}$$

takže předpoklady poznámky 11 jsou splněny.

Poněvadž kladná konstanta ε je libovolně malá, pro každé řešení

$$\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\big)$$

systému (10.1) s $b_i > 0, a_{ii} > 0, a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ existuje $T \geq 0$ takové, že pro všechna $t \geq T$ je

$$x_1(t) \leq \frac{b_1}{a_{11}}, \; x_2(t) \leq \frac{b_2}{a_{22}}, \; \dots, \; x_n(t) \leq \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

V dlouhém časovém horizontu populace nepřekračují velikost danou kapacitou prostředí pro populace izolované.

10.5 Trofický řetězec

Trofický řetězec je takové společenstvo, v němž je první druh producentem a každý jiný druh je nesoběstačným specializovaným predátorem právě jednoho dalšího druhu. Označíme x_1 velikost populace producenta, x_2 velikost populace jeho predátora, x_3 velikost populace, která je predátorem populace o velikosti x_2, atd. Každá z populací na některé trofické úrovni nemusí být tvořena jedním biologickým druhem, může jít o společenstvo organismů majících stejný způsob obživy. Trofický řetěz o n úrovních lze tedy modelovat systémem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(r - ax_1) - p_1x_1x_2 \\ x_2' &= -d_2x_2 + q_2x_1x_2 - p_2x_2x_3 \\ &\vdots \\ x_k' &= -d_kx_k + q_kx_{k-1}x_k - p_kx_kx_{k+1} \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= -d_{n-1}x_{n-1} + q_{n-1}x_{n-2}x_{n-1} - p_{n-1}x_{n-1}x_n \\ x_n' &= -d_nx_n + q_nx_{n-1}x_n, \end{aligned} \tag{10.10}$$

parametry $r, d_2, d_3, \dots, d_n, q_2, q_3, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ jsou kladné, parametr a je nezáporný (producent může, ale nemusí projevovat vnitrodruhovou konkurenci).

Existence vnitřního stacionárního bodu

Hledejme nyní podmínky, které zaručí existenci takového stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$. Jeho souřadnice splňují n-rozměrný systém algebraických rovnic

$$\begin{aligned} ax_1^* + p_1 x_2^* &= r, \\ q_k x_{k-1}^* - p_k x_{k+1}^* &= d_k, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \\ q_n x_{n-1}^* &= d_n. \end{aligned} \tag{10.11}$$

„Prostřední“ rovnice tohoto systému lze přepsat ve tvaru rekurentních formulí

$$x_{k-1}^* = \frac{1}{q_k}\left(p_k x_{k+1}^* + d_k\right) \quad \text{nebo} \quad x_{k+1}^* = \frac{1}{p_k}\left(q_k x_{k-1}^* - d_k\right), \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \tag{10.12}$$

Poněvadž všechny koeficienty p_k, q_k, d_k jsou kladné, plyne z tohoto vyjádření:

(i) je-li $x_{\ell_0}^* > 0$ pro nějaké $l_0 \in \{2, 3, \dots, n\}$,

$$\text{pak je } x_\ell^* > 0 \text{ pro všechna } \ell \in \left\{\ell_0, \ell_0 - 2, \ell_0 - 4, \dots, \frac{1}{2}\left(3 + (-1)^{\ell_0}\right)\right\};$$

(ii) je-li $x_{\ell_1}^* \leq 0$ pro nějaké $\ell_1 \in \{1, 3, \dots, n-2\}$,

$$\text{pak je } x_\ell^* < 0 \text{ pro všechna } \ell \in \left\{\ell_1 + 2, \ell_1 + 4, \dots, n - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{\ell_1 + n}\right)\right\}.$$

Podle poslední rovnice systému (10.11) je

$$x_{n-1}^* = \frac{d_n}{q_n}.$$

Z první rekurentní formule (10.12) postupně vyjádříme

$$x_{n-3}^* = \frac{1}{q_{n-2}}\left(p_{n-2} x_{n-1}^* + d_{n-2}\right) = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n-2}}{q_{n-2}},$$

$$x_{n-5}^* = \frac{1}{q_{n-4}}\left(p_{n-4} x_{n-3}^* + d_{n-4}\right) = \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}} \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \frac{d_n}{q_n} + \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}} \frac{d_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{d_{n-4}}{q_{n-4}},$$

atd. Celkem dostaneme

$$x_{n-(2\ell+1)}^* = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2i}} \prod_{j=i+1}^{\ell} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}}, \quad \text{pro } \ell = 0, 1, \dots \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \tag{10.13}$$

kde $[\xi]$ označuje celou část z čísla ξ a klademe $\prod\limits_{j=k}^{k-1} \alpha_j = 1$ pro libovolné přirozené k a každou posloupnost $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$.[1] Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že (10.13) je skutečně řešením druhé až n-té rovnice systému (10.11).

[1]Uvedená konvence je přirozeným rozšířením rovnosti $\prod\limits_{j=m}^{k} \alpha_j = \alpha_k \prod\limits_{j=m}^{k-1} \alpha_j$, která platí pro libovolné $k > m$, také pro $k = m$.

