Domáca úloha M5858 č. 10

Uvažujme model **spoločenstva dravec-korisť s vnútrodruhovou konkurenciou**.

Zaveďme označenie:

$N_1 \cdots$ veľkosť populácie koristi

$N_2 \cdots$ veľkosť populácie dravca

$\epsilon_1 \cdots$ špecifická miera rastu populácie koristi

$\epsilon_2 \cdots$ špecifická miera mortality populácie dravca

$\alpha \cdots$ miera vnútrodruhovej konkurencie koristi

$\gamma_1 \cdots$ špecifická miera ničenia populácie koristi dravcom

$\kappa \cdots$ efektívnosť premeny zničenej koristi na populáciu dravca

Predpokladáme, že všetky konštanty sú kladné a nech $\gamma_2 := \kappa\gamma_1$. Rovnako ako u klasického Lotka-Volterrovho modelu dravec-korisť sa predpokladá, že dravec a korisť žijú izolovane od ostatných druhov a že dravec sa živí výhradne korisťou. Keby bol od koristi izolovaný, postupne by vymrel, tj. $\epsilon_2 > 0$. Tiež predpokladáme, že korisť má dostatočné množstvo potravy na prežitie, tj. $\epsilon_1 > 0$.

Potom model spoločenstva dravec-korisť s vnútrodruhovou konkurenciou má tvar

$$\begin{aligned} N_1' &= N_1(\epsilon_1 - \alpha N_1 - \gamma_1 N_2), \\ N_2' &= N_2(-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1). \end{aligned}$$

ZADANIE: Rozhodnite o existencii a jednoznačnosti riešenia tohoto systému, určte nulkliny/sing. body, typ singulárnych bodov a načrtnite fázový portrét za predpokladu:

$$\alpha\epsilon_2 > \epsilon_1\gamma_2.$$

Pokúste sa túto situáciu zachytenú na fázovom portréte interpretovať na biologickej úrovni.

Preveďte lineárny systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

do polárnych súradníc (polárne súradnice $x(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$, $y(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)$).

Pokúste sa stanoviť typ singulárneho bodu $[0, 0]$ rozborom všetkách možností, ktoré môžu nastať pri rôznych voľbách konštant $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Poznámka. V prípade, že $c = -b$ a $d = a$, systém má singulárny bod typu OHNISKO.

1. Stanovte typ singulárneho bodu systému:

$$\begin{aligned} x' &= x^2 - y^2 \\ y' &= 2xy \end{aligned}$$

HINT: Preveďte systém do polárnych súradníc a následne vypočítajte rovnicu trajektórie, ktorá ukáže typ singulárneho bodu (sing. bod je typu **dipól**).

Transformujte súradnice tohto lineárneho nehomogénneho dif. systému tak, aby sa singulárny bod previedol do počiatku súradnicovej sústavy a následne určte typ tohto singulárneho bodu.

2.

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - 1 \\ y' &= 5x - y - 23 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x' &= x + y - 2 \\ y' &= -2x + 3y - 1 \end{aligned}$$

4. Nakreslite fázový portrét pre systém

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 \end{aligned}$$

HINT: Vypočítajte rovnicu trajektórie a určte jej definičný obor.

5. Dokážte, že singulárny bod $[0,0]$ je izolovaný a následne určte jeho typ.

   a)
$$\begin{aligned} x' &= e^{x+y} - \sin x - 1 \\ y' &= \ln(1-x^2) + x + y \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} x' &= x - y + 1 \\ y' &= -\sin x \end{aligned}$$

   HINT: Na príklad 5. aplikujte vetu o variačnej matici(linearizácia všeobecného systému pomocou Jacobiho matice vyčíslenej v singulárnom bode)!

6. Rozhodnite o existencii a jednoznačnosti riešenia, určte nulkliny, singulárne body, smerové vektorové pole a načrtnite tvar trajektórii systému
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x^3 + 4xy \end{aligned}$$
   Ďalej dokážte, že množiny
$$\begin{aligned} P_1 : &\quad y = \tfrac{x^2}{2+\sqrt{2}} \\ P_2 : &\quad y = \tfrac{x^2}{2-\sqrt{2}} \end{aligned}$$
   sú invariantné, na druhú stranu ukážte, že množina $P_3 : y = 0$ invariantná nieje.

   HINT: Pre množinu P_3 stačí ukázať, že po dosadení do systému za $y = 0$ je pre $x \in \mathbb{R}$ systém nenulový. Množiny P_i, $i = 1, 2$ sa dokážu analogicky. Stači ukázať, že
$$(y - kx^2)' = y' - 2kxx' = -x^3 + 4xy - 2kxy = 0$$
   pre $y = kx^2 \quad \& \quad k_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

   Poznámka: Tento príklad ukazuje, ako je niekedy možné z tvaru kriviek nulklín odhadnúť všeobecný tvar invariantnej množiny, ktorá následným dosadením do systému vygeneruje podmienky kladené na koeficienty invariantnej množiny(tj. množina v ktorej $\forall$každá trajektória ktorá začne, alebo sa do tejto množiny dostane, už ju neopustí pre čas $t \to \pm\infty$).

Mgr. Milan Bačík
doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.