

Domáca úloha M5858 č. 8

1. Vyriešte Legendreho diferenciálnu rovnicu pre obecné koeficienty v prípade, keď viete, že jedno fundamentálne riešenie je možné nájsť v tvare polynómu $y_1(t) = \sum_{i=0} a_i t^i$.

Legendreho rovnica:

$$x'' - \frac{\alpha t}{1-t^2} x' + \frac{\beta}{1-t^2} x = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

HINT:

Na odvodenie konkrétneho tvaru polynómu y_1 postupujte rovnako ako na cvičeniach, tj. dosadíte y_1 do Legendreho rovnice, čo vygeneruje podmienky kladené na jeho koeficienty, následne si konkrétne zvolte koeficient a_0, \dots . Na získanie druhého lineárne nezávislého riešenia použite vzorec:

$$y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^s a(\tau) d\tau\right)}{y_1^2(s)} ds, \quad a(\tau) = \frac{\alpha\tau}{1-\tau^2}.$$

Pokud se vám nepodaří takto zadanou úlohu vyřešit, nepropadejte panice a zkuste najít řešení pro případ $\alpha = 2$.

Ani neúspěch při řešení této speciálnější rovnice není důvodem k depresi. Zkuste ještě případ $\alpha = \beta = 2$.

2. Modifikácia základného rastového modelu

Uvažujme rastový model v tvare

$$x'(t) = \mu(x)x(t).$$

Funkcia μ predstavuje špecifickú mieru rastu populácie.

- a) Vymyslíte funkciu μ tak, aby spĺňala vami vopred dané predpoklady ktoré by navyiac mohli byť realistické (tj. skutočne by sa tak mohla istá populácia správať).
- b) Pokúste sa nájsť novú funkciu μ tak, aby spĺňala predpoklady rastového modelu klimaxovej populácie.

V oboch prípadoch potom urobte kvalitatívnu analýzu modelu rozborom stacionárnych bodov a načrtnite fázový portrét tohto modelu.

HINT:

Inšpirujte sa dynamikou klimaxovej populácie počítanej na cvičeniach.

Mgr. Milan Bačík
doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.