Nechť nejprve je n sudé. V tomto případě lze rovnost (10.13) přepsat na tvar

$$x^*_{2k-1} = x^*_{n-(2(\frac{n}{2}-k)+1)} = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-k} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2_i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n}{2}-k} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}} = \sum_{i=k}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}.$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ s lichými indexy jsou kladné. Pro jeho první souřadnici platí

$$x^*_1 = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{10.14}$$

Z první rovnice systému (10.11) nyní dostaneme

$$x^*_2 = \frac{r - ax^*_1}{p_1},$$

a ze druhé rekurentní formule (10.12)

$$x^*_4 = \frac{1}{p_3}\left(q_3 x^*_2 - d_3\right) = \frac{q_3}{p_3}\frac{r - ax^*_1}{p_1} - \frac{d_3}{p_3},$$

$$x_6 = \frac{1}{p_5}\left(q_5 x^*_4 - d_5\right) = \frac{q_5}{p_5}\frac{q_3}{p_3}\frac{r - ax^*_1}{p_1} - \frac{q_5}{p_5}\frac{d_3}{p_3} - \frac{d_5}{p_5},$$

atd. Obecně

$$x^*_{2k} = \frac{r - ax^*_1}{p_1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{2i+1}}{p_{2i+1}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}} \prod_{j=i+1}^{k-1} \frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}.$$

Souřadnice x^*_1 je vyjádřena formulí (10.14). Tedy platí

$$\begin{aligned}
x^*_n = x^*_{2\frac{n}{2}} &= \frac{r - ax^*_1}{p_1} \prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}} = \\
&= \left(\prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}}\right)\left(\frac{r - ax^*_1}{p_1} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{p_1} \prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}}\right)\left(r - a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}} - p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}\right).
\end{aligned}$$

Nutnou a dostatečnou podmínkou pro to, aby všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ byly kladné, je tedy podle tvrzení (i) a (ii) nerovnost

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{10.15}$$

Nechť nyní je n liché. V tomto případě lze rovnost (10.13) přepsat na tvar

$$x_{2k}^* = x_{n-(2(\frac{n-1}{2}-k)+1)} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}} = \sum_{i=k}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

Z něho je vidět, že všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ se sudými indexy jsou kladné. Zejména jeho druhá souřadnice je

$$x_2^* = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}. \tag{10.16}$$

Je-li $a \neq 0$, dostaneme z první rovnice systému (10.11)

$$x_1^* = \frac{r - p_1 x_2^*}{a},$$

ze druhé rekurentní formule (10.12) nyní můžeme postupně vyjádřit

$$x_3^* = \frac{1}{p_2}(q_2 x_1^* - d_2) = \frac{q_2}{p_2}\frac{r - p_1 x_2^*}{a} - \frac{d_2}{p_2},$$

$$x_5^* = \frac{1}{p_4}(q_4 x_3^* - d_4) = \frac{q_4}{p_4}\frac{q_2}{p_2}\frac{r - p_1 x_2^*}{a} - \frac{q_4}{p_4}\frac{d_2}{p_2} - \frac{d_4}{p_4},$$

atd. Obecně dostaneme

$$x_{2k-1}^* = \frac{r - p_1 x_2^*}{a} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{2i}}{p_{2i}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{2i}}{p_{2i}} \prod_{j=i+1}^{k-1} \frac{q_{2j}}{p_{2j}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}.$$

Odtud s využitím (10.16) vyjádříme

$$\begin{aligned} x_n^* = x_{2\frac{n+1}{2}-1}^* &= \frac{r - p_1 x_2^*}{a} \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2\ell}}{p_{2\ell}} - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{p_{2i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2j}}{p_{2j}} = \\ &= \left(\frac{1}{a} \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2\ell}}{p_{2\ell}}\right) \left(r - p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} - a \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}\right). \end{aligned}$$

Pro liché n a $a \neq 0$ tedy dostáváme jako nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ byly kladné, nerovnost

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{10.17}$$

Pokud je n liché a $a = 0$, dostaneme z první rovnice systému (10.11) rovnost

$$x_2^* = \frac{r}{p_1}.$$

Současně však musí platit rovnost (10.16), takže soustava rovnic (10.11) má řešení (a to nekonečně mnoho řešení; stacionární bod není v takovém případě izolovaný) pouze tehdy, když

$$r = p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Pravděpodobnost, že tato rovnost bude splněna pro systém (10.10) modelující reálné společenstvo, je však nulová.

Povšimněme si ještě, že nerovnosti (10.15) a (10.17) lze zapsat jednotně ve tvaru

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{10.18}$$

Závěr: Je-li $a > 0$ (základní zdroj je omezený, v populaci producenta je vnitropopulační konkurence), pak vnitřní stacionární bod systému (10.10) existuje (je možná koexistence všech populací tvořících trofický řetězec) právě tehdy, když je splněna podmínka (10.18) (vnitřní koeficient růstu producenta je dostatečně velký).

Je-li $a = 0$ (základní zdroj je neomezený), pak vnitřní stacionární bod systému (10.10) existuje pouze pro sudé n (je možná koexistence pouze sudého počtu trofických úrovní); vnitřní stacionární bod v takovém případě existuje právě tehdy, když je splněna podmínka

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Stabilita vnitřního stacionárního bodu

Matice interakcí a vektor růstových koeficientů jsou

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -q_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} r \\ -d_2 \\ -d_3 \\ \vdots \\ -d_{n-1} \\ -d_n \end{pmatrix}.$$

Položme

$$c_1 = 1, \ c_2 = \frac{p_1}{q_2}, \ c_3 = \frac{p_1 p_2}{q_2 q_3}, \ \ldots, \ c_{n-1} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n-2}}{q_2 q_3 \cdots q_{n-1}}, \ c_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{q_2 q_3 \cdots q_n}.$$

Pak je

$$\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & \dfrac{p_1p_2}{q_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p_1p_2}{q_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{p_1p_2\cdots p_{n-2}}{q_2q_3\cdots q_{n-2}} & 0 & \dfrac{p_1p_2\cdots p_{n-1}}{q_2q_3\cdots q_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{p_1p_2\cdots p_{n-1}}{q_2q_3\cdots q_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

takže

$$\mathcal{S}\left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z čehož plyne

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*)^T\, \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A})\,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) = a(x_1-x_1^*)^2 \geq 0.$$

Pokud existuje vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ uvažovaného systému, pak je příslušné konstantní řešení stejnoměrně stabilní.

Podle Poznámky 14 je derivace ljapunovské V funkce vzhledem k systému (10.1) rovna

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -a(x_1-x_1^*)^2.$$

Je-li $a=0$ (zdroje pro primárního producenta, tj. pro populaci na nejnižší trofické úrovni, jsou neomezené), pak je $\dot{V}(\boldsymbol{x})=0$ pro všechna $\boldsymbol{x}$ z fázového prostoru systému (10.1).

Nechť $a>0$. Stejnoměrnou asymptotickou stabilitu stacionárního řešení $\boldsymbol{x}(t)\equiv\boldsymbol{x}^*$ v tomto případě ukážeme podle Důsledku 9 Věty 29. Máme

$$M = \left\{\boldsymbol{x} : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\right\} = \{\boldsymbol{x} : x_1 - x_1^* = 0\}.$$

Položíme-li $F(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_1^*$, je

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \begin{cases} 1, & i=1, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

takže pro $\boldsymbol{x}\in M$ platí

$$\dot{F}(\boldsymbol{x}) = x_1^*(r-ax_1^*) - p_1x_1^*x_2 = x_1^*(r-ax_1^*-p_1x_2).$$

Připomeňme, že pro první dvě souřadnice vnitřního stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ podle (10.11) platí

$$r - ax_1^* - p_1x_2^* = 0.$$

Celkem tak dostáváme, že $\dot{F}(\boldsymbol{x})\neq 0$ pro $\boldsymbol{x}\in M\smallsetminus\{\boldsymbol{x}^*\}$, což znamená, že stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Tento výsledek můžeme přeformulovat tak, že vnitrodruhová konkurence na nejnižší trofické úrovni (omezení zdrojů) stabilizuje společenstvo.

10.6 Společenstvo se dvěma trofickými úrovněmi

Uvažujme společenstvo tvořené dvěma skupinami druhů — producenty (kořistí) a konzumenty (predátory). Mezi druhy uvnitř jednotlivých trofických úrovní nejsou žádné interakce a konzumenti nemohou bez producentů přežít. Je-li takové společenstvo tvořeno n druhy producentů a m druhy konzumentů, lze jeho vývoj popsat systémem Lotkových-Volterrových rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\left(r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}y_k\right), && i = 1,2,\ldots,n,\\ y_j' &= y_j\left(-s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right), && j = 1,2,\ldots,m; \end{aligned} \tag{10.19}$$

x_i označuje velikost i-tého druhu producentů, y_j velikost j-tého druhu konzumentů, parametry r_i, s_j, a_{ij}, b_{ji} jsou kladné. Systém (10.19) můžeme při zavedení vektorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)^T$, a matic

$$\mathsf{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}\end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = (b_{ji})_{\substack{1\le j\le m\\1\le i\le n}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

zapsat vektorově

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \operatorname{diag}\boldsymbol{x}\,(\boldsymbol{r} - \mathsf{A}\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{y}' &= \operatorname{diag}\boldsymbol{y}\,(-\boldsymbol{s} + \mathsf{B}\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

nebo ve tvaru

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}' = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\boldsymbol{r}\\ -\boldsymbol{s}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathsf{O} & \mathsf{A}\\ \mathsf{B} & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}\right],$$

kde O označuje nulovou matici.

Příklad: klasický Lotkův-Volterrův systém dravec-kořist

Uvažujme společenstvo jednoho producenta a jednoho konzumenta (jednoho dravce a jeho kořisti). V takovém případě je $n = m = 1$ a systém (10.19) je tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x(r - ay),\\ y' &= y(-s + bx). \end{aligned} \tag{10.20}$$

Tento systém má vnitřní stacionární bod

$$(p, q) = \left(\frac{s}{b}, \frac{r}{a}\right).$$

Systém (10.20) můžeme přepsat na tvar

$$\begin{aligned} \frac{x'}{x} &= r - ay, \\ \frac{y'}{y} &= -s + bx, \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln x &= r - ay,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln y &= -s + bx. \end{aligned}$$

Při označení $u = \ln x$, $v = \ln y$ dostaneme

$$\begin{aligned} u' &= r - a\mathrm{e}^v, \\ v' &= -s + b\mathrm{e}^u, \end{aligned}$$

což je systém bipartitní. Bezprostředně vidíme, že tento systém můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial}{\partial v}\left(rv - a\mathrm{e}^v\right), \\ v' &= -\frac{\partial}{\partial u}\left(su - b\mathrm{e}^u\right), \end{aligned}$$

nebo vektorově

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla\left(su - b\mathrm{e}^u + rv - a\mathrm{e}^v\right). \tag{10.21}$$

Systém (10.20) je tedy ekvivalentní s hamiltonovským systémem (10.21). Jeho hamiltonián (invariant) v původních proměnných je

$$\begin{aligned} H(x,y) = s\ln x - bx + r\ln y - ay = b\left(\frac{s}{b}\ln x - x\right) + a\left(\frac{r}{a}\ln y - y\right) = \\ = b\left((p\ln x - x) + \frac{a}{b}(q\ln y - y)\right). \end{aligned}$$

Transformace systému (10.19) na systém bipartitní

Stavové proměnné x_i, y_j transformujeme na nové, které označíme u_i, v_j a definujeme rovnostmi

$$u_i = \ln x_i, \quad v_j = \ln y_j, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \; j = 1, 2, \dots, m. \tag{10.22}$$

Pak

$$u_i' = \frac{x_i'}{x_i} = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\mathrm{e}^{v_k}, \qquad v_j' = -s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\mathrm{e}^{u_k}.$$

Zavedeme označení

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{u}} = \left(\mathrm{e}^{u_1}, \mathrm{e}^{u_2}, \dots, \mathrm{e}^{u_n}\right), \qquad \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}} = \left(\mathrm{e}^{v_1}, \mathrm{e}^{v_2}, \dots, \mathrm{e}^{v_m}\right).$$

Systém (10.19) se transformuje na tvar

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{r} - \mathsf{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{v}}, \qquad \boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{s} + \mathsf{B}\mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}; \tag{10.23}$$

derivace první sady proměnných závisí pouze na druhé sadě, derivace druhé sady proměnných závisí pouze na první sadě. Systém (10.19) lze tedy substitucí (10.22) transformovat na systém bipartitní.

Invariant systému (10.19)

Hodnota a_{ij} vyjadřuje množství i-tého druhu kořisti, kterou za jednotku času zničí predátoři j-tého druhu za předpokladu, že populace i-tého druhu kořisti i j-tého druhu predátora měly jednotkovou velikost. Stručněji, a_{ij} je specifická úmrtnost i-tého druhu kořisti způsobená populací j-tého druhu predátora o jednotkové velikosti. Hodnota b_{ji} je specifická porodnost

j-tého druhu predátora po konzumaci jednotkového množství populace i-tého druhu kořisti. Poměr b_{ji}/a_{ij} lze tedy chápat jako efektivitu, s jakou se úbytek i-tého druhu kořisti přeměňuje do růstu populace j-tého druhu predátora. Předpokládejme nyní, že každý druh predátora využívá všechny druhy kořisti stejně efektivně, tj. že ke každému $j = 1, 2, \ldots, m$ existuje konstanta $c_j > 0$ taková, že

$$\frac{b_{ji}}{a_{ij}} = c_j \quad \text{pro všechny indexy } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jinak řečeno, nechť existuje vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)^T$ pro nějž platí

$$\mathsf{B}^T = \mathsf{A}\ \mathrm{diag}\,\boldsymbol{c}, \quad \text{neboli} \quad \mathsf{B} = \mathrm{diag}\,\boldsymbol{c}\,\mathsf{A}^T. \tag{10.24}$$

Předpokládejme dále, že existuje vnitřní stacionární bod systému (10.19), tj. že existují vektory $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_m)^T$ se všemi složkami kladnými, takové že $\mathsf{A}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$, $\mathsf{B}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{s}$, tj.

$$r_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} q_k \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n, \qquad s_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10.25}$$

Poznamenejme, že v případě $m \neq n$ nemusí být některý z vektorů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ určen jednoznačně. Pak vnitřní stacionární bod není izolovaný.

Definujme nyní funkci $H : \mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (p_i \ln x_i - x_i) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} (q_j \ln y_j - y_j)\,.$$

Pokud $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou řešením systému (10.19), která mají všechny složky v každém čase kladné, pak platí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{x_i'}{x_i} - x_i' \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(q_j \frac{y_j'}{y_j} - y_j' \right) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \frac{x_i'}{x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} (q_j - y_j) \frac{y_j'}{y_j} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \left(r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(-s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right) (q_j - y_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} q_k - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(-\sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right) (q_j - y_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (p_i - x_i) a_{ik} (q_k - yk) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (p_k - x_k) \frac{b_{jk}}{c_j} (q_j - y_j) = 0,
\end{aligned}$$

neboť $b_{jk}/c_j = a_{kj}$. Jinak řečeno, funkce H je na trajektoriích systému (10.19) konstantní, je invariantem (prvním integrálem) tohoto systému.

Transformace systému (10.19) na hamiltonovský

Opět použijeme transformaci (10.22) a s využitím vztahů (10.25) vyjádříme transformovaný systém (10.23) jako $\boldsymbol{u}' = \mathsf{A}(\boldsymbol{q} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}})$, $\boldsymbol{v}' = -\mathsf{B}(\boldsymbol{p} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}})$. Podmínka (10.24) nyní umožňuje přepsat tento systém ve tvaru

$$\boldsymbol{u}' = \mathsf{A}(\boldsymbol{q} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}}), \qquad \boldsymbol{v}' = -(\mathsf{A} \cdot \mathrm{diag}\,\boldsymbol{c})^T (\boldsymbol{p} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}). \tag{10.26}$$

Invariant H systému (10.19) vyjádříme také v proměnných $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$,

$$H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n}(p_i u_i - \mathrm{e}^{u_i}) + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{c_j}(q_j v_j - \mathrm{e}^{v_j}).$$

Platí

$$\frac{\partial H}{\partial u_i}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = p_i - \mathrm{e}^{u_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial v_j}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{c_j}(q_j - \mathrm{e}^{v_j}), \qquad i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,m.$$

Při označení $\nabla_{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_n}\right)^T$, $\nabla_{\boldsymbol{v}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_1}, \frac{\partial}{\partial v_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_m}\right)^T$ tedy je

$$\nabla_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{p} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{u}}, \qquad \nabla_{\boldsymbol{v}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\operatorname{diag}\boldsymbol{c})^{-1}(\boldsymbol{q} - \mathrm{e}^{\boldsymbol{v}}),$$

takže systém (10.26) je tvaru

$$\boldsymbol{u}' = \mathsf{A}\ \operatorname{diag}\boldsymbol{c}\,\nabla_{\boldsymbol{v}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v}' = -(\mathsf{A}\ \operatorname{diag}\boldsymbol{c})^T\,\nabla_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),$$

neboli

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}\operatorname{diag}\boldsymbol{c} \\ -(\mathsf{A}\operatorname{diag}\boldsymbol{c})^T & \mathsf{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{u}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\ \nabla_{\boldsymbol{v}} H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\end{pmatrix},$$

symbol O označuje nulovou matici. Pokud tedy platí (10.24) a existuje vnitřní stacionární bod systému (10.19), lze tento systém transformovat na systém hamiltonovský.

Modely společenstev tvořených producenty a jejich konzumenty, které mají vnitřní stacionární bod a splňují podmínku (10.24)*, mají v populační ekologii podobný význam jako Newtonovy zákony v mechanice* (srov. 5.4).

10.7 Grossbergovy systémy (zobecněné Lotkovy-Volterrovy)

Vlivy populací tvořících společenstvo na růst jednotlivých populací nemusí být tvaru přímé úměrnosti. Proto může být realističtější místo systému (10.1) uvažovat systém

$$x_i' = g_i(x_i)\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j)\right), \qquad i=1,2,\dots,n. \tag{10.27}$$

Funkce f_i, g_i, $i=1,2,\dots,n$ jsou definovány a spojité na intervalu $[0,\infty)$ a splňují podmínky:

- $(\forall i) g_i(0) = 0$ ... je-li velikost i-té populace nulová (tj. i-tá populace ve společenstvu není), pak nulovou zůstane; uvažujeme tedy izolovaná společenstva, kde nedochází k imigraci nových druhů.
- $(\forall i)(\forall \xi > 0) g_i(\xi) > 0$ ... skutečnost, zda je i-tá populace soběstačná nebo ne, nezávisí na její velikosti; neuvažujeme tedy např. Alleeho efekt.
- $(\forall j) f_j(0) = 0$ ... není-li j-tá populace ve společenstvu přítomná, nijak neovlivňuje růst ostatních populací.

- $(\forall j) f_j$ je rostoucí ... s rostoucí velikostí populace roste i její vliv na růst populací ostatních.

Systém (10.27) lze zapsat vektorově:

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{G}(\boldsymbol{x})\big(\boldsymbol{b} - \mathsf{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big),$$

kde

$$\mathsf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{diag}\big(g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)\big),$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)\big)^T.$$

Poněvadž všechny složky zobrazení $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou rostoucí (tedy prosté) funkce, je toto zobrazení prosté a existuje k němu zobrazení inverzní $\boldsymbol{f}^{-1} = (f_1^{-1}, f_2^{-1}, \dots, f_n^{-1})$. Je-li matice interakcí společenstva A regulární, existuje nejvýše jeden vnitřní stacionární bod

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \boldsymbol{f}^{-1}\left(\mathsf{A}^{-1}\boldsymbol{b}\right)$$

systému (10.27), tj. takový bod, že $x_1^* > 0, x_2^* > 0, \dots, x_n^* > 0$, který lze opět interpretovat jako dynamicky stálé velikosti všech populací koexistujících ve společenstvu.

Analogicky jako v důkazu věty 33 ověříme, že pokud existuje okolí U vnitřního stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ a existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými, pro něž je výraz

$$\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)^T \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c}\,\mathsf{A})\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\right)$$

nezáporný pro každé $\boldsymbol{x} \in U$, pak je funkce

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{f_i(\xi) - f_i(x_i^*)}{g_i(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

ljapunovskou funkcí systému (10.27) ve stacionárním bodě $\boldsymbol{x}^*$. Odtud je vidět, že tvrzení důsledku 10 platí také pro systém (10.27).

Kapitola 11

Modely konfliktů

11.1 Některé pojmy teorie her

Definice 26. *Hra dvou hráčů* je pětice

$$\{H; X, Y; M_1(x,y), M_2(x,y)\},$$

kde H je dvouprvková množina, X, Y jsou nějaké množiny a $M_1, M_2 : X \times Y \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Jsou-li množiny X, Y konečné, řekneme, že hra je *konečná.*

Prvky množiny H nazveme *hráči.*

Množinu X, resp. Y nazýváme *prostor strategií prvního hráče,* resp. *druhého hráče.* Prvky množiny X, resp. Y, nazveme (ryzí) *strategie prvního hráče*, resp. *druhého hráče.*

Funkce M_1, resp. M_2 nazveme *výplatní funkce prvního hráče*, resp. *druhého hráče.*

U hry dvou hráčů můžeme bez újmy na obecnosti položit $H = \{1, 2\}$.

Hodnota $M_i(x, y)$ představuje výhru i-tého hráče v jednom kole (tahu) hry, pokud první hráč použil strategii $x \in X$ a druhý hráč strategii $y \in Y$.

Připomeňme *n-rozměrný simplex,* tj. množinu

$$S_n = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_i = 1^n x_i = 1 \right\}.$$

Definice 27. Nechť

$$\{\{1,2\}; X, Y; M_1(x,y), M_2(x,y)\}$$

je konečná hra dvou hráčů. Označme n, resp. m, počet prvků množiny X, resp. Y. *Smíšená strategie prvního hráče,* resp. *druhého hráče* je n-tice $\boldsymbol{x} \in S_n$, resp. m-tice $\boldsymbol{y} \in S_m$.

Složku x_i ze smíšené strategie $\boldsymbol{x}$ prvního hráče můžeme interpretovat jako pravděpodobnost, se kterou první hráč použije svou i-tou strategii v jednom kole, nebo ekvivalentně jako relativní frekvenci, s jakou používá i-tou strategii při opakované hře. Analogicky interpretujeme smíšené strategie druhého hráče.

Nechť X, Y, n, m mají stejný význam jako v předchozí definici. V dalším textu budeme používat stručnější značeni $(X) = S_n$, $(Y) = S_m$. Tyto množiny nazveme prostory smíšených strategií prvního a druhého hráče.

Definice 28 (Rovnovážné strategie)**.** Nechť

$$\{\{1,2\}; X, X; M_1(x,y), M_2(x,y)\}$$

je konečná hra dvou hráčů, kteří mají stejné prostory strategií. Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}} \in (X)$ se nazývá *rovnovážná podle Nashe,* jestliže pro každou smíšenou strategii $\boldsymbol{x} \in (X)$ platí

$$M_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \le M_1(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}),$$
$$M_2(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) \le M_2(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}).$$

Definice 29 (Symetrické hry)**.** Nechť

$$\{\{1,2\}; X, Y; M_1(x,y), M_2(x,y)\}$$

je konečná hra dvou hráčů. Řekneme, že tato hra je *symetrická,* pokud $X = Y$, a $M_1(x,y) = M_2(y,x)$ pro všechny strategie $x, y \in X$.

Je-li množina strategií X konečná, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, označíme $a_{ij} = M_1(i,j)$. Výplatní funkce obou hráčů jsou v takovém případě jednoznačně určeny maticí $\mathsf{A} = (a_{ij})$; platí totiž $M_1(i,j) = a_{ij}$, $M_2(i,j) = a_{ji}$. Jsou-li $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in (X)$ smíšené strategie,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

pak příslušné výplatní funkce jsou dány formulemi

$$M_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad M_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T \mathsf{A} \boldsymbol{x}$$

Poznámka 15. Nechť matice A určuje výplatní funkce v symetrické konečné hře. Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}} \in (X)$ je rovnovážnou strategií právě tehdy, když $\boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \le \bar{\boldsymbol{x}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}$ pro všechny smíšené strategie $\boldsymbol{x} \in (X)$, tj. $\bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = \max\left\{\boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{x} \in (X)\right\}$.

Důkaz: Nechť $\bar{\boldsymbol{x}} \in (X)$ je rovnovážná strategie. Pak pro libovolnou smíšenou strategii $\boldsymbol{x} \in (X)$ platí

$$\boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = M_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) \le M_1(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Nechť naopak platí $\bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = \max\left\{\boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{x} \in (X)\right\}$. Pak pro libovolnou smíšenou strategii $\boldsymbol{x} \in (X)$ platí

$$M_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \le \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = M_1(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}),$$
$$M_2(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \le \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = M_2(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}).$$

□

Označme

$$\boldsymbol{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0)^T,$$

nenulová je i-tá složka vektoru. Vektory $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ tvoří bázi n-rozměrného vektorového prostoru.

Věta 34. *Nechť*

$$\{H = \{1,2\}; X, X; M_1(x,y), M_2(x,y)\}$$

je symetrická konečná hra, $X = \{1,2,\dots,n\}$, $M_1(i,j) = a_{ij}$. *Pro smíšenou strategii*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in (X)$$

položme

$$C(\boldsymbol{x}) = \{k \in \{1,2,\dots,n\} : x_k > 0\}.$$

Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i \in (X)$ *je rovnovážná právě tehdy, když*

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \le \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \textit{pro všechna } i \notin C(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{11.1}$$

a

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \textit{pro všechna } i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{11.2}$$

Důkaz: Nechť $\bar{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážná strategie. Podle předchozí poznámky platí

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \le \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{pro všechna } i \in \{1,2,\dots,n\}.$$

Připusťme, že existuje $k \in C(\bar{\boldsymbol{x}})$ tak, že $\boldsymbol{e}_k^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} < \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$. Pak

$$\bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i \in C(\bar{\boldsymbol{x}})} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{x}_k \boldsymbol{e}_k^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}) \setminus \{k\}} \bar{x}_i \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} <$$

$$< \bar{x}_k \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i \in C(\bar{\boldsymbol{x}}) \setminus \{k\}} \bar{x}_i \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}},$$

což je spor, který dokazuje první implikaci.

Nechť platí podmínky (11.1) a (11.2). Pak pro všechna $i \in \{1,2,\dots,n\}$ platí $\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \le \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$. Je-li nyní $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in (X)$ libovolná smíšená strategie, pak

$$\boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \le \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}_i^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}},$$

takže podle předchozí poznámky je $\bar{\boldsymbol{x}}$ ronovážnou strategií. □

Poznámka 16. Ryzí strategie $\boldsymbol{e}_i \in (X)$ je rovnovážnou strategií symetrické konečné hry s výplatními funkcemi určenými maticí A právě tehdy, když $a_{ji} \le a_{ii}$ pro všechna $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Důkaz: V tomto případě je $C(\boldsymbol{e}_i) = \{i\}$, $\boldsymbol{e}_j^T \mathsf{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ji}$, $\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\boldsymbol{e}_i = a_{ii}$. □

11.1.1 Nalezení rovnovážné strategie symetrické konečné hry

Buď

$$\{H = \{1,2\}; X, X; M_1(x,y), M_2(x,y)\}$$

symetrická konečná hra, $X = \{1,2,\dots,n\}$, $M_1(i,j) = a_{ij} > 0$. Podmínka kladnosti čísel a_{ij} není újmou na becnosti; její splnění lze pro libovolnou matici dosáhnout přičtením vhodné konstanty ke všem jejím prvkům. Budeme hledat rovnovážnou strategii $\bar{\boldsymbol{x}} \in (X)$ takovou, že

$$v = \boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \max\left\{\boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in (X) \text{ je rovnovážná strategie}\right\}.$$

Pro $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ musí podle věty 34 platit

$$\bar{x}_i \geq 0, \quad \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \leq v \qquad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j = 1, \qquad v = \bar{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \to \max .$$

Položme

$$\xi_i = \frac{\bar{x}_i}{v}.$$

Pak $\xi_i \geq 0$, neboť $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_i a_{ij} \bar{x}_j > 0$. Dále platí

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j = v \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \leq v,$$

takže

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \leq 1.$$

Navíc

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j = \frac{1}{v} \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j = \frac{1}{v} \to \min,$$

takže

$$-\sum_{j=1}^{n} \xi_j \to \max .$$

Z provedené úvahy plyne, že hledaná rovnovážná strategie je

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

kde ξ_1, ξ_2, …,ξ_n je řešení lineární optimalizační úlohy (úlohy lineárního programování)

$$-\sum_{j=1}^{n} \xi_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \leq 1, \quad \xi_i \geq 0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

11.2 Vyjádření hry pomocí systému diferenciálních rovnic

Pro symetrické hry lze uvažovat jistou analogii metody fiktivní hry. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechna čísla a_{ij} jsou nezáporná (toho lze případně dosáhnout přičtením vhodné konstanty k jednotlivým výhrám) a celá čísla (což lze zajistit vhodnou volbou peněžní jednotky).

Představme si, že máme nějakou fiktivní nebo virtuální „populaci“ skládající se z N „jedinců“, kteří spolu — každý s každým — soupeří a každý z nich používá právě jednu strategii z množiny X. Do dalšího „kola hry“ postoupí každý „jedinec“ z původní populace a spolu s ním další „jedinci“ používající stejnou strategii; budeme jim říkat „potomci“ uvažovaného „rodičovského jedince“. Počet potomků jednoho „jedince“ bude roven celkové výhře, kterou „jedinec“ při všech konfliktech jednoho „kola“ získá. Úspěšné strategie — ty, které více vyhrávají — mají více „potomků“ a tedy se více v „populaci“ šíří.

Nechť v „populaci“ je ν_i „jedinců“ používajících strategii $i \in X$. Poněvadž celá virtuální hra se odehrává v čase, je celková velikost „populace“ N i každá hodnota ν_i funkcí času, tj. $N = N(t)$, $\nu_i = \nu_i(t)$. Samozřejmě platí

$$N(t) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(t).$$

Položme

$$x_i(t) = \frac{\nu_i(t)}{N(t)}.$$

Pak je $x_i(t)$ relativní četnost výskytu „jedinců“ používajících strategii $i \in X$ a platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1,$$

takže vektor

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

představuje smíšenou strategii. Jinak řečeno, hodnota $x_i(t)$ představuje pravděpodobnost, že náhodně vybraný „jedinec“ používá strategii $i \in X$. Střední hodnota počtu „potomků“ jednoho „jedince“ používajícího strategii $i \in X$ za jednotku času tedy bude

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t).$$

Počet „jedinců“ jedinců požívajících strategii $i \in X$ za časový interval délky Δt bude

$$\nu_i(t + \Delta t) = \nu_i(t) + \nu_i(t)\alpha_i(t)\Delta t = \nu_i(t) \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) \Delta t \right).$$

Dále

$$N(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(t) \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) \Delta t \right),$$

takže

$$x_i(t+\Delta t) = \frac{\nu_i(t+\Delta t)}{N(t+\Delta t)} = \frac{\nu_i(t)\left(1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t\right)}{\sum\limits_{i=1}^n \nu_i(t)\left(1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t\right)} =$$

$$= \frac{x_i(t)N(t)\left(1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t\right)}{N(t)\sum\limits_{i=1}^n x_i(t)\left(1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t\right)} = x_i(t)\frac{1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t}{1+\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n x_i(t)a_{ij}x_j(t)\Delta t} =$$

$$= x_i(t)\frac{1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t}{1+\boldsymbol{x}(t)^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)\Delta t}.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{x_i(t+\Delta t)-x_i(t)}{\Delta t} = \frac{x_i(t)}{\Delta t}\left(\frac{1+\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t}{1+\boldsymbol{x}(t)^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)\Delta t} - 1\right) =$$

$$= \frac{x_i(t)}{\Delta t}\,\frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t)\Delta t - \boldsymbol{x}(t)^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)\Delta t}{1+\boldsymbol{x}(t)^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)\Delta t} = x_i(t)\,\frac{\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) - \boldsymbol{x}(t)^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)}{1+\boldsymbol{x}(t)^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}(t)\Delta t}$$

a limitním přechodem $\Delta t \to 0$ obdržíme systém obyčejných autonomních diferenciálních rovnic pro neznámé funkce x_i:

$$x_i' = x_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - \boldsymbol{x}^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

který ještě můžeme přepsat na tvar

$$x_i' = x_i\left(\boldsymbol{e}_i^T\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\mathsf{A}\boldsymbol{x}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11.3}$$

Věta 35. *Je-li $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnovážnou strategií symetrické konečné hry s výplatními funkcemi určenými maticí A, pak $\bar{\boldsymbol{x}}$ je stacionárním bodem autonomního systému (11.3).*

Důkaz: Plyne bezprostředně z věty 34. □

Obrácené tvrzení neplatí; každá ryzí strategie $\boldsymbol{e}_i$ je stacionárním bodem systému (11.3), ale ryzí strategie obecně není rovnovážná.

Věta 36. *Je-li $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)^T \in (X)$ stabilním stacionárním bodem systému (11.3) takovým, že $\sum\limits_{i=1}^n \hat{x}_i = 1$, pak je $\hat{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážnou strategií symetrické konečné hry s výplatními funkcemi určenými maticí A.*

Důkaz: Označme

$$F_i(\boldsymbol{x}) = x_i\left(\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\boldsymbol{x}\right) = x_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk}x_l x_k\right).$$

Pak

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk}x_l x_k\right) + x_i\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k - \sum_{l=1}^n a_{lj}x_l\right) =$$
$$= \delta_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\boldsymbol{x}\right) + x_i\left(a_{ij} - \boldsymbol{e}_j^T \mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\right),$$

kde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

je Kroneckerův symbol. Prvky variační matice systému (11.3) v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}$ tedy jsou

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \hat{x}_i\left(a_{ij} - \boldsymbol{e}_j^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\right), & \hat{x}_i \neq 0, \\ \delta_{ij}\left(\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}}\right), & \hat{x}_i = 0. \end{cases}$$

Vlastní čísla variační matice splňují rovnici

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \delta_{ij}\lambda\right) = 0.$$

Buď i takové, že $\hat{x}_i = 0$. Determinant rozvineme podle i-tého řádku:

$$\left(\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \lambda\right) \cdot (\text{příslušný algebraický doplněk}).$$

Odtud plyne, že pro každé i takové, že $\hat{x}_i = 0$, je číslo $\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ vlastní hodnotou variační matice. Ze stability stacionárního řešení $\hat{\boldsymbol{x}}$ plyne

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \leq 0 \quad \text{pro každé } i \text{ takové, že } \hat{x}_i = 0.$$

Současně platí

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = 0 \quad \text{pro každé } i \text{ takové, že } \hat{x}_i \neq 0,$$

neboť $\hat{\boldsymbol{x}}$ je stacionární řešení systému (11.3). Celkem tedy

$$\boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \leq 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Je-li nyní $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i \in (X)$ libovolná smíšená strategie, pak platí

$$\boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \leq \sum_{i=1}^n x_i \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^n x_i = \hat{\boldsymbol{x}}^T \mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}},$$

což znamená, že $\hat{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážnou strategií. $\square$

Obrácené tvrzení opět neplatí. Uvažme například konečnou symetrickou hru s maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak strategie $\bar{\boldsymbol{x}} = (0,1)^T$ je rovnovážná, neboť

$$(x, 1-x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = (0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro libovolné $x \in [0,1]$. Příslušný systém diferenciálních rovnic je

$$x' = x\left[(1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = x(x - x^2) = x^2(1-x),$$

$$y' = y\left[(0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = y(-x^2) = -x^2 y.$$

Stacionární body tedy jsou $(0,y)$, $(1,0)$ pro libovolné $y \in [0,1]$. Variační matice ve stacionárním bodě (x,y) je tvaru

$$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 & 0 \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Zejména tedy

$$\mathsf{J}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice má dvojnásobný kořen $\lambda = 0$, což znamená, že stacionární řešení $(0,1)$ není stabilní.

11.2.1 Zmenšení dimenze systému (11.3)

Spolu se systémem (11.3) uvažujme počáteční podmínky

$$x_i(0) = x_{i,0} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{11.4}$$

Aby vektor $\boldsymbol{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{n,0})^T$ vyjadřoval smíšenou strategii konečné symetrické hry s výplatní maticí A, musí platit

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,0} = 1. \tag{11.5}$$

Pro řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ systému (11.3) platí

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t) - 1\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t) - \boldsymbol{x}^T(t)A\boldsymbol{x}(t)\right) = \\ &= \boldsymbol{x}^T(t)A\boldsymbol{x}(t)\left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\right),\end{aligned}$$

takže

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t) - 1\right)}{\sum_{i=1}^{n} x_i(t) - 1} = -\boldsymbol{x}^T(t)A\boldsymbol{x}(t)\,.$$

Integrací poslední rovnosti v mezích od 0 do t dostaneme

$$\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(s) - 1\right)\right]_{s=0}^{t} = -\int_0^t \boldsymbol{x}^T(s)A\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\,,$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(0) - 1\right)\exp\left(\int_t^0 \boldsymbol{x}^T(s)A\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right).$$

Z rovnosti (11.5) nyní plyne platnost rovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$$

pro všechna $t \geq 0$. Tato skutečnost umožňuje zredukovat dimenzi systému (11.3) o jedna. Při následujících výpočtech budeme opět používat Kroneckerův symbol δ_{ij}. Ze vztahu

$$x_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j$$

plyne

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \boldsymbol{x}^T \mathsf{A}\boldsymbol{x} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_l a_{lj} x_j = \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j + a_{in}\left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right) - \sum_{l=1}^{n} x_l \left[\sum_{j=1}^{n-1} a_{lj}x_j + a_{ln}\left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right)\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(a_{ij} - a_{in})x_j + a_{in} - \sum_{l=1}^{n} x_l \left[\sum_{j=1}^{n-1}(a_{lj} - a_{ln})x_j + a_{ln}\right] = \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}(a_{ij} - a_{in})x_j + a_{in} - \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{n-1}(a_{lj} - a_{ln})x_j + a_{ln}\right] - \\
&\qquad - \left(1 - \sum_{l=1}^{n-1} x_l\right)\left[\sum_{j=1}^{n-1}(a_{nj} - a_{nn})x_j + a_{nn}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(a_{ij} - a_{in})x_j + a_{in} - \sum_{j=1}^{n-1}(a_{nj} - a_{nn})x_j - a_{nn} -$$
$$- \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{n-1}(a_{lj} - a_{ln} - a_{nj} + a_{nn})x_j + a_{ln} - a_{nn}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(a_{ij} - a_{in} - a_{nj} + a_{nn})x_j + a_{in} - a_{nn} -$$
$$- \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{n-1}(a_{lj} - a_{ln} - a_{nj} + a_{nn})x_j + a_{ln} - a_{nn}\right] =$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \delta_{il} \left[(a_{lj} - a_{ln} - a_{nj} + a_{nn})x_j + a_{ln} - a_{nn}\right] -$$
$$- \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} x_l \left[(a_{lj} - a_{ln} - a_{nj} + a_{nn})x_j + a_{ln} - a_{nn}\right] =$$
$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{il} - x_l) \left[(a_{lj} - a_{ln} - a_{nj} + a_{nn})x_j + a_{ln} - a_{nn}\right] .$$

Označme nyní

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{in} - a_{nj} + a_{nn}, \quad b_i = a_{nn} - a_{in}$$

pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$ a dále

$$\tilde{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1(n-1)} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{(n-1)1} & \tilde{a}_{(n-1)2} & \cdots & \tilde{a}_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Předchozí úvaha a výpočet ukazují, že systém (11.3) lze zredukovat na

$$x_i' = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^T \left(\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{11.6}$$

Nyní označujeme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})^T$, $\boldsymbol{e}_i = \left(\delta_{i1}, \delta_{ij}, \ldots, \delta_{i(n-1)}\right)^T$